Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

f. Gegeben a, α, β.

Auflösung. $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a,$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2}.$$

VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität.

[32) Betrachtet man einen größten Kugelkreis als Äquator, so gehört zu ihm nach jeder Seite ein Pol, und umgekehrt gehört zu jedem Pole ein Äquator, d. h. ein größter Kreis. Jeder Punktfigur entspricht also eine von größten Kreisen gebildete Polarfigur. Jede Kurve auf der Kugelfläche kann als eine Folge von Punkten angesehen werden; ihr entspricht eine Folge von größten Kreisen, die eine andere Kurve umhüllen oder ausschattieren. Letztere heißt die Polarkurve der ersteren.

Ähnlich, wie bei der Lehre von Pol und Polare kann man zu jedem Satze der Kugelgeometrie den entsprechenden Polarsatz finden. Einem durch zwei Punkte begrenzten Bogen eines größten Kreises entspricht stets ein Punkt, in dem sich zwei größte Kreise schneiden. Hat der Bogen die Länge a, so schneiden sich die Kreise so, daß $\pi - \alpha_1 = a$ oder $\alpha_1 = \pi - a$ ist. Jedem begrenzten Bogen a eines größten Kreises entspricht also ein Winkel $\alpha_1 = \pi - a$.

Dem Umfange $u = a + b + c$ des Dreiecks entspricht eine Winkelsumme $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 3\pi - (a + b + c) = 3\pi - u$. Zugleich ist $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = E_1 + \pi$, wo E_1 den sphärischen Exceß bedeutet. Daraus folgt $3\pi - u = E_1 + \pi$, oder $E_1 = 2\pi - u$. Bleibt der Dreiecksumfang um e unter 2π, so ist $u = 2\pi - e$, folglich $E_1 = e$. Man kann also sagen: Der sphärische „Mangel" eines Dreiecks ist gleich dem sphärischen Überschuß (Exceß) des Polardreiecks. Gewöhnlich wird der Satz so ausgedrückt, daß E_1 und u sich zu 360^0 ergänzen.

Den Punkten eines Kreises, der mit der sphärischen Länge a (als Radius) um einen Kugelpunkt geschlagen ist, entspricht eine Folge größter Kreise, die den Äquator des Punktes d. h. den „Polarkreis" (nicht im geographischen Sinne zu verstehen!) unter konstantem Winkel schneiden. Diese Kreise schattieren einen Parallelkreis des Äquators aus. Folglich: Die Polarkurve eines Kreises ist stets ein Kreis. Ist der Radius des ersteren gleich a, so ist der andere um $\bar{a} = \pi - a$ vom Äquator entfernt. Concentrischen Kreisen entsprechen also concentrische Kreise.

Dem umbeschriebenen Kreise eines Dreiecks entspricht der einbeschriebene des Polardreiecks. Nun geben aber drei größte Kreise im ganzen acht Kugeldreiecke, so daß acht Berührungskreise vorhanden sind. Ist nun zum Dreiecke aus a, b und c das Polardreieck A, B, C und dessen Gegendreieck (Antipodenpunkte!) $A_1 B_1 C_1$, so entsprechen den acht Berührungskreisen, von denen je zwei Antipodenkreise sind, acht umbeschriebene Kreise ABC, A_1BC, AB_1C, ABC_1, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, $A_1B_1C_1$, von denen ebenfalls je zwei Antipodenkreise sind. Den Eigenschaften des einen Dreiecks und seiner Kreise entsprechen die polaren oder reciproken Eigenschaften des Polardreiecks und seiner Kreise.

Durch stereographische Projektion zweier solcher Gebilde erhält man zwei Kreisgebilde in der Ebene, die ebenfalls in Polarbeziehungen zu einander stehen. Darin liegt eine wahre Fundgrube für neu auszusprechende Sätze der Elementargeometrie.

Um von dem weittragenden Charakter dieser Dinge eine Anschauung zu geben, sei nur die Kurve konstanter sphärischer Fadensumme erwähnt, d. h. die sphärische Ellipse. Ist die sphärische Entfernung der Brennpunkte gleich $2e$ und die konstante Fadensumme gleich $2k$, so ist die Kurve durch die Gleichung $v_1 + v_2 = 2k$ vollkommen bestimmt. Jedes der Dreiecke über $2e$ mit konstanter Fadensumme hat konstanten Umfang. Bei der Polarkurve handelt es sich um einen festen Winkel ε, der sich aus $\pi - \varepsilon = 2e$, oder $\varepsilon = \pi - 2e$ bestimmt. Den Ellipsenpunkten entsprechen in der Polarfigur größte Kreise, welche die Schenkel des festen Winkels unter Winkeln φ_1 und φ_2 schneiden, aber so, daß $(\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) = 2k$ sein muß, oder $\varphi_1 + \varphi_2 = 2(\pi - k)$. Jedes der abgeschnittenen Dreiecke hat also die konstante Winkelsumme $\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon = 2(\pi - k) + \varepsilon$, folglich konstanten Inhalt. Dies entspricht ganz der Eigenschaft der Hyperbel, daß alle Tangentendreiecke konstanten Inhalt haben. (Vgl. Teil II, Fig. 197.) Man kann also die Polarkurve als sphärische Hyperbel betrachten, die Schenkel des konstanten Winkels als Asymptoten, und für die „Tangendreiecke" ist der obige Satz gefunden worden.

Nimmt man aber statt des einen Brennpunktes seinen Gegenpunkt, so geht die Gleichung der Ellipse in $v_1 + (\pi - v_2) = 2k$ oder in $v_1 - v_2 = 2k - \pi$ über, was der gewöhnlichen Hyperbelgleichung entspricht und der Polarkurve eine konstante Winkeldifferenz aufnötigt, wobei es sich übrigens nur um die Vertauschung eines Winkels und seines Nebenwinkels handelt. Dabei liegt die Frage nahe, ob die so definierte Hyperbel mit der vorher als Polarkurve erklärten identisch ist, was in der That der Fall ist. Von besonderer Wichtigkeit ist, daß zwischen den beiden Brennpunkten und den beiden Asymptoten Reciprocität stattfindet und daß im allgemeinen zu jeder Brennpunkteigenschaft eine Asymptoteneigenschaft gehört.

Es sei nur bemerkt, daß die Lehre von den sphärischen Kegelschnitten für die mathematische Physik von größter Bedeutung geworden ist, daß ferner die stereographischen Projektionen dieser Kurven zu höheren Teilen der Funktionentheorie, der Lehre von den elliptischen Funktionen, in eigentümlicher Beziehung stehen. (Vergl. des Verfassers Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Kap. XV.)

Aus diesen Andeutungen wird man erkennen, daß die anfangs so wenig anregend erscheinende Lehre von den Ecken und ihren Polarecken zu den interessantesten Gebieten der neueren Mathematik hinüberführt.]

IX. Zusammenstellung der wesentlichen Formeln.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

1) $\cos c = \cos a \cos b$

2) $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$

3) $\cos\alpha = \dfrac{\tan b}{\tan c}$

4) $\tan\alpha = \dfrac{\tan a}{\sin b}$

5) $\cos a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$

6) $\cos c = \cot\alpha \cot\beta.$

Nepersche Regel:

$$7)\begin{cases} \cos c = \cot\alpha\cot\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot\beta\cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\alpha\sin c, \\ \cos\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\beta. \end{cases}$$

Fig. 122.