Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

I. Vorbemerkungen über Trägheitsmomente

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

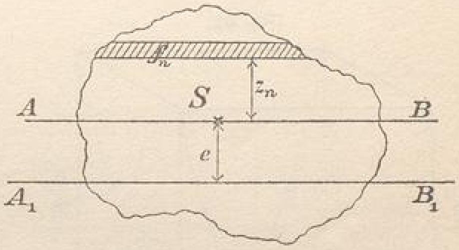
Zweite Abteilung.

Stereometrie.

I. Vorbemerkungen über Trägheitsmomente.

1) Eine Reihe wichtiger Aufgaben der Stereometrie und Mechanik hängt mit dem Begriffe des Trägheitsmomentes von ebenen Flächen zusammen.

Fig. 60.



Das statische Moment einer Fläche in Bezug auf eine Achse AB kann gedeutet werden als der Ausdruck

$$M = \sum fz = f_1 z_1 + f_2 z_2 + \cdots,$$

wobei jedes f_n einen schmalen Parallelstreifen zur Achse bedeutet, z_n seine Entfernung von der Achse (also den Hebelarm). Der Ausdruck wird gleich Null, wenn AB durch den Schwerpunkt geht.

Multipliziert man dagegen jeden Streifen f_n, statt mit z_n, mit z_n^2, so erhält man einen Ausdruck

$$T = \sum fz^2 = f_1 z_1^2 + f_2 z_2^2 + \cdots,$$

den man aus Gründen der Mechanik als das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Achse AB bezeichnet.

2) Dieser Ausdruck kann im allgemeinen nicht Null werden, da alle z^2 positiv sind. Für jede Achsenrichtung läßt sich aber zeigen, daß er am kleinsten ist, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht.

Ist nämlich $T = \sum fz^2$ für den Schwerpunkt bekannt, und verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um die Strecke $\pm e$, so wird das neue Moment

$$T_1 = \sum f(z \pm e)^2 = \sum f(z^2 + e^2 \pm 2ze)$$
$$= \sum fz^2 + \sum fe^2 \pm \sum 2efz = \sum fz^2 + e^2 \sum f \pm 2e \sum fz.$$

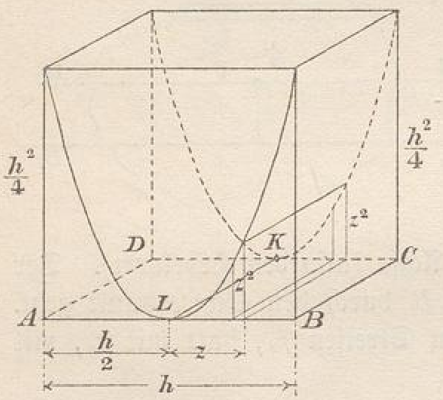
Hier ist $\sum fz^2 = T$, $e^2 \sum f = F$ (die Fläche) und $2e \sum fz = 0$, letzteres deshalb, weil das statische Moment $\sum fz$ für die Schwerpunktsachse gleich Null ist. Folglich ist

$$T_1 = T + e^2 F.$$

Kennt man also das Trägheitsmoment für eine Schwerpunktsachse, so kennt man es für jede parallele Achse. Man erhält es für diese durch Zufügung des Produktes aus der Fläche und dem Quadrate der „Verschiebung".

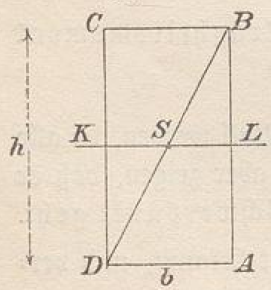
3) Man kann ein solches Trägheitsmoment stereometrisch deuten, indem man an jeder Stelle der Fläche ein Lot z^2 errichtet, wo z die Entfernung von der Achse bedeutet. Jeder ebene Vertikalschnitt senkrecht zur Achse giebt dann eine parabolische Schnittlinie.

Fig. 61.



Ist z. B. $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten b und h, und führt man in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse jene Konstruktion durch, so entsteht Figur 61, wo über jedem schmalen Streifen f ein Körper vom Inhalte fz^2 steht. Da nun der ganze Rechteckskörper den Inhalt $bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{4}$ hat, so ist der Inhalt des durch jene Konstruktion entstandenen Körpers $\frac{bh^3}{12}$, denn die Parabelfläche umfaßt $\frac{2}{3}$ des Rechtecks, der Rest ist der dritte Teil vom Rechteck.

Fig. 62.



Demnach ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Mittelachse KL

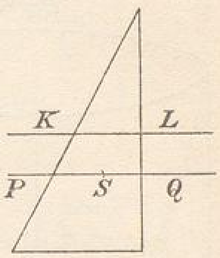
$$T = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}.$$

In Bezug auf DA ist es

$$\frac{bh^3}{12} + e^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}.$$

4) Auf das Dreieck ABD kommt in Bezug auf die Achse KL die Hälfte des ersteren Wertes, also $\frac{bh^3}{24}$. Verschiebt man aber die Achse zum Schwerpunkte des Dreiecks hin, so erhält man

Fig. 63.



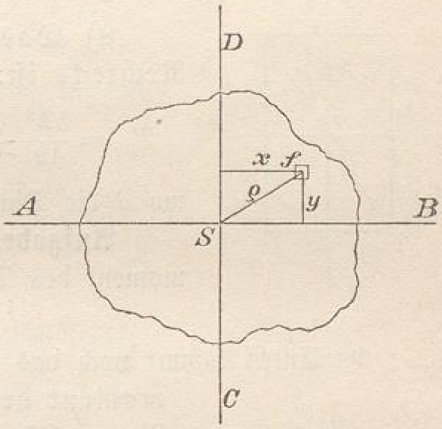
$$T = \frac{bh^3}{24} - e^2 F = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{h}{6}\right)^2 \frac{bh}{2} = 2\,\frac{bh^3}{72}$$
$$= \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}.$$

Da durch bloße Horizontalverschiebung der Wert von fz^2 nicht geändert wird, so gelten die obigen Resultate auch für schiefwinklige Parallelogramme und beliebig gestaltete Dreiecke.

5) In Figur 64 ist $x^2 + y^2 = \varrho^2$, für das Flächenteilchen f ist also $fx^2 + fy^2 = f\varrho^2$, folglich für sämtliche Flächenteilchen

$$\sum fx^2 + \sum fy^2 = \sum f\varrho^2.$$

Fig. 64.



Den Ausdruck $\sum f\varrho^2$ bezeichnet man als das polare Trägheitsmoment der Fläche im Gegensatz zum axialen, weil es auf einen Punkt oder Pol bezogen ist. Setzt man $\sum fx^2 = T_1$, $\sum fy^2 = T_2$, $\sum f\varrho^2 = T_p$, so gilt die Gleichung

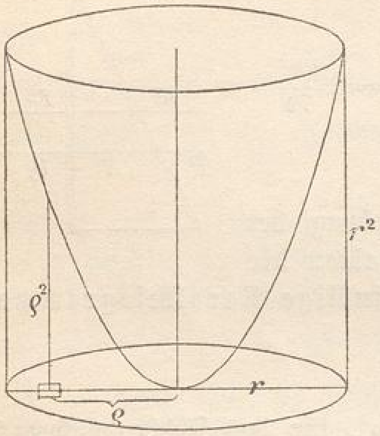
$$T_p = T_1 + T_2.$$

Also: Das polare Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf einen Punkt ist stets gleich der Summe zweier axialen Trägheitsmomente, deren Achsen auf einander senkrecht stehen und durch den Punkt gehen.

6) Auch das polare Trägheitsmoment einer Fläche läßt sich stereometrisch deuten, indem man über jedem Flächenteilchen f eine Säule von der Höhe ϱ^2 errichtet, wo ϱ der Abstand von jenem Pole ist. Der entstehende Körper bildet einen parabolischen Trichter, den Außenraum eines Rotationsparaboloids.

7) Am bequemsten ermittelt sich sein Wert für den Kreis. Da der Körper am Rande die Höhe r^2 erhält, wird der Inhalt des Cylinders $r^2\pi \cdot r^2 = r^4\pi$. Der Außenraum des Paraboloids wird nach Teil II, S. 264 die Hälfte davon oder $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich:

Fig. 65.



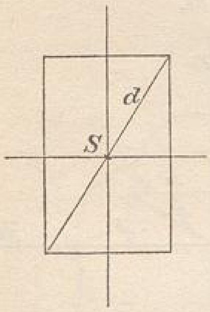
Das polare Trägheitsmoment eines Kreises ist für den Schwerpunkt als Pol:

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2} = F\frac{r^2}{2} = \frac{d^4\pi}{32} = F\frac{d^2}{8}.$$

Aus $T_1 + T_2 = T_p$ folgt, da für den Kreis die beiden axialen Momente gleich sind,

$$T_1 = T_2 = \frac{r^4\pi}{4} = F\frac{r^2}{4} = \frac{d^4\pi}{64} = F\frac{d^2}{16}.$$

Fig. 66.



8) **Das polare Trägheitsmoment des Rechtecks ist:**

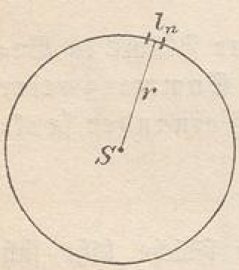
$$T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2) = \frac{F}{12}d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche ist.

Aufgabe. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment des Dreiecks?

9) Unten kommt noch das polare bezw. axiale Trägheitsmoment der Kreis**linie** zur Sprache. Jedes Bogenteilchen l_n hat von S die Entfernung r, also ist das polare Trägheitsmoment der Kreisperipherie

Fig. 67.



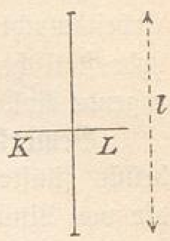
$$l_1 r^2 + l_2 r^2 + l_3 r^2 + \cdots = r^2(l_1 + l_2 + l_3 + \cdots)$$
$$= r^2(2r\pi) = 2r^3\pi.$$

Das axiale ist wieder halb so groß, also gleich $r^3\pi$.

10) Bei dem axialen Moment einer Geraden von der Länge l tritt in der Rechtecksformel $\frac{bh^3}{12}$ oder $\frac{Fh^2}{12}$ an Stelle von F die

Länge l, ebenso tritt l an Stelle von h, man erhält also $\frac{ll^2}{12} = \frac{l^3}{12}$. Dies ist zugleich das polare Trägheitsmoment der Geraden, da das Moment der Geraden in Bezug auf sich selbst als Achse gleich Null ist.

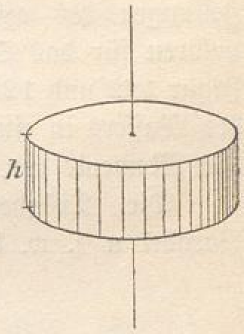
Fig. 68.



11) Über körperliche Trägheitsmomente sei nur Folgendes gesagt:

Das Trägheitsmoment einer cylindrischen Scheibe in Bezug auf die Hauptachse ergiebt sich aus dem polaren Trägheitsmomente des Kreises. Letzteres war $F\frac{r^2}{2}$, ersteres wird $J\frac{r^2}{2}$ oder $r^2\pi h\frac{r^2}{2} = \frac{r^4\pi h}{2}$, wenn J der Inhalt und h die Dicke ist.

Fig. 69.

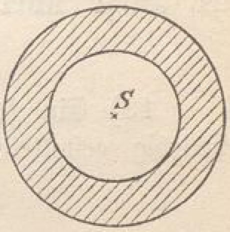


Für einen Kreisring ist das polare Trägheitsmoment

$$\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^{\,4}\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(r^4 - r_1^{\,4})$$

$$= \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^{\,2})(r^2 + r_1^{\,2}) = F\frac{r^2 + r_1^{\,2}}{2}.$$

Fig. 70.



Für einen körperlichen Schwungring von der Dicke h wird es

$$J\frac{r^2 + r_1^{\,2}}{2} = h\frac{(r^2 - r_1^{\,2})\,\pi\,(r^2 + r_1^{\,2})}{2}$$

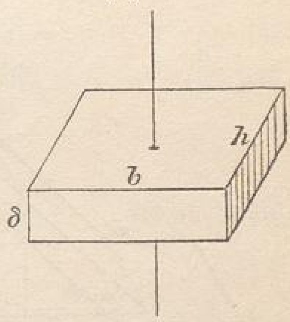
$$= \frac{\pi}{2}(r^4 - r_1^{\,4})\,h\,.$$

Für eine Rechtecksscheibe ist es (nach der Rechtecks-Formel $F\frac{d^2}{12}$)

$$T = J\frac{d^2}{12} = \delta\frac{bhd^2}{12},$$

wo δ die Dicke der Scheibe ist.

Fig. 71.



Für die Kugel und Halbkugel ist das Trägheitsmoment in Teil II, S. 230 bereits berechnet worden.

12) [In der Dynamik tritt die Masse m an Stelle von J. Für einen einfach gestalteten Schwungring ist also dort $T = m\frac{r^2 + r_1^{\,2}}{2}$. Die Arbeitswucht (lebendige Kraft, Energie) eines drehenden Körpers ist dort $T\frac{\vartheta^2}{2}$.

In der Lehre vom Pendel, vom Stoße, in der Lehre von der Arbeitswucht drehender Massen, auch bei gewissen stereometrischen und hydrostatischen Untersuchungen spielt das Trägheitsmoment eine hervorragende Rolle. Von besonderer Wichtigkeit ist es für die Festigkeitslehre.]

Bemerkungen. Die Trägheitsmomente von Körpern sind Ausdrücke fünfter Dimension, die von Flächen sind vierter Dimension, die von Linien sind dritter Dimension, die von Raumpunkten würden zweiter Dimension sein.

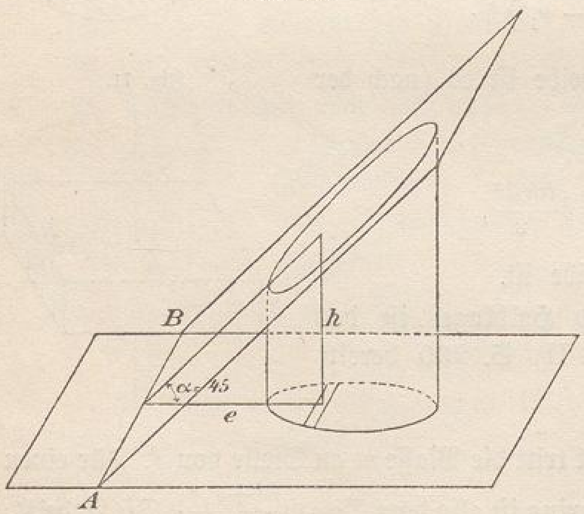
Ein interessante Übungsaufgabe bilden die stereometrischen Darstellungen des axialen Trägheitsmomentes für den Kreis und des polaren für das Quadrat. (Vergl. Einführung in das ster. Zeichnen. Figur 122 und 125.) Das letztere Moment stellt dann die Einstellung des Wassers in einem rotierenden Gefäße quadratischen Querschnitts in dem Momente dar, wo der sich bildende Trichter den Boden berührt. —

Die Trägheitsmomente regelmäßiger Vielecke, der Ellipse, Parabel u. s. w. bieten lehrreiche Übungsaufgaben.

II. Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper.

13) Ein senkrechtes Prisma oder ein senkrechter Cylinder von beliebig gestalteter Grundfläche werde durch eine unter 45° geneigte Ebene schräg abgeschnitten. Die letztere schneide die erweiterte Grundfläche in einer Geraden AB. Man teile die Grundfläche durch Parallele zu AB in zahlreiche schmale Streifen ein, dann ist die Höhe h über jedem Streifen gleich der Entfernung e von AB.

Fig. 72.



Sind $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ die Streifenflächen und $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ die zugehörigen Höhen, so ist der Körperinhalt, wenn man von den verschwindend kleinen Treppenräumen absieht,