Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

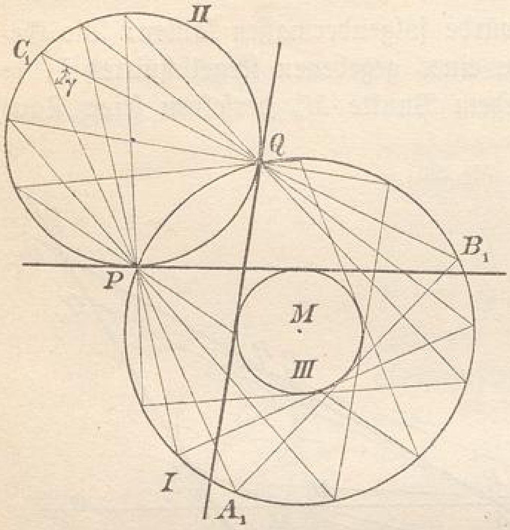
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Übungen aus der analytischen Geometrie

Strahlen nach P und Q, welche den Kreis I in A_n und B_n schneiden, so umhüllen, wie leicht zu zeigen ist, die Verbindungslinien $A_n B_n$ einen concentrischen Kreis, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird.

Fig. 37.



Durch Projektion erkennt man, daß dieselbe Operation bei Kegelschnitten, die sich in P und Q schneiden, auf die Umhüllung eines Kegelschnitts führt, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird. Auf diesen Tangenten befinden sich also projektivische Punktreihen.

Beispiele dieser Art lassen sich beliebig viele geben. Aus jedem ergiebt sich eine Methode zur mechanischen Herstellung von Kegelschnitten.

VII. Übungen aus der analytischen Geometrie.

42) Da bezüglich der Kegelschnitte die synthetische Geometrie der analytischen im allgemeinen überlegen ist, weil die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde von den Maßbeziehungen der Koordinatensysteme unabhängig sind, so sollen hier nur einige Übungen aus der Koordinatenlehre angestellt werden, die auf den Begriff des Krümmungskreises hinleiten, ein Gegenstand, der synthetisch weniger bequem behandelt werden kann.

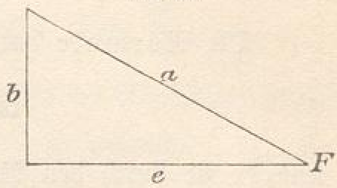
[Dabei sei bemerkt, daß für die Untersuchung von Kurven höherer Gerade die analytische Geometrie den Vorzug hat, mit Hülfe der Infinitesimalrechnung auch bedeutendere Schwierigkeiten zu überwinden, daß sie also durchaus nicht vernachlässigt werden darf.]

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse.

43) Für die Ellipse sei, wie früher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Brennweite. Der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ werde gleich ε^2 gesetzt, so daß

$\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{c}{a}$ ist. Man bezeichnet diesen Ausdruck als die numerische Excentricität der Ellipse. Sie bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen a und e in dem aus a, b und e gebildeten Dreiecke, oder den Sinus des Winkels zwischen a und b.

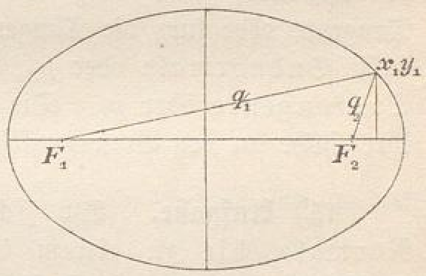
Fig. 38.



Aufgabe. Die Brennstrahlen q_1 und q_2 für einen Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus x_1 und ε zu berechnen.

Auflösung. $q_1^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + e^2 + 2x_1 e$ $= x_1^2 + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2) + (a^2 - b^2) + 2x_1\sqrt{a^2 - b^2}$. (Hier ist y_1^2 aus $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ berechnet worden.) Also

Fig. 39.



$$q_1^2 = x_1^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 + a^2$$
$$- b^2 + 2\frac{a x_1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= x_1^2\varepsilon^2 + a^2 + 2a\varepsilon x_1$$
$$= (\varepsilon x_1 + a)^2.$$

Ebenso ist $q_2^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$, also:

$$\boldsymbol{q_1 = (a + \varepsilon x_1); \quad q_2 = (a - \varepsilon x_1);}$$

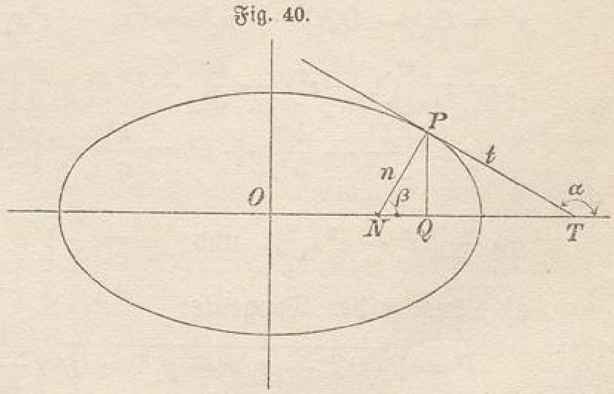
also auch

$$q_1 \cdot q_2 = a^2 - \varepsilon^2 x_1^2, \quad q_1 + q_2 = 2a, \quad q_1 - q_2 = 2\varepsilon x_1.$$

44) **Aufgabe.** Für einen Ellipsenpunkt P die Gleichung der Normale zu finden.

Auflösung. Nach Teil II (Kegelschnitte Nr. 39) war die Gleichung der Tangente in P, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten waren,

Fig. 40.



1) $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$,

oder

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}x + \frac{b^2}{y_1}$$
$$= Ax + B.$$

Also ist die Richtungskonstante für die Tangente

2) $$\tan\alpha = A = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Die **Normale** hat also eine Neigung β, die sich bestimmt aus

3) $$\tan\beta = -\frac{1}{A} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

und da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, ist ihre Gleichung

4) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

oder

5) $$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

Bemerkungen. In Fig. 40 nennt man $PN = n$ die Länge der Normale, oder kurz die Normale, $PT = t$ die Länge der Tangente oder kurz die Tangente. Die Projektion NQ der Normale heißt Subnormale oder p_n, die Projektion QT der Tangente heißt Subtangente oder p_t. Die Brennpunkt-Ordinate der Ellipse, d. h. ihre Höhe an den Brennpunktstellen, heißt halber Parameter, oder p.

45) **Aufgabe.** Wo schneiden die Tangente und die Normale, die zu einem Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ gehören, die X-Achse, und wie groß sind die soeben erklärten Stücke?

a) Tangentenschnitt T: Setzt man in Gleichung 1) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2}{x_1} = OT.$$

b) Normalenschnitt N: Setzt man in Gleichung 5) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = \varepsilon^2 x_1 = ON.$$

c) Länge n der Normale:

$$n^2 = (x_1 - ON)^2 + y_1{}^2 = (x_1 - \varepsilon^2 x_1)^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1{}^2\right)$$
$$= x_1{}^2\left[(1-\varepsilon^2)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = x_1{}^2\left[\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2$$
$$= x_1{}^2\left[\frac{b^4}{a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[x_1{}^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + a^2\right],$$

also

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - \varepsilon^2 x_1{}^2\right] \quad \text{und} \quad n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2} = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}.$$

d) Länge t der Tangente:

$$t^2 = \sqrt{(OT - x_1)^2 + y_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2 + y_1{}^2}. \quad \text{u. s. w.}$$

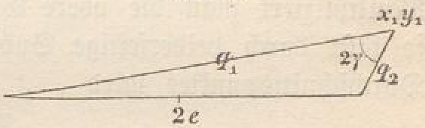
e) Ordinate p im Brennpunkte: Aus $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ folgt für $x = e$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \frac{b^4}{a^2}, \text{ also } p = \frac{b^2}{a}.$$

Durch Einsetzung des Halbparameters p wird die Scheitelgleichung der Ellipse auf die Form $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ gebracht. (Vergl. Teil II, Kegelschnitte Nr. 40.)

46) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse den Winkel 2γ zwischen den Brennstrahlen oder den Winkel γ zwischen Brennstrahl und Normale zu berechnen.

Fig. 41.



Auflösung. In Figur 41 ist $4e^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos 2\gamma$, folglich

$$\cos 2\gamma = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 4e^2}{2q_1 q_2}.$$

Logarithmisch besser ist aber die Formel für den Cosinus des halben Winkels (vergl. trigonometrische Formeltabelle in Teil II):

$$\cos^2\gamma = \frac{(q_1 + q_2 + 2e)(q_1 + q_2 - 2e)}{4q_1 q_2},$$

also, da $q_1 + q_2 = 2a$ ist,

$$\cos^2\gamma = \frac{(2a + 2e)(2a - 2e)}{4q_1 q_2} = \frac{a^2 - e^2}{q_1 q_2} = \frac{b^2}{q_1 q_2};$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}}.$$

Folgerung. Aus $n = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}$ und $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}}$ folgt

$$n\cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Folglich: Die Projektion der Normale n auf jeden der zugehörigen Brennstrahlen giebt den Halbparameter p.

Jetzt folgen einige Aufgaben, die auf den Krümmungsradius führen.

47) **Aufgabe.** Zwei benachbarte Punkte der Ellipse mögen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 haben. Wo schneidet ihre Verbindungslinie die X-Achse und wo schneiden sich die zu beiden Punkten gehörigen Normalen?

Auflösung. a) Schnitt der Tangente mit der Achse: Die Gleichung der Verbindungslinien läßt sich schreiben

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Setzt man $y = 0$, so folgt für den Schnitt die Entfernung

$$s = OT = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

b) Schnitt der Normalen: Ihre Gleichungen sind nach Obigem

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$
$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2.$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit x_2, die untere mit x_1, so fällt durch beiderseitige Subtraktion y weg, und die Abscisse des Durchschnittspunktes wird

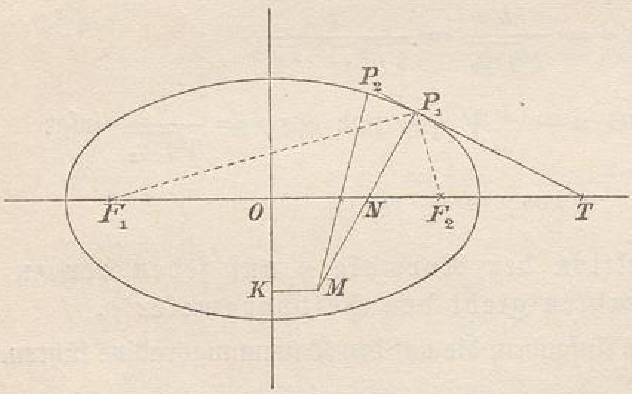
$$x = x_1 x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen ε und s einführt: Der Abstand des Schnittpunktes der Normalen von der Y-Achse ist also

$$KM = x = \frac{\varepsilon^2}{s} x_1 x_2.$$

48) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, wie groß der Abstand KM des berechneten Schnittpunktes von der Y-Achse wird, wenn P_2 unendlich nahe an P_1 rückt.

Fig. 42.



Auflösung. Es war

$$KM = \frac{\varepsilon^2 \cdot x_1 x_2}{s}.$$

Setzt man $x_1 = x_2$, so wird $x_1 x_2 = x_1^2$. Der obige Ausdruck

$$s = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

wird aber $\frac{x_1 y_1 - x_1 y_1}{y_1 - y_1}$, also von der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. (Nicht etwa $x_1 \frac{y_1 - y_1}{y_1 - y_1} = x_1$ zu setzen!) Rückt aber P_2 unendlich nahe an P_1, so geht die Verbindungslinie P_2P_1 in die Tangente über, und die Tangente in P_1 schneidet nach Aufgabe 45 a in der Entfernung $s = \frac{a^2}{x_1}$. Setzt man diesen brauchbaren Wert ein, so entsteht

$$6)\qquad KM = \frac{\varepsilon^2 x_1{}^2}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{\varepsilon^2 x_1{}^3}{a^2}.$$

Nun war aber nach Aufgabe 45 $ON = \varepsilon^2 x_1$, also ist

$$6^*)\qquad KM = \frac{x_1{}^2}{a^2} ON.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu konstruieren. Schreibt man nämlich

$$KM = \frac{\left(\frac{x_1}{a} ON\right) x_1}{a} = \frac{z \cdot x_1}{a},$$

so ist die Hülfsgröße $z = \frac{x_1}{a} ON$ aus der Proportion

$$x_1 : a = z : ON$$

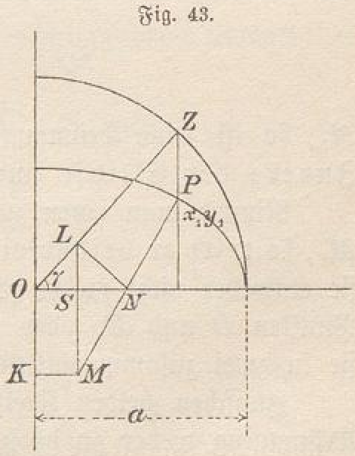
als vierte Proportionale zu konstruieren, sodann $KM = \frac{z \cdot x_1}{a}$ als vierte Proportionale aus der Proportion

$$a : x_1 = z : KM.$$

Bemerkung. Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt die genaue Richtung der Normale. Zieht man eine Parallele zur Y-Achse in dem konstruierten Abstande KM, so findet man den Punkt M. Dieser Punkt ist von außerordentlicher Bedeutung als Krümmungsmittelpunkt der Kurve für die Stelle x_1y_1.

Vorläufig genüge neben der soeben gezeigten Konstruktion die in Folgendem erläuterte.

Fig. 43.



In Figur 43 ist neben der Ellipse der mit der Halbachse a um O geschlagene Kreis gezeichnet und der Punkt Z desselben markiert, der senkrecht über P liegt. Für diesen Punkt ist $\frac{x_1}{a} = \cos\gamma$. Folglich ist jetzt

$$KM = \frac{x_1{}^2}{a^2} \cdot ON = ON \cos^2\gamma$$
$$= [ON \cos\gamma] \cdot \cos\gamma,$$

so daß es sich um eine zweimalige Projektion von ON mit Hülfe des Winkels γ handelt.

In der Figur ist NL das Lot auf OZ, also $OL = ON \cdot \cos\gamma$. Ferner ist

$$LS \perp ON, \quad \text{folglich} \quad OS = OL \cos\gamma = ON \cos^2\gamma = KM.$$

Die vorläufige Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Punkte $x_1 y_1$ ist also folgende:

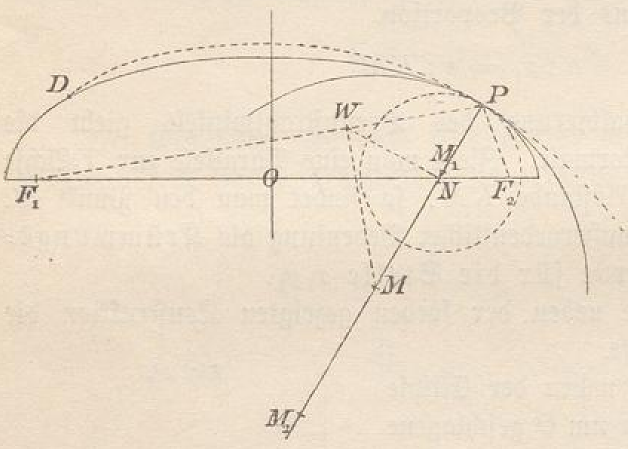
Durch Halbierung des Brennstrahlwinkels bei P findet man die Normale PN. Die Senkrechte durch P giebt den Hülfskreispunkt Z. Das Lot von N auf OZ giebt den Punkt L; die Senkrechte durch L schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte M.

Schlägt man um M mit MP einen Kreis, so fällt dieser Kreis für eine weit größere Strecke mit der Ellipse zusammen, als jeder andere. Er heißt der Krümmungskreis der Ellipse für die Stelle P.

b) Krümmungsradius der Ellipse.

49) Benachbarte Radien eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkte. Die Normale im Punkte P der Ellipse wird von den Normalen der Nachbarpunkte in verschiedenen Punkten geschnitten. Rücken die Nachbarpunkte unendlich nahe an P, so rückt der Schnittpunkt in das vorher konstruierte M, womit der kleinste Grenzwert für die Entfernung des Schnittes von P gefunden wird.

Fig. 44.



Nimmt man einen kleineren Berührungskreis der Stelle P, z. B. den Kreis M_1, so ist seine Krümmung zu groß. Er tritt beiderseits ins Innere der Ellipse und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemein.

Nimmt man einen zu großen Berührungskreis, z. B. den Kreis M_2, so tritt er beiderseits aus der Ellipse heraus. Er schneidet sie entweder nicht mehr, oder er schneidet sie noch in zwei getrennten Punkten D und E, oder er berührt sie noch einmal (d. h. er trifft sie in zwei zusammenfallenden Punkten D und E).

Zwischen beiden Kreisen liegt nun der Krümmungskreis, dessen Krümmung weder zu groß, noch zu klein ist. Er verhält sich in ganz anderer Weise. Weil die Krümmung der Ellipse von P aus nach links abnimmt, tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach links in die Ellipse hinein. Weil die Krümmung von P aus nach rechts zunimmt, so tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach rechts aus der Ellipse heraus. Es tritt also der merkwürdige Fall ein, daß der Krümmungskreis in P sowohl schneidet als auch berührt.

Dieses scheinbare Paradoxon klärt sich auf, wenn man den Krümmungsradius allmählich von M_2P auf MP abnehmen läßt. Anfangs hat man dann die Berührung in P (zwei Schnittpunkte bedeutend) und die Schnittpunkte D und E. Beim Kleinerwerden des Krümmungsradius rückt D an P heran und fällt schließlich mit P zusammen. Jetzt hat der Krümmungsradius mit der Kurve in P drei zusammenfallende Punkte gemein, und nur ein einziger abgetrennter Schnittpunkt E bleibt übrig, was bei keinem andern der Berührungskreise der Fall ist.

Für die Endpunkte der Hauptachsen ist die Betrachtung etwas zu verändern. Es zeigt sich, daß der Krümmungsmittelpunkt dort sogar vier Punkte mit der Kurve gemein hat, da nicht nur D, sondern der Symmetrie halber auch E mit P zusammenfällt.

50) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle P zu berechnen.

Auflösung. Seine Koordinaten seien x und y, die von P seien x_1 und y_1, dann ist nach Pythagoras

a) $$\varrho^2 = \overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 .$$

Nun war die Gleichung der Normale (Aufgabe 44, Gleichung 5)

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 x - (a^2 - b^2) x_1 y_1 .$$

Setzt man hier $x = KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ (nach Gleichung 6 in Aufgabe 48) ein, so erhält man als Gleichung zur Berechnung der Ordinate des Punktes M

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 \cdot \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} - (a^2 - b^2) x_1 y_1 ,$$

also ist (vgl. Fig. 43)

$$SM = y = \frac{\varepsilon^2 x_1^2 y_1}{b^2} - \frac{(a^2 - b^2) y_1}{b^2} = \frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2}(a^2 - x_1^2) .$$

Nach der Ellipsengleichung ist aber $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, also $x_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2$. Dies, in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2} \frac{a^2}{b^2} y_1^2 = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} = SM .$$

Setzt man in Gleichung a) die Werte $x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ und $y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^2}$ ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung von ϱ^2. In dieser setze man $b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2$ für y_1^2, und so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(q_1 q_2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nun war aber $q_1 q_2 \frac{b^2}{a^2} = n^2$, also $q_1 q_2 = \frac{a^2 n^2}{b^2}$. Einsetzung giebt

$$\varrho^2 = \frac{n^6 a^4}{b^8} \text{ und } \varrho = \frac{n^3 a^2}{b^4}$$

oder, da $\frac{b^2}{a} = p$ war:

b) $$\varrho = \frac{n^3}{p^2}.$$

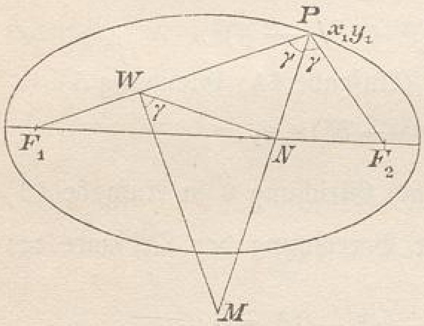
Da außerdem $p = n \cos\gamma$ war, so folgt noch

c) $$\varrho = \frac{n}{\cos^2\gamma}.$$

Demnach muß sich ϱ mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke einfach konstruieren lassen.

51) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren.

Fig. 45.



Auflösung. Halbiere den Winkel der Brennstrahlen, errichte auf der Normalen im Schnittpunkte N (der Normale und X-Achse) ein Lot NW bis zu dem einen der Brennstrahlen, errichte in W auf dem Brennstrahl ein Lot bis zum Schnitte M mit der Normale, dann ist M der Krümmungsmittelpunkt.

Denn $PW = \frac{n}{\cos\gamma}$, folglich $MP = \frac{PW}{\cos\gamma} = \frac{n}{\cos^2\gamma} = \varrho$.

Für den höchsten Punkt P_1 ist $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle FP_1O$, folglich fällt W mit F_1 zusammen, und das Lot WM auf WP_1 giebt den Krümmungsmittelpunkt M. In diesem Falle ist

$$\varrho = \frac{b}{\cos^2\gamma} = \frac{b}{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{b}.$$

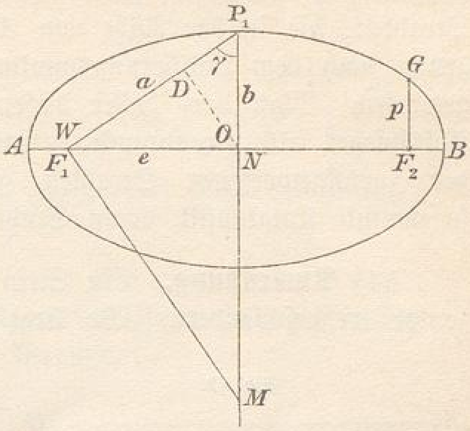
Für den Endpunkt B der langen Achse ist $\gamma = 0$, also

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos^2 0} = \frac{p}{1} = p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. gleich dem Lote F_2G im Brennpunkte. Sind nur a und b gegeben, so findet man ϱ_1 bequem als Projektion DP_1 von b auf F_1P_1, denn

$$DP_1 = b\cos\gamma = b\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = \varrho_1.$$

Fig. 46.



Diese beiden besonderen Radien werden häufig zur angenäherten Verzeichnung der Ellipse benutzt.

c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel.

52) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt der Parabel zu konstruieren.

Auflösung. Man halbiere den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und der Parallelen zur Achse. Dies giebt die Normale PN. Lot auf PN in N giebt Schnittpunkt W mit dem Brennstrahle. Lot auf PW in W giebt M auf der Normale. (Ebenso könnte W_1 benutzt werden.)

Der Krümmungsradius für den Scheitel ist wieder $p = FG = 2AF$.

Fig. 47.

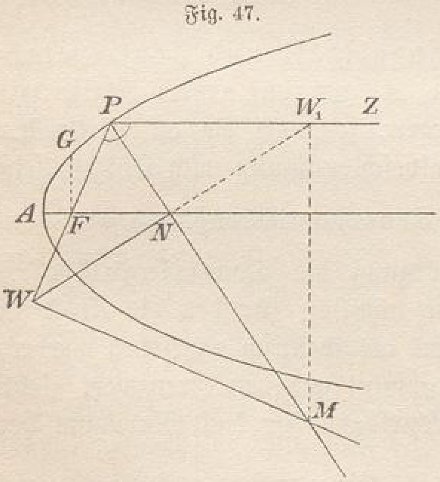
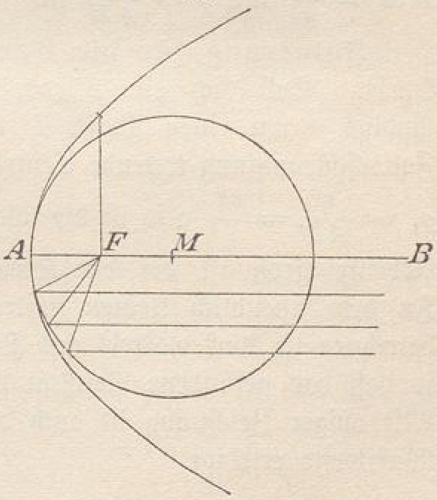


Fig. 48.

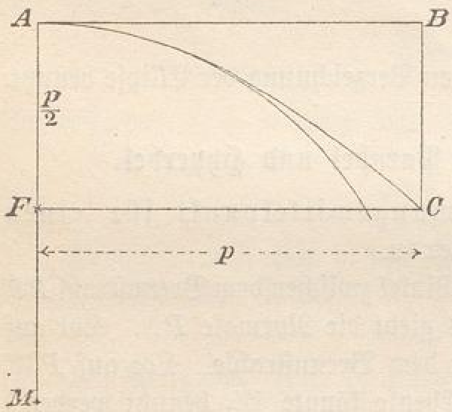


53) **Anwendung.** Statt des parabolischen Hohlspiegels wird häufig der sphärische Hohlspiegel genommen, der in der Nähe des

Scheitels A mit dem parabolischen übereinstimmt. Daher werden Strahlen, die in der Nähe von AB parallel zu AB einfallen, fast genau nach dem Halbierungspunkte von AM, d. h. nach F, zurückgeworfen. Man darf daher diesen Punkt auch bei dem sphärischen Hohlspiegel als Brennpunkt betrachten. (Die genaue Konstruktion der zurückgeworfenen Strahlen giebt eine Umhüllungskurve, die sogenannte Katakaustik, deren Spitze mit F zusammenfällt.)

54) **Anwendung.** Ein Stein werde mit Geschwindigkeit v horizontal weggeschleudert. Wo liegt der Brennpunkt F der Parabel, die er beschreibt?

Fig. 49.



Auflösung. Ist $FA = \frac{1}{2} FC$, so ist FC der Halbparameter p und $FA = \frac{p}{2}$. Nach welcher Zeit wird also C erreicht?

Es ist $AB = v \cdot t$, $BC = \frac{1}{2} g t^2$, also $\frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} v t$ und daher $t_1 = \frac{v}{g}$. Folglich $BC = AF = \frac{1}{2} g t_1{}^2 = \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$. Dies ist die Tiefe des Brennpunktes unter A. Der Krümmungsmittelpunkt liegt doppelt so tief, so daß $AM = \frac{v^2}{g}$ und $g = \frac{v^2}{AM}$ ist.

Folgerung für die Centrifugalkraft und Centripetalkraft. Soll sich ein Körper von A aus auf einem Kreise mit Radius r um einen Punkt F bewegen, so muß die an Stelle der Fallbeschleunigung tretende Centripetalbeschleunigung nach Obigem sein $g_1 = \frac{v^2}{AM} = \frac{v^2}{r}$, also ist die nötige Centripetalkraft $m g_1 = \frac{m v^2}{r}$. (Ebenso groß ist bei der Kreisbewegung die Centrifugalkraft.) In dem unendlich kleinen Zeitraume nämlich, für den die Kraft zu berechnen ist, dürfen Kreis und Parabel als identisch angesehen werden, so daß das gefundene Resultat den absolut genauen Grenzwert giebt. Mit obiger Zeichnung ist auch die Wurfbahn für das Maximum der Wurfweite erledigt.

55) **Aufgabe.** Den Krümmungsradius der Hyperbel zu berechnen. Die Auflösung geschieht durch entsprechende Berechnungen, wie bei der Ellipse. Die Brennstrahlen werden $q_1 = \varepsilon x + a$ und

$q_2 = \varepsilon x - a$, wo $\varepsilon = \frac{\xi}{a}$ und $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ ist $(q_1 - q_2 = 2a)$.

Die Normale wird bestimmt aus $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^{\,2} - a^2) = \frac{b^2}{a^2} q_1 q_2$, der Krümmungsradius aus $\varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^{\,2} - a^2)^3}{a^2 b^2} = \left(\frac{n^3}{p^2}\right)^2$ als $\varrho = \frac{n^3}{p^2}$.

Die für Ellipse und Parabel angegebenen Konstruktionen gelten daher auch hier.

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.

56) Die allgemeine Form ist

$$1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder

$$y^2 + 2y\frac{bx + e}{c} = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{c},$$

so daß

$$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(bx + e)^2 - (ax^2 + 2dx + f)c},$$

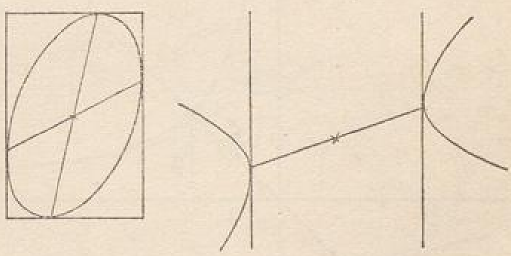
oder

$$2) \; y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2x(be - dc) + (e^2 - fc)}.$$

Ganz ebenso wird x berechnet.

Der Nachweis, daß die Gleichung stets einen Kegelschnitt darstellt, ist etwas langwierig. Eine Andeutung über den einzuschlagenden Gang möge hier genügen. Der Ausdruck unter der Wurzel wird im allgemeinen für zwei Werte (von x) gleich Null. Ausnahmefälle mögen vorläufig unbeachtet bleiben. An diesen Stellen findet man nach Teil II (Anhang) entweder ein Maximum oder ein Minimum (worüber durch Einsetzen von Nachbarwerten entschieden werden kann). Das Entsprechende gilt für das aus Gleichung 1) berechnete x.

Fig. 50.



Man verbinde zwei zusammengehörige Minimal- bezw. Maximalpunkte und verschiebe den Anfang des Koordinatensystems nach dem Halbierungspunkte dieser Strecke. An der Form der neuen Gleichung erkennt man stets, daß jede durch den neuen Koordinatenanfang gelegte Sehne halbiert ist, wenn sie die Kurve überhaupt trifft. — Man hat also den Mittelpunkt der Kurve nachgewiesen.

Jetzt suche man (gegebenenfalls auch mit Hülfe von Polarkoordinaten) die kleinsten Entfernungen vom Mittelpunkte. In die entsprechende Richtung dreht man die Y-Achse eines neuen Koordinatensystems. Jetzt läßt sich die Gleichung stets auf die Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ bringen, stellt also eine Ellipse oder Hyperbel dar.

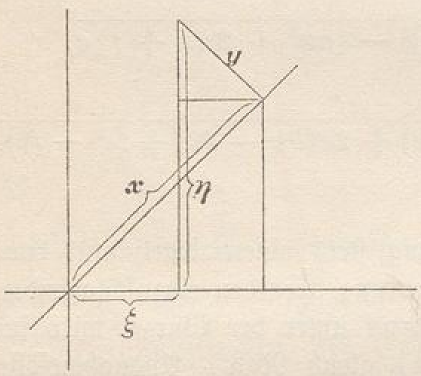
Wird aber der Ausdruck unter der Wurzel nur für einen einzigen endlichen Wert gleich Null, so kann es sich im allgemeinen nur um eine Parabel handeln. Mit Hülfe der Halbierungspunkte paralleler Sehnen erhält man die Achsenrichtung, den Scheitel und die Scheitelgleichung.

Läßt sich die Gleichung in ein Produkt von der Form

$$(ax + by + c)(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

zerlegen, so stellt sie zwei gerade Linien dar, deren Gleichungen in der letzten enthalten sind.

Fig. 51.



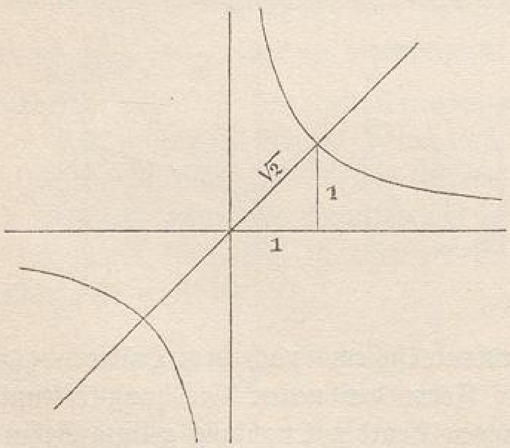
Verschiebungen des Koordinatensystems kamen schon in Teil II zur Sprache. Um auch einen Begriff von der **Drehung des Koordinatensystems** zu erhalten, drehe man beispielsweise das Koordinatensystem um 45^0.

Zwischen den Koordinaten ξ, η und x, y bestehen dann die Beziehungen

$$\eta = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\xi = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Fig. 52.



So geht z. B. die Gleichung der „Mariotteschen Kurve" $\eta = \frac{1}{\xi}$ (vgl. Teil II, Geom. Nr. 105) über in

$$x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}},$$

oder in

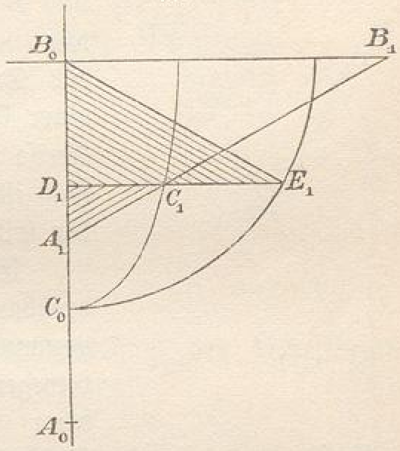
$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

so daß es sich um die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ handelt, d. h. um eine gleichseitige Hyperbel.

e) Der Ellipsenzirkel oder das Ovalwerk des Leonardo da Vinci.

57) **Aufgabe.** Die Endpunkte einer gegebenen Geraden AB werden gezwungen, sich in zwei aufeinander senkrechten Geraden zu bewegen. Was für einen Weg legt jeder Punkt der Geraden und ihrer Verlängerung zurück?

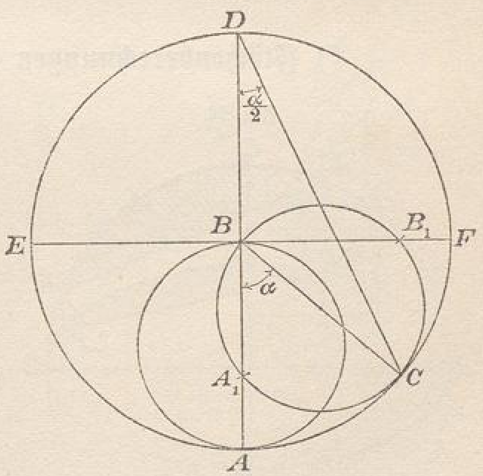
Fig. 53.



Auflösung.*) A_0B_0 sei die Gerade, C_0 der zu untersuchende Punkt der Geraden. $A_1C_1B_1$ sei eine zweite Lage.

Man schlage mit B_0C_0 einen Kreis und lege durch C_1 die Gerade $D_1E_1 \perp A_0B_0$. Dann ist $C_1B_1 = B_0E_1$, folglich $\sphericalangle B_1C_1E_1 = \sphericalangle B_0E_1C_1$, folglich $\triangle A_1D_1C_1 \sim B_0D_1E_1$, folglich $D_1C_1 : D_1E_1 = A_1C_1 : E_1B_0 = A_0C_0 : C_0B_0$. Letzteres ist aber das konstante Teilungsverhältnis der bewegten Geraden. In jeder Lage wird also die horizontale Sehne des Hülfskreises in diesem konstanten Verhältnis geteilt, d. h. der Weg von C ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, wo a und b die Teile der Geraden sind. Der Halbierungspunkt bewegt sich auf einem Kreise.

Fig. 54.



Ganz entsprechend wird der Beweis für Punkte auf der Verlängerung der Geraden geführt.

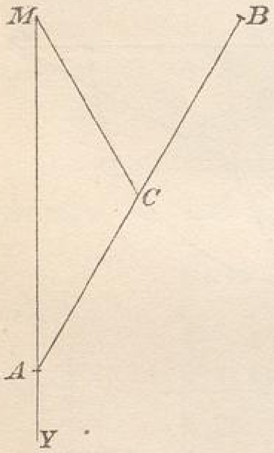
Bemerkung. In einem Kreise befinde sich ein Berührungskreis von halb so großem Radius in zwei verschiedenen Lagen. Der Berührungspunkt werde jedesmal

---

*) Der Schüler versuche die Aufgabe auch mit Hülfe der Koordinaten zu lösen.

mit dem Centrum B verbunden. Schneidet AB den zweiten Kreis in A, so ist Bogen $\widehat{AC} = \widehat{A_1C}$, denn zum Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ im großen Kreise gehört derselbe Bogen, wie zum Peripheriewinkel α im kleinen Kreise. Rollt also der kleine Kreis im großen, ohne zu gleiten (so daß also der Weg $\widehat{AC}$ stets gleich dem abgewickelten Bogen $\widehat{A_1C}$ ist), so bewegt sich der Punkt A auf dem Durchmesser AD und ebenso B auf dem Durchmesser EF. Für A und B ist also der Bewegungszwang derselbe, wie in der vorigen Aufgabe. Jeder Punkt des Durchmessers AB bewegt sich also auf einer Ellipse, nur der Mittelpunkt auf einem Kreise und die Endpunkte auf Geraden. Demnach ist noch ein dritter Mechanismus möglich, der Ellipsen hervorbringt.

Fig. 55.

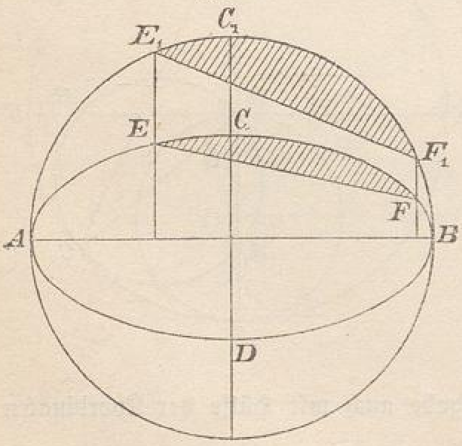


Es sei $MC = AC = BC$; MC sei drehbar um M, C sei ein Gelenk, A werde gezwungen, sich in der Geraden MY zu bewegen, dann bewegt sich B geradlinig, denn stets ist $\sphericalangle AMB = 90^0$. Jeder Punkt der Geraden AB bewegt sich in einer Ellipse.

Der erste Mechanismus heißt Ellipsenzirkel, der zweite Planetenrad, der dritte Ellipsenlenker. Bekannt sind sie auch unter dem Namen Ovalwerk.

f) Flächenberechnungen an den Kegelschnitten.

Fig. 56.



58) Berechnung von Ellipsensegmenten.

Soll das Ellipsensegment EFC berechnet werden, so bilde man das zugehörige Kreissegment und berechne dieses. Ist F seine Fläche, so ist die des Ellipsensegments nach dem Satze über die gesetzmäßige Verkürzung der Lote und senkrechten Flächenstreifen

$$F_1 = F \cdot \frac{b}{a}.$$

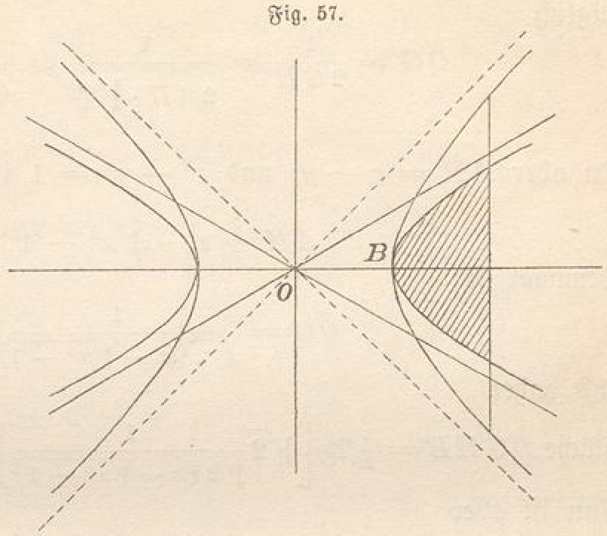
59) Berechnung von Hyperbelsegmenten.

Die Hyperbel ist leicht auf eine gleichseitige zu reducieren. Dann findet Entsprechendes, wie vorher bei Ellipse und Kreis statt. Es wird

$$F_1 = F\frac{b}{a}.$$

Demnach ist es nur nötig, die Segmentberechnung an der gleichseitigen Hyperbel zu üben.

Fig. 57.

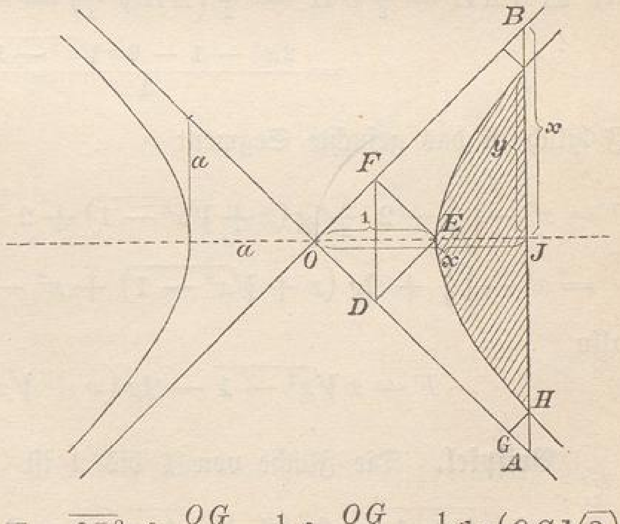


Unten, in der algebraischen Analysis, wird gezeigt, daß dabei der natürliche Logarithmus gebraucht wird. Nach Durchnahme des betreffenden Abschnitts kann folgendes Beispiel gelöst werden:

60) **Aufgabe.** Das symmetrische Segment der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu berechnen, welches zum Abstande $OJ = x$ gehört.

Auflösung. 1) Segment $= \triangle OAB - [\square ODEF + 2 \cdot DGHE + 2 \triangle GAH]$.

Fig. 58.



$OJ = JB = x$,

also

2) $\triangle OAB = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2$.

$OE = 1$,

folglich

3) $\square ODEF = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Dies ist der Inhalt des konstanten Rechtecks.

Diagrammfläche $DGHE = \overline{OD}^2 \cdot {}^e\lg\frac{OG}{OD} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg\frac{OG}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg\left(OG\sqrt{2}\right)$.

Es ist aber

$$OG \cdot GH = \square\, ODEF = \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$OG = \frac{1}{2\,GH} = \frac{1}{2\,AH \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{AH \cdot \sqrt{2}}.$$

Da aber $AH = x - y$, und $x^2 - y^2 = 1$ ist, so folgt

$$AH = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Demnach ist

$$OG = \frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})},$$

und daher

$$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^e\!\lg\left[\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})}\right] = \tfrac{1}{2}\,{}^e\!\lg\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 1},$$

also folgt:

4) $$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^e\!\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Endlich ist

5) $$\triangle\, GAH = \tfrac{1}{2}\,GH^2 = \tfrac{1}{2}\left(AH\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \frac{AH^2}{4} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{4}$$

$$= \frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}.$$

Folglich ist das gesuchte Segment

$$F = x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,{}^e\!\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + 2\,\frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}\right]$$

$$= x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + {}^e\!\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + x^2 - \tfrac{1}{2} - x\sqrt{x^2 - 1}\right],$$

also

$$F = x\sqrt{x^2 - 1} - {}^e\!\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Beispiel. Die Fläche von 1 bis 2 ist

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2\sqrt{4 - 1} - {}^e\!\lg\left(2 + \sqrt{4 - 1}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{{}^{10}\!\lg\left(2 + \sqrt{3}\right)}{0{,}43429}$$

$$= 2{,}1472.$$

61) **Bemerkung.** Zeichnet man die Figur in a-fachem Maßstabe, so lautet die Gleichung der Kurve $x^2 - y^2 = a^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Dabei wird $O_1E_1 = a$, $O_1J_1 = ax$. Die Fläche von a bis ax erhält den a^2-fachen Inhalt, wie vorher, also ist

$$\overset{ax}{\underset{a}{F}} = a^2\left[x\sqrt{x^2-1} - {}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right].$$

Setzt man $ax = x_1$, also $x = \frac{x_1}{a}$, so folgt

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = a^2\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1} - {}^e\lg\left(\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1}\right)\right]$$

$$= x_1\sqrt{x_1^{\,2} - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x_1 + \sqrt{x_1^{\,2} - a^2}}{a}.$$

Bei der allgemeinen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Segmentfläche das $\frac{b}{a}$-fache der vorigen, also:

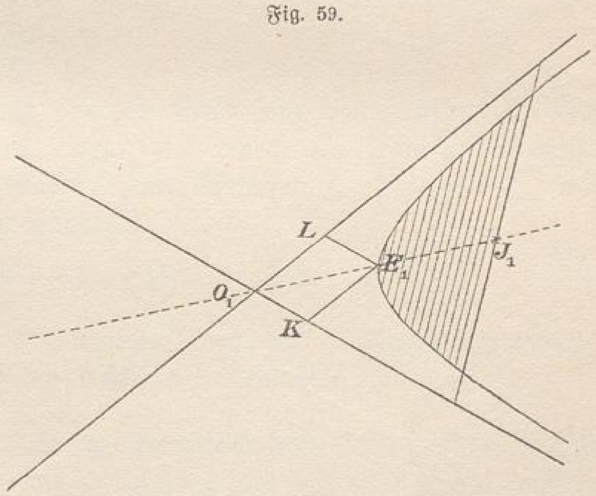
$$\overset{x}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right].$$

Dieselben Resultate liefert die selbständige Berechnung.

Bei schräg begrenzten Segmenten ist folgendes zu beachten.

Ist für die neue und die alte Figur J bezw. J_1 Halbierungspunkt der Sehne, und ist ferner $O_1E_1 : O_1J_1 = OE : OE$, so verhalten sich aus Gründen der Parallelprojektion die Segmente wie die konstanten Asymptotenparallelogramme. Denkt man sich also über $OJ_1 = z_1$ und $OE_1 = e_1$ eine gleichseitige Hyperbel, so ist für diese

Fig. 59.



$$\overset{z_1}{\underset{e_1}{F}} = z_1\sqrt{z_1^{\,2} - e_1^{\,2}} - e_1^{\,2}\,{}^e\lg\frac{z_1 + \sqrt{z_1^{\,2} - e_1^{\,2}}}{e_1}.$$

Für die letztere ist das konstante Rechteck gleich $\frac{z_1^2}{2}$, für die vorliegende aber das konstante Parallelogramm gleich $O_1 K E_1 L_1$ oder, wenn die Gleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, konstantes Parallelogramm gleich $\frac{ab}{2}$. Das Verkleinerungsverhältnis entsprechender Flächen ist also $\frac{z_1^2}{2} : \frac{ab}{2}$ oder $z_1^2 : ab$, folglich ist die schräge Segmentfläche

$$\overset{J_1}{\underset{E_1}{F}} = \frac{ab}{z_1^2}\left[z_1 \sqrt{z_1^2 - e^2} - e_1^2 \, {}^e\!\lg \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - e_1^2}}{e_1}\right].$$

Die Parabelsegmente waren schon in Teil II berechnet worden.

Jetzt ist man imstande, zahlreiche von Geraden und Kegelschnitten begrenzte Flächen, z. B. auch Sektoren und Flächenstücke, die zwischen zwei Sehnen liegen, zu berechnen.