Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

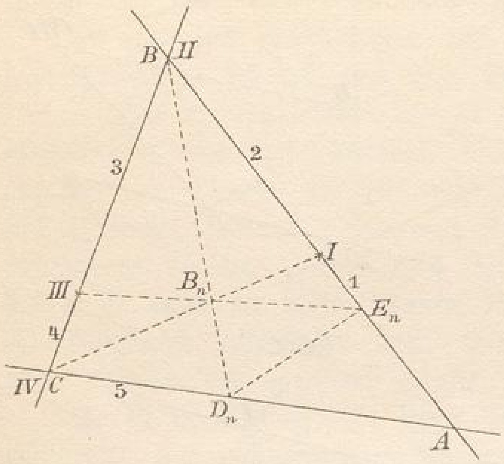
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

II. Folgerungen für Centralperspektive, Schließungsprobleme u. dergl.

10) **Aufgabe.** Den durch drei Tangenten und zwei Berührungspunkte bestimmten Kegelschnitt zu konstruieren.

Fig. 9.

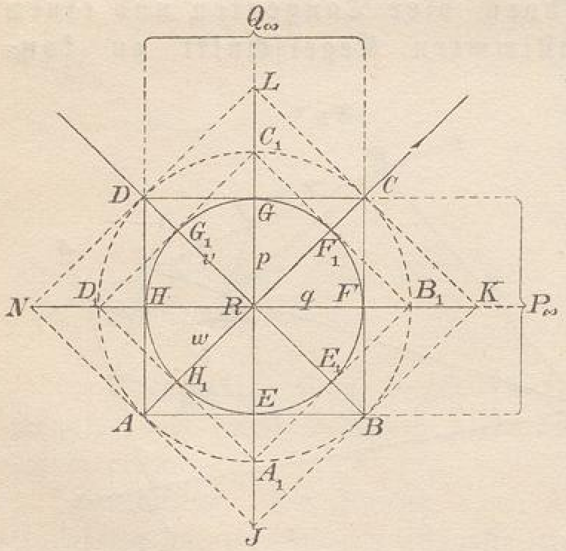


Auflösung. ABC sei das gegebene Dreiseit, I und III die gegebenen Berührungspunkte. Man betrachte AB als in I gebrochene Gerade 1, 2, BC als in III gebrochene Gerade 3, 4, B und C als die Punkte II und IV. Auf I IV nehme man willkürlich den Brianchon-Punkt B_n an. Dann giebt BB_n den Punkt D_n auf 5 und IIIB_n giebt E_n auf 1. D_nE_n ist eine der Tangenten des Kegelschnitts. Solche kann man unendlich viele konstruieren.

II. Folgerungen für Centralperspektive, Schließungsprobleme und dergleichen.

11) Das Quadrat und sein einbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

Fig. 10.



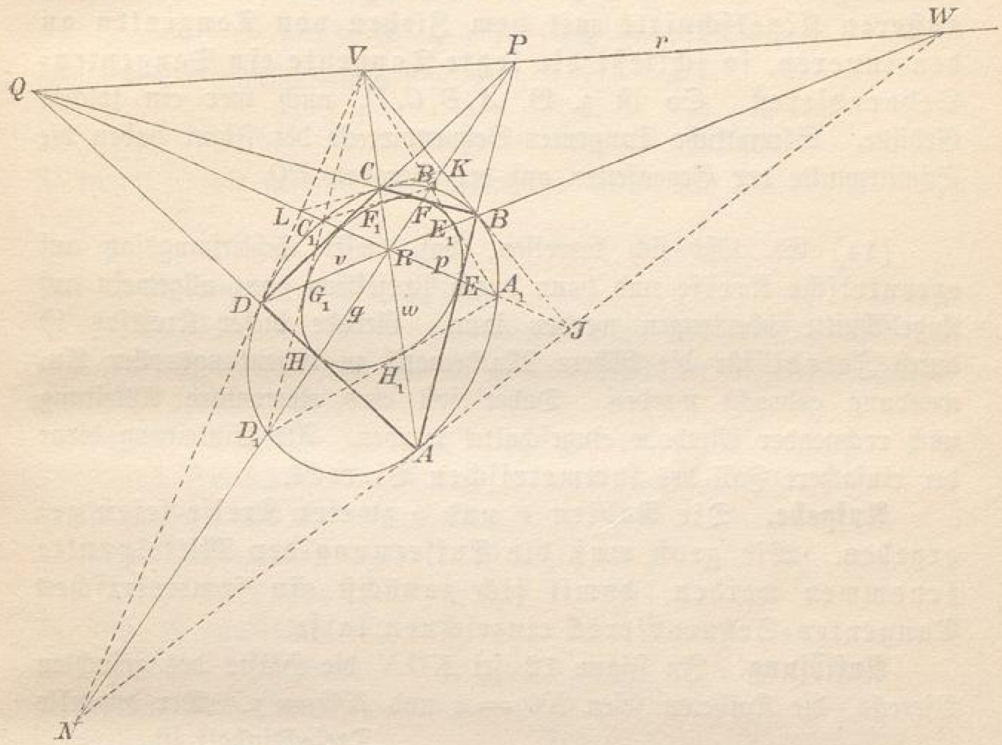
Durch Centralprojektion geht das Quadrat $ABCD$ (in Figur 10) in ein allgemeines Viereck $ABCD$ (Figur 11) über, dessen Gegenseiten sich in Punkten P und Q schneiden.

In beiden Figuren schneiden sich die Diagonalen in R.

PR in Figur 11 giebt die Berührungspunkte F und H, QR die Berührungspunkte E und G eines dem Viereck einbeschriebenen Kegelschnitts, der dem einbeschriebenen Kreise entspricht.

Man kennt also 4 Tangenten und 4 Berührungspunkte desselben, d. h. 8 Stücke, von denen 5 zur Konstruktion mit dem Lineal

Fig. 11.



allein ausreichen. — Die Gerade PQ mit den harmonischen Punkten $PQVW$ entspricht dem unendlichen Bereiche der Ebene von Figur 10. Man vergleiche in beiden Figuren die harmonischen Strahlen und Punkte.

12) Das Quadrat und sein umbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

In Figur 10 sind die Tangenten in A und C parallel zu v, die in B und D berührenden parallel zu w. Sie bilden ein umbeschriebenes Quadrat, dessen Ecken auf p und q liegen. Folglich: In Figur 11 sind WA und WC, VB und VD die Tangenten des perspektivisch dargestellten Kreises durch A, B, C und D. Auch hier schneiden sie sich auf p und q. Man hat also 4 Tangenten und ihre 4 Berührungspunkte zur Konstruktion des Kegelschnitts mit dem Lineal allein, während 5 von diesen Stücken ausreichen.

13) Das entsprechende Schließungsproblem.

Beginnt man in Figur 10 in einem beliebigen Punkte des größeren Kreises mit dem Ziehen von Tangenten, so schließt das Tangenten-Sehnen-Quadrat stets. So ist z. B. $B_1 C_1 D_1 E_1$ ein solches Quadrat. Folglich:

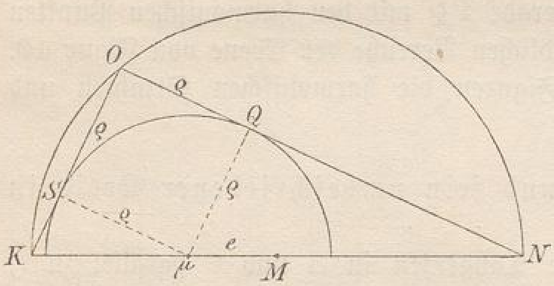
Beginnt man in Figur 11 an irgend einer Stelle des äußeren Kegelschnitts mit dem Ziehen von Tangenten an den inneren, so schließt die letzte Tangente ein Tangenten-Sehnenviereck. So ist z. B. $A_1 B_1 C_1 D_1$ auch hier ein solches Gebilde. Sämmtliche Tangenten-Sehnenvierecke der Figur haben die Schnittpunkte der Gegenseiten auf der Geraden PQ.

[14) Es läßt sich beweisen, daß dieser Schließungssatz auf excentrische Kreise und dann durch Projektion ganz allgemein auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Gerade dieser Kreissatz ist durch Jacobi für die höhere Mathematik zu bedeutungsvoller Anwendung gebracht worden. Daher soll eine elementare Ableitung nach rechnender Methode eingeschaltet werden. Als Einleitung diene der einfachere Fall des symmetrischen Vierecks.

Aufgabe. Die Radien r und ϱ zweier Kreise seien gegegeben. Wie groß muß die Entfernung der Mittelpunkte genommen werden, damit sich zunächst ein symmetrisches Tangenten-Sehnenviereck einzeichnen lasse.

Auflösung. In Figur 12 sei KON die Hälfte des gesuchten Vierecks, die Katheten seien $NO = x$ und $KO = y$. Der doppelte Dreiecksinhalt ist.

Fig. 12.



1) $xy = \varrho(x + y)$,

außerdem ist

2) $x^2 + y^2 = 4r^2$.

Aus beiden Gleichungen läßt sich folgende bilden:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

oder

$$(x + y)^2 = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

woraus folgt

3) $$x + y = \varrho \pm \sqrt{4r^2 + \varrho^2}.$$

Das negative Zeichen, bei dem es sich um ein Problem der äußeren Berührung (An-Kreis) handelt, soll jetzt nicht berücksichtigt werden.

Statt x und y zu berechnen, setze man $M\mu = e$ und bilde die pythagoreischen Gleichungen

$$K\mu^2 = (r - e)^2 = (y - \varrho)^2 + \varrho^2 = y^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho y,$$
$$N\mu^2 = (r + e)^2 = (x - \varrho)^2 + \varrho^2 = x^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho x.$$

Durch Addition folgt

$$2r^2 + 2e^2 = (x^2 + y^2) + 4\varrho^2 - 2\varrho(x + y),$$

also unter Berücksichtigung von 2) und 3)

$$2r^2 + 2e^2 = 4r^2 + 4\varrho^2 - 2\varrho\left[\varrho + \sqrt{4r^2 + \varrho^2}\right].$$

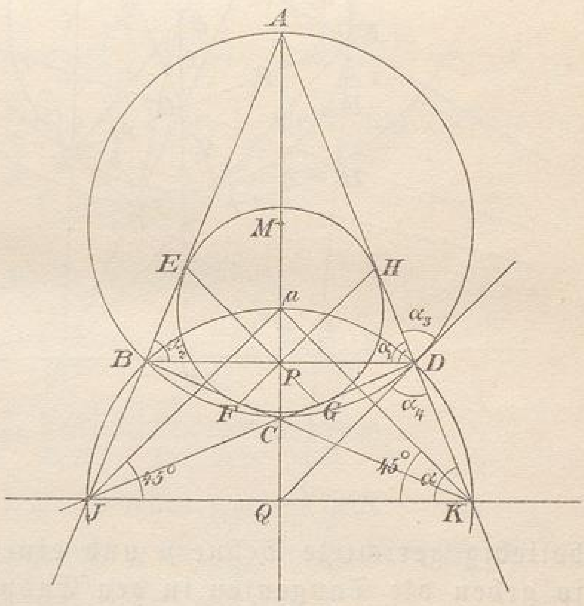
Demnach ist die gesuchte Entfernung zu finden mit Hülfe von

$$e^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4r^2 + \varrho^2},$$

was leicht konstruiert werden kann.

Nach Teil II Figur 42 schneiden sich Diagonalen und Berührungssehnen in einem Punkte P, dem Pole der dritten Diagonale JK des vollständigen Vierecks für beide Kreise. Der Punkt P und beide Kreise gehören also der Kreisschar an, die von dem durch die Punkte P und Q gehenden Kreisbüschel senkrecht geschnitten wird. Die Vergleichung der Winkelsumme der Vierecke $AEPH$ und $PFCG$ zeigt, daß $\sphericalangle EPH = 90^0$ ist. Aus Symmetriegründen sind also EG und FH unter 45^0 geneigt, also auch μJ und μK, und es ist $QK = Q\mu$. Aus

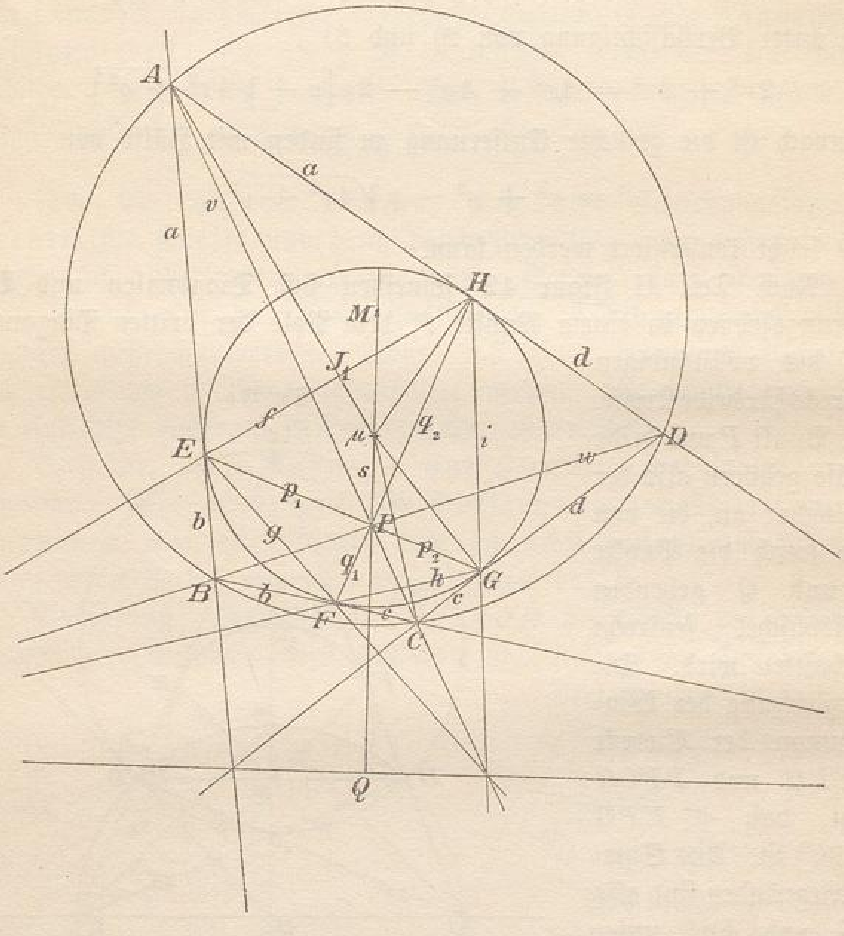
Fig. 12a.



$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ folgt $QK = QD = Q\mu$. Folglich geht der um Q mit $Q\mu$ geschlagene Kreis durch die Eckpunkte B und D und außerdem durch J und K. Sämmtliche Tangenten an den größeren Kreis, die von Punkten der Geraden JK ausgehen, sind also gleich den Entfernungen dieser Punkte von μ. Hieraus ergiebt sich eine große Zahl von Konstruktionsaufgaben.

14b) Daß die Berührungssehnen EG und FH auf einander senkrecht stehen, gilt von jedem Tangenten-Sehnenviereck, wie die entsprechende Betrachtung für $AEPH$ und $CFPG$ zeigt. Umgekehrt: Ist ein Kreis mit Radius ϱ gegeben und legt man durch einen gegebenen Punkt P innerhalb desselben eine

Fig. 12b.



beliebig gerichtete Sehne p und eine auf ihr senkrechte q, so geben die Tangenten in den Endpunkten dieser Sehnen ein Tangenten-Sehnen-Viereck.

Es läßt sich nun zeigen, daß die umbeschriebenen Kreise sämtlicher zu P und dem gegebenen Kreise μ gehörigen Tangenten-Sehnen-Vierecke denselben Radius r und denselben Mittelpunkt M haben. Man setze zum Beweise die Entfernung $\mu P = s$, so daß $\varrho^2 - s^2$ oder k^2 der absolute Betrag der Potenz des Punktes P in Bezug auf den kleineren Kreis ist. Mit Hülfe der Abstände der

Sehnen p und q von μ ist dann leicht zu zeigen, daß $p^2 + q^2 = 4(2\varrho^2 - s^2)$ also konstant ist, welche Sehnenrichtung p man auch wähle. Aus der Gleichheit des Peripheriewinkels mit dem zugehörigen halben Centriwinkel folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke EFP und $CG\mu$, so daß $c : \varrho = q_1 : p_1 = p_2 : q_2$ ist, wo p_1, p_2, q_1, q_2 die Abschnitte der Sehnen p und q bedeuten. Daraus folgt $CD = c + d = \frac{q_1 + q_2}{p_1}\varrho = \frac{q}{p_1}\varrho$. Ebenso ergiebt sich der Wert für die anderen Vierecksseiten, und man hat:

$$AB = \frac{q\varrho}{p_2},\quad BC = \frac{p\varrho}{q_2},\quad CD = \frac{q\varrho}{p_1},\quad DA = \frac{p\varrho}{q_1}.$$

Nach Ptolemäus folgt nun für die Diagonalen v und w von $ABCD$

$$v \cdot w = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$
$$= \frac{q^2\varrho^2}{p_1 p_2} + \frac{p^2\varrho^2}{q_1 q_2} = \frac{p^2 + q^2}{q_1 q_2}\varrho^2 = \frac{4(2\varrho^2 - s^2)}{\varrho^2 - s^2}\varrho^2.$$

Das Produkt der Diagonalen ist also für alle hier möglichen Tangenten-Sehnen-Vierecke unveränderlich.

Die Summe zweier Gegenseiten ist

$$BC + DA = AB + CD = q\varrho\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = q\varrho\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} = \varrho\frac{pq}{\varrho^2 - s^2}.$$

Da ferner $(BC + DA)\varrho = F$, d. h. gleich dem Inhalte von $ABCD$ ist, so folgt

$$F = \frac{pq\varrho^2}{\varrho^2 - s^2}.$$

Zugleich ist das Produkt zweier Nachbarseiten

$$AB \cdot BC = \frac{pq\varrho^2}{p_2 q_2} = \frac{p_1}{q_2} \cdot \frac{pq\varrho^2}{p_1 p_2} = \frac{p_1}{q_2}F,$$

bezw.

$$CD \cdot DA = \frac{pq\varrho^2}{p_1 q_1} = \frac{q_2}{p_1} \cdot \frac{pq\varrho^2}{q_1 q_2} = \frac{q_2}{p_1}F.$$

Die Seiten des Vierecks $EFGH$ sollen f, g, h, i sein.

Nach bekanntem Dreieckssatze ($r = \frac{abc}{4F}$, vergl. Teil II, Nr. 9) ist für die Inhalte der Dreiecke ABC und CDA

$$F = F_1 + F_2 = \frac{v \cdot AB \cdot BC + v \cdot CD \cdot DA}{4r} = \frac{vF}{4r}\left(\frac{p_1}{q_2} + \frac{q_2}{p_1}\right)$$
$$= \frac{vF}{4r}\frac{p_1^2 + q_2^2}{p_1 q_2} = \frac{vF}{4r}\frac{f^2}{p_1 q_2},$$

also

$$4r = v\frac{f^2}{p_1 q_2}$$

und ebenso

$$4\,r = w \frac{g^2}{p_1 q_1},$$

folglich

$$16\,r^2 = \frac{v w f^2 g^2}{p_1{}^2 q_1 q_2},$$

oder, da $\triangle JH\mu \sim EFP$, also $\frac{fg}{2\,p_1} = \varrho$ ist, unter Berücksichtigung des obigen Resultates für $v \cdot w$,

$$r^2 = \frac{(2\,\varrho^2 - s^2)\,\varrho^4}{(\varrho^2 - s^2)^2}.$$

Für sämtliche zum Diagonalschnitt P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke ist demnach r konstant.

Sämtliche diese Vierecke haben aber die Schnitte ihrer Gegenseiten auf der Polare von P, und da (nach Teil II Figur 42) die Polare und P auch für den umbeschriebenen Kreis als solche zu einander gehören, so müssen M, μ und P auf einer Geraden liegen und P gehört mit den beiden Kreisen wiederum zu einer Kreisschar. Aber nur ein Kreis auf der betrachteten Seite dieser Schar kann den Radius r haben, folglich haben sämtliche zu P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke denselben Mittelpunkt und Radius für den umbeschriebenen Kreis. Man darf also von dem Falle des symmetrischen Vierecks Figur 12a ausgehen und findet dabei den Satz:

Sind r und ϱ die Radien zweier Kreise und ist die Entfernung der Kreismittelpunkte

$$e = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4\,r^2 + \varrho^2}},$$

so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

(Unter den zahlreichen Invarianten der Vierecksschar bei gegebenen ϱ und s (und $k^2 = \varrho^2 - s^2$) seien noch folgende genannt: $fghi = 4\,\varrho^2 k^2$; $\frac{F}{F_1} = \frac{2\,\varrho^2}{k^2}$, wo F_1 der Inhalt des kleineren Vierecks $EFGH$ ist, denn

$$pq = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_2 = 2\,F;$$

$$ac = bd = \varrho^2; \quad \sin A \cdot \sin B = \frac{k^2}{\varrho^2} = \frac{2\,F_1}{F}.$$

Auch auf die Beziehung $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = F^2$ sei aufmerksam gemacht.)

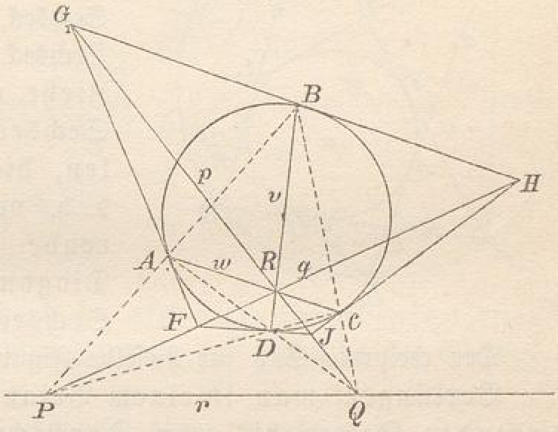
Durch Projektion folgt nun der Satz:

Wird einem Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umbeschrieben und ein beliebiger einbeschrieben, so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

Mit dem Gegebenenen hängt eine große Reihe von Konstruktionsaufgaben zusammen.]

15) Ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt R gegeben, so ist dessen Polare r bestimmt. Zu jedem Punkte P der Polare r gehört eine Polare p, die von r in Q geschnitten wird. Die Polare q von Q geht ebenso durch P, so daß P und Q zugeordnete Punkte sind und das Dreieck PQR zu sich selbst reciprok ist. Zieht man von P aus eine beliebige Sekante PAB, sodann BCQ und CDP, so giebt QD stets ein in A schließendes Sehnenviereck, dessen Diagonalen sich in R schneiden. (Warum?) Entsprechendes gilt von $ACDB$ und $ABDC$.

Fig. 13.



16) Reciprok folgt: Zieht man von einem beliebigen Punkte F auf q eine Tangente FA bis zum Schnitte G mit p, sodann GB bis zum Schnitte H mit q, sodann HC bis zum Schnitte J mit p, so giebt die Tangente JD ein in F schließendes Viereck, dessen Berührungssehnen sich in R schneiden.

Beide Schließungssätze gelten von allen Kegelschnitten.

P, Q und R sind ein sogenanntes Tripel von Punkten.

17) Das Schließungsproblem der Tangenten-Sehnendreiecke.

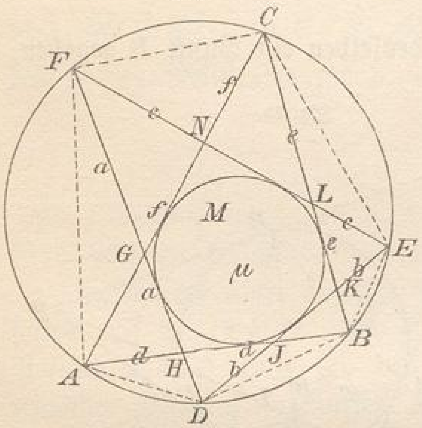
In Teil II, Geometrie Nr. 14 war gezeigt worden, daß, wenn die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien r und ϱ die Entfernung $e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$ haben, sich unendlich viele Tangenten-Sehnen-Dreiecke einzeichnen lassen. Wo man auch auf der Peripherie des Außenkreises beginnen möge, Tangenten zu ziehen, stets schließt die Reihe.

Der Satz gilt auch von den äußeren Berührungskreisen des Dreiecks und dem Umkreise, nur ist dann $e = \sqrt{r^2 + 2r\varrho}$. Durch

Projektion gilt er auch von Kegelschnitten. Dort kann er folgendermaßen ausgesprochen werden:

Schließt bei zwei Kegelschnitten **ein** Tangenten-Sehnendreieck, so schließen sämtliche, wo man auch beginne.

Fig. 14.



Es giebt aber auch noch andere Ausdrucksweisen. In Figur 14 z. B. sind zwei solche Dreiecke dargestellt, ABC und DEF. Dabei ist $GHJLN$ ein Brianchon-Sechseck, $ADBECF$ ein Pascal-Sechseck. Es ergiebt sich Folgendes: Zieht man in einem Pascal-Sechseck sämtliche Diagonalen, die Dreiecke abschneiden, d. h. verbindet man alternierende Ecken, so bilden die Diagonalen ein Brianchon-Sechseck.

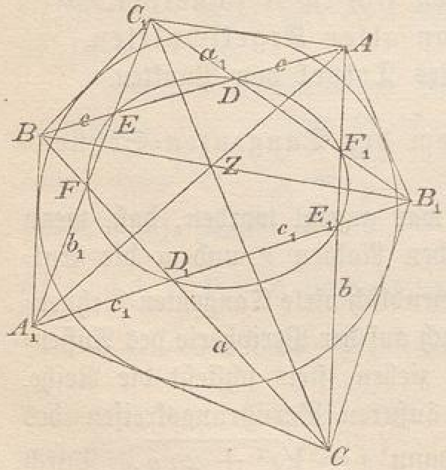
Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Verlängert man in einem Brianchon-Sechseck die alternierenden Seiten bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Pascal-Sechseck bilden.

18) Ein Gegenstück zum vorigen Problem.

Verlängert man die alternierenden Seiten eines Pascal-Sechsecks bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Brianchon-Sechseck bilden.

Fig. 15.

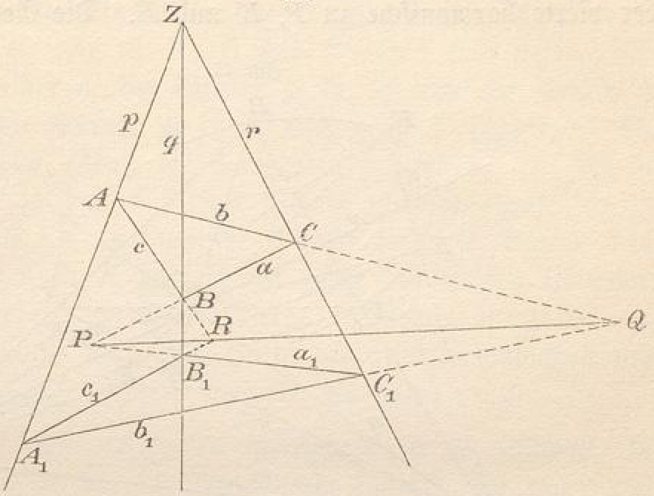


Oder: Schneidet man von einem Brianchon-Sechseck mittels der entsprechenden Diagonalen lauter Dreiecke ab, so bilden die sechs Diagonalen ein Pascal-Sechseck.

Der Beweis läßt sich auf verschiedene Weise führen. Eine räumliche Beweisführung ergiebt sich aus Figur 16.

ABC und $A_1B_1C_1$ seien zwei Dreiecke, deren entsprechende Verbindungslinien sich in einem Punkte Z schneiden; dann läßt sich $Z(A_1 B_1 C_1)$ als Zeichnung einer dreiseitigen Pyramide betrachten, die durch die Fläche ABC schräg abgeschnitten ist. Da nun bei dieser Anschauung a und a_1 in derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich in einem Raumpunkte P. Ebenso schneiden sich b und b_1 in einem Raumpunkte Q, c und c_1 in einem Raumpunkte R. Da aber die Schnittebenen ABC und $A_1 B_1 C_1$ sich in einer Geraden schneiden, so müssen P, Q, R in einer geraden Linie liegen.

Fig. 16.



Das entsprechende gilt von Figur 15 und damit ist der Sechsecksatz bewiesen.

Der Hülfssatz lautet: Liegen zwei Dreiecke so, daß die Verbindungslinien ihrer Ecken durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten in Punkten, die auf einer Geraden liegen.

Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke in Punkten, die auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte.

Auf Grund des Reciprocität ist ein besonderer Beweis nicht nötig. Er läßt sich selbständig durch eine ähnliche Raumbetrachtung führen.

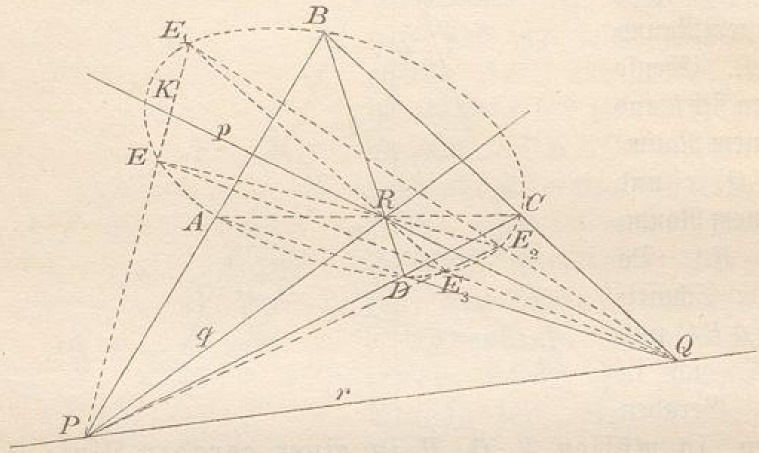
Dreiecke solcher Art bezeichnet man als perspektivische Dreiecke.

In dem Satze sind zahlreiche andere als specielle Fälle enthalten. Man vergl. z. B. Figur 43 in Teil II und den Satz über das Fußpunktdreieck der durch einen Punkt gelegten Ecktransversalen eines Dreiecks.

19) Durch vier Punkte A, B, C und D lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen. Bildet man noch die Schnittpunkte P, Q und R und die zugehörigen Polaren p, q und r, so ist das Dreieck PQR für diese sämtlichen Kegelschnitte sich selbst reciprok. Die Polare p wird also von sämtlichen Kegelschnitten so geschnitten, daß die Tangente im Schnittpunkte durch P geht. Entsprechendes findet mit q bezw. r statt.

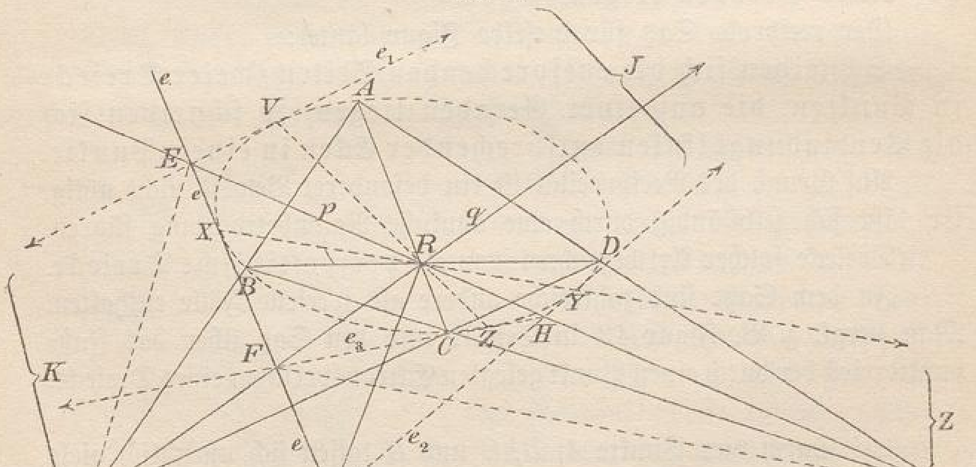
Wird noch ein fünfter Punkt E des Kegelschnitts gegeben, so kann man letzteren nach Pascal durchkonstruieren. Man findet aber auch sofort mit Hülfe der Polaren drei weitere Punkte E_1, E_2 und E_3. So ist E_1 der vierte harmonische zu P, K und E. Die Geraden $E_1 Q$ und ER

Fig. 17.



geben als Schnitt E_2, $E_2 P$ und EQ geben E_3. (Vergl. das Schließungsproblem unter 15.) Bildet man jetzt aus vier beliebigen von den acht Punkten ein neues Viereck, so ergeben sich $3 \cdot 4 = 12$ neue Punkte u. s. w. Jede Konstruktion ist eindeutig, also ist wiederum der Kegelschnitt durch 5 Punkte eindeutig bestimmt.

Fig. 18.



Statt des Punktes E kann auch eine Tangente e gegeben sein (ohne Angabe des Berührungspunktes). Hier versagt die Konstruktion nach Pascal, man findet aber sofort drei weitere Tangenten e_1, e_2

und e_3 durch folgende Überlegung. Wird die Polare r von e in G geschnitten, so muß die von G aus gezogene Tangente e_2 der vierte e zugeordnete Strahl zu GQ, GR und e sein. Sind nämlich X und Y die Berührungspunkte mit dem zu konstruierenden Kegelschnitte, so geht XY durch R, und X, Y, R und Z auf r sind harmonische Punkte. Nun schneidet e_2 die Gerade p in H und die Gerade q in J, während e die Gerade p in E und q in F schneidet. Die Geraden EJ und HF geben die Tangenten e_1 und e_3, die sich in K auf r schneiden, so daß auf jeder Polare zwei Tangentenschnitte liegen. Da P, Q, G, K harmonische Punkte sind, so können auch die zweiten Tangenten in E und F mit Hülfe des vierten harmonischen Strahles konstruiert werden. (Vergl. Schließungsproblem 16.) Die fertige Konstruktion kann mit Hülfe des Involutionssatzes von Desargues durchgeführt werden. (Siehe Anhang.)

20) **Aufgabe.** Die reciproken Betrachtungen zu Abschnitt 19 anzustellen, bei denen es sich um Kegelschnitte handelt, von denen vier Tangenten gegeben sind, zu denen noch eine fünfte, oder ein Punkt tritt.

Bemerkung. Aus den letzten Betrachtungen ergiebt sich, daß, wenn von einem Kegelschnitte vier Tangenten und ein Punkt, oder vier Punkte und eine Tangente gegeben sind, man acht Stücke kennt, nämlich vier Tangenten und vier Punkte. Durch diese sind aber im allgemeinen jedesmal zwei Kegelschnitte bestimmt.

III. Projektivische Punktreihen.

21) Betrachtet man eine der Kegelschnittkonstruktionen nach Brianchon, z. B. die Konstruktion aus fünf Tangenten, so erkennt man leicht, daß sie sich aus dem Zusammenhange mit dem betreffenden Satze (über Kreis oder Kegelschnitte) ganz herauslösen läßt. Was hat dabei eigentlich stattgefunden? Gegeben waren die Punkte I, II, III, IV als Schnittpunkte der gegebenen Geraden a, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$

Fig. 19.