Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

c) Übungsaufgabenn

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

schusse; sie ist gleich einem Kugelzweieck, dessen Winkel der halbe Winkelüberschuß ist und gleich dem Rechteck aus dem Radius und dem Bogenüberschusse der drei Zweiecke.

Handelt es sich um gleichseitige Kugeldreiecke, so daß der Inhalt wird $\frac{3\alpha^0 - 180^0}{720^0} O$ oder $\frac{\alpha^0 - 60^0}{240^0} O$, und setzt man dies der Reihe nach gleich $\frac{1}{4} O$, $\frac{1}{8} O$ und $\frac{1}{20} O$, so folgt $\alpha = 120^0$ bezw. $\alpha = 90^0$, $\alpha = 72^0$, und die Ecken sind der Reihe nach die Sektoren des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, deren Hauptschnitte Kreise geben, die sich unter den gefundenen Winkeln schneiden.

Stellt man die entsprechenden Formeln für das Kugelviereck und Kugelfünfeck auf, so kommt man durch ähnliche Spezialisierung auf den Fall des Würfels und des Pentagondodekaeders. Es handelt sich also um Probleme der Kugelteilung.

51) Verbindet man die Ecken des Kugeldreiecks mit dem Kugelcentrum, so erhält man den Körper des Kugeldreiecks, dessen Inhalt man aus der Fläche durch Multiplikation mit $\frac{r}{3}$ erhält (Pyramidenformel), so daß man hat:

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$= \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi\right) \frac{r^3}{3} = \left(r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi\right) \frac{r^2}{3}$$

oder, wenn J den Kugelinhalt bedeutet,

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} J = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} J.$$

[Auch diese Formeln sind leicht in Worte zu kleiden. Bei der einen handelt es sich um den Inhalt einer Pyramide über r^2, deren Höhe der Bogenüberschuß der drei Zweiecke ist.]

c) Übungsaufgaben.

52) Unter den Übungsaufgaben sind die mit der mathematischen Geographie zusammenhängenden die wichtigsten; z. B.: Wie groß ist die Fläche der heißen, der beiden gemäßigten, der beiden kalten Zonen, und in welchem Verhältnisse stehen sie? Wie groß ist die Zonenfläche zwischen dem Äquator und dem ersten Grade nördlicher Breite*); wie groß die vom 45ten und 46ten Grade

*) Gemeint ist der zu 1^0 nördlicher Breite gehörige Parallelkreis. Die abgekürzte Redeweise wird schwerlich zu Mißverständnissen führen.

nördlicher Breite eingeschlossene Zone? Wie groß ist jedes Meridianzweieck von Grad zu Grad? Wie viele Quadratmeilen Meeresfläche übersieht man von 10 m, 100 m, 1000 m, 10 000 m, 100 000 m Meereshöhe aus? Eine wie große Fläche wird durch ein Meteor beleuchtet, welches sich 8 Meilen über der Erdoberfläche befindet? Wie hoch muß ein Meteor schweben, um 1000 Quadratmeilen Erdoberfläche zu beleuchten? Der Erschütterungskreis eines Erdbebens reiche von 10^0 nördlicher Breite bis 60^0 nördlicher Breite; wie viele Quadratmeilen umfaßt er, und der wievielte Teil der Erdoberfläche wird erschüttert? Den wievielten Teil der Erdoberfläche schließt der 45^{te} Breitenkreis ein? Welcher Parallelkreis schließt den vierten Teil der Erdoberfläche ein (d. h. um welchen Grad nördlicher Breite handelt es sich)? Die Fläche der scheinbaren Himmelskugel ist wieviel mal so groß, als die scheinbare Fläche der Sonne (deren scheinbarer Durchmesser $32'$ beträgt)? Der wievielte Teil der Sonnenausstrahlung kommt der Erde zu gute? (Es ist zu untersuchen, wieviel mal so groß die scheinbare Himmelskugel ist, als die scheinbare Fläche der Erde für den Sonnenbewohner. Die Erde habe dabei den Durchmesser 1720 Meilen, und die Entfernung von der Sonne betrage 20 Millionen Meilen.) Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Kugeldreiecks auf der Erde, wenn jeder seiner Winkel 70^0 beträgt? Wie viele Tonnenmassen enthält der Erdkörper, wenn sein spezifisches Gewicht 5,6 ist? (Unter Tonnenmasse soll hier eine Masse verstanden werden, die an der Erdoberfläche 1000 kg wiegt. Nach dem Gewichte wird deshalb nicht gefragt, weil die Erde nicht an ihrer eigenen Oberfläche gewogen werden kann, weil ferner die Masse unveränderlich, das Gewicht aber von der Lage, Gestalt und Massenverteilung des anziehenden und angezogenen Körpers abhängig ist.) Wieviel Tonnen würde der nach der Sonnenoberfläche versetzte Erdkörper wiegen, wenn dort die Anziehung 28 mal so groß ist, als auf der Erde? Für die Bewohner des 50^{ten} Grades nördlicher Breite gehen die bis zu 50^0 vom Polarstern entfernten Gestirne nie unter (Circumpolarsterne), die bis zu 50^0 vom Südpol entfernten gehen nie auf. Den wievielten Teil des gestirnten Himmels lernen diese Bewohner nur kennen? Angenommen, bei der Fluterscheinung steige der vierte Teil der Oberfläche des über den ganzen Erdball verbreitet gedachten Ozeans (die eine Flutwelle) durchschnittlich um $\frac{1}{2}$ m, wie viele Kubikmeilen Wasser würde die Flutwelle enthalten? (Wie viele Meterkilogramme oder Metertonnen Arbeit bedeutet eine solche Steigung?)

Aufgaben über die den regelmäßigen Körpern um- und einbeschriebenen Kugeln befinden sich schon in Teil I. Sie können hier ergänzt werden. Aufgaben über Kugeln, die Kegeln und regelmäßigen Pyramiden einbeschrieben sind, ebenso über gewisse Kugelreihen, befinden sich in dem Kapitel über geometrische Reihen.

Umbeschriebene Körper. Einer Kugel einen Kegel umzubeschreiben, der den n-fachen Inhalt oder die n-fache Oberfläche hat als die erstere. Dieselbe Aufgabe für die 3-, 4-seitige Pyramide. Auch Kegelstumpfe und Pyramidenstumpfe, die gewissen Forderungen entsprechen, können umbeschrieben werden.

Aus dem Radius der Kugel die Elemente sämtlicher einbeschriebenen bezw. umbeschriebenen regelmäßigen Polyeder zu berechnen. (Die Resultate befinden sich in zahlreichen Übungsbüchern.)

Aufgaben wie folgende: Wie groß muß die Segmenthöhe sein, damit der n^{te} Teil vom Kugelkörper abgeschnitten werde, führen auf Gleichungen 3^{ten} Grades.

Spezifisches Gewicht. Eine Kugel sinke bis zur Tiefe h ins Wasser ein. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht? Auflösung $p' = \frac{W}{K} = \frac{\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \frac{h^2(3r-h)}{4r^3}$. Dieselbe Aufgabe für die Hohlkugel von Radius r und r_1. Wie groß muß die Wandstärke einer gußeisernen Halbkugel von 1 m Durchmesser ($p' = 7{,}5$) genommen werden, damit sie bis zum 4^{ten} Teile des Durchmessers, zur Hälfte, zu Dreiviertel desselben, oder ganz untertaucht? Statt der Kugel nehme man die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht, die beiden ersten lasse man erst mit der Wölbung voran, dann mit der Ebene voran eintauchen. Auch Segmente von Hohlkugeln können genommen werden. (Die Frage nach der Tiefe des Eintauchens führt auf Gleichungen dritten Grades.)

VII. Der Schwerpunkt, die Guldinschen Regeln, und die Sätze über abgeschrägte Körper.

53) Geometrisch und mit Hülfe der Mechanik (Gesetz der statischen Momente) kann bewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems im Raume der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist; daß speziell der Schwerpunkt eines ebenen Punktsystems der Punkt mittleren Abstandes von jeder Geraden der