Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

b) Kugelberechnungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M]$$

ist. Besonders einfach wird die Formel, wenn der Mittelschnitt diesen Körper, wie in der Figur, in zwei kongruente Teile zerlegt. Dann wird

$$J = \frac{h}{6}[U + U + 4M] = \frac{h}{3}[U + 2M].$$

Bemerkung. Aus dem bei dem windschiefen Prismatoid angewandten Verfahren ergiebt sich, daß, wenn die Newton-Simpson-Formel von zwei Körpern derselben Höhe gilt, sie auch von der Summe und Differenz dieser Körper gilt. Die Querschnittsflächen, die in derselben Höhe liegen, können dabei zu ganz beliebigen Gestalten vereinigt werden, sei es durch Addition oder durch Subtraktion.

41) **Übungsaufgaben.** Unter den Aufgaben über Körperstumpfe sind z. B. diejenigen von besonderem Interesse, bei denen es sich um das spezifische Gewicht p' in Verbindung mit dem wirklichen Gewichte p handelt. Dabei ist zunächst $p = Kp'$, wo K der Körperinhalt ist. Schwimmt ein Körper, und ist $W \cdot 1 = W$ der verdrängte Wasserraum und zugleich sein Gewicht, so ist, da der Körper ebensoviel wiegt, wie W, $Kp' = W$, also $p' = \frac{W}{K}$ das spezifische Gewicht. Ist z. B. letzteres gegeben, so kann man fragen, wie tief ein Cylinder oder Prisma, eine Pyramide, ein Kegel- oder Pyramidenstumpf, ein Prismatoid u. s. w. eintaucht, je nachdem das Eintauchen in diesem oder jenem Sinne erfolgt.

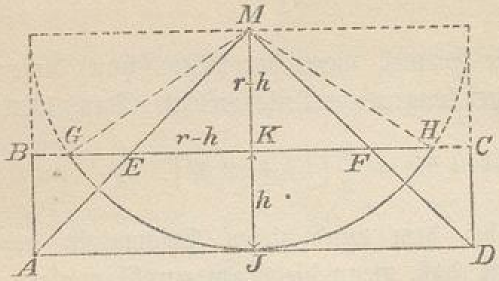
Ferner sind von Interesse Übungsaufgaben über Stumpfe, denen Kugeln um- oder einbeschrieben werden können.

Abstumpfungen kommen in der Krystallographie vielfach vor. So ist z. B. das an den Vierkant-Ecken abgestumpfte Rhombendodekaeder identisch mit dem abgekanteten Würfel, das an den Dreikant-Ecken abgestumpfte identisch mit dem abgekanteten Oktaeder. Zahlreiche Beispiele aus des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ geben Veranlassung zu Konstruktionen und Berechnungen.

b) Kugelberechnungen.

42) Kugelabschnitt (Kugelsegment). In Teil I, Ster. Nr. 27, wurde der Inhalt der Halbkugel gefunden durch Vergleich mit einem Cylinder von Radius r und Höhe r, aus dem der auf der Grund-

Fig. 147.



fläche stehende Kegel von Höhe r ausgeschnitten war. Der Restkörper hatte dabei in gleicher Höhe gleiche Querschnittsfläche mit der Kugel. Von der Figur ist hier nur der Aufriß gezeichnet. Nach dem Satze von Cavalieri muß ähnlich, wie dort, der Kugelabschnitt GJH denselben Inhalt haben, wie der entsprechende Restkörper, d. h. wie Cylinder $ABCD$ — Kegelstumpf $AEFD$. Folglich, wenn $AB = h$, also $EK = MK = r - h$ gesetzt wird,

$$\text{Segment} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$$

$$= \frac{\pi h}{3}[3r^2 - r^2 - r(r-h) - (r-h)^2],$$

oder

$$\text{Segment} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

43) Kugelsektor. Setzt man auf das Kugelsegment GHJ den Kegel GHM auf, so erhält man den Kugelausschnitt oder Kugelsektor, der zur Segmenthöhe h gehört. Sein Inhalt ist

$$\text{Segment} + \text{Kegel} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi \overline{GK}^2}{3}(r - h)$$

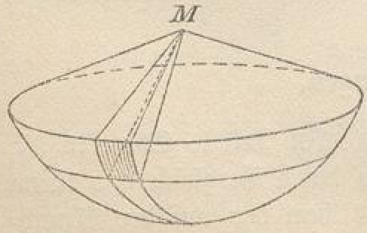
$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3) + \frac{\pi}{3}[r^2 - (r-h)^2](r - h),$$

wo sich alles bis auf $\frac{2}{3}r^2\pi h$ weghebt. Also

$$\text{Sektor} = \frac{2}{3}r^2\pi h.$$

44) Kugelkalotte. Die Wölbungsfläche des Segmentes heißt Kugelhaube (Kugelkappe oder Kalotte). Zu ihrer Berechnung schlägt man dasselbe Verfahren ein, wie in Teil I, Ster. 38. Man teilt die Wölbungsfläche z. B. durch Parallelkreise und Meridiane in kleine „quadratische" Flächen G_1, G_2, G_3, ... ein, deren Ecken mit dem Kugelcentrum verbunden werden. So entstehen Pyramiden von der Höhe r und dem Inhalte $G_1\frac{r}{3}$, $G_2\frac{r}{3}$, $G_3\frac{r}{3}$, u. s. w. Dann ist

Fig. 148.



Sektor = Summe der Pyramiden $= \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)$,

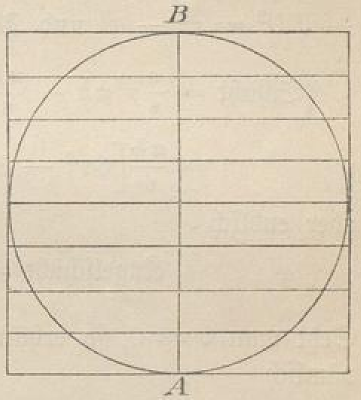
oder Sektor $= \frac{r}{3} \cdot$ Kalotte, also Kalotte $= \frac{3 \cdot \text{Sektor}}{r} = \frac{3}{r}\frac{2}{3} r^2 \pi h$, oder

$$\text{Kalotte} = 2 r \pi h.$$

Genau ebenso groß ist in Fig. 147 der Mantel des der ganzen Kugel umbeschriebenen Cylinders von der Grundfläche bis zur Höhe h.

45) Zonenfläche. Zwei Parallelkreise schneiden aus der Kugelfläche eine Zonenfläche aus, die als Differenz zweier Kalotten betrachtet werden kann. Gehört zur einen die „Pfeilhöhe" h_1, zur anderen die Pfeilhöhe h_2, so erhält man

Fig. 149.



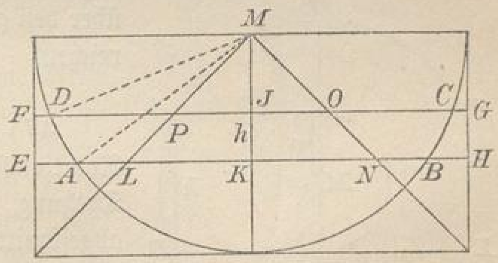
$$\begin{aligned}\text{Zonenfläche} &= 2 r \pi h_1 - 2 r \pi h_2 \\ &= 2 r \pi (h_1 - h_2).\end{aligned}$$

Setzt man die senkrechte Höhendifferenz $h_1 - h_2 = h$, so erhält man

$$\text{Zonenfläche} = 2 r \pi h.$$

In der Aufrißzeichnung Fig. 149 ist daher jede Zonenfläche gleich der gleich hohen Schicht des Cylindermantels. Ist also der Durchmesser AB in n gleiche Teile geteilt, so wird durch die Normalebenen in den Teilpunkten die Kugelfläche in flächengleiche Zonen zerlegt. Projiziert man also die Länder der Erdoberfläche normal auf den Berührungscylinder des Äquators, so erhält man eine flächentreue Weltkarte, die nach Aufschneiden des Cylinders ein Rechteck in der Ebene giebt (äquivalente Abbildung nach Lambert).

Fig. 150.



46) Kugelschicht. Die durch zwei Horizontalschnitte aus dem Kugelkörper geschnittene Schicht $ABCD$ ist gleich dem Cylinder $EHGF$ vermindert um den Kegelstumpf $LNOP$. Ist nun die senkrechte Höhe $KJ = h$, Radius $JD = a$ und Radius $KA = b$, so hat man:

$$\text{Schicht} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[KL^2 + KL \cdot JP + JP^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[MK^2 + MK \cdot MJ + MJ^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[2\,MK^2 + 2\,MK \cdot MJ + 2\,MJ^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,MK^2 + 3\,MJ^2 - (MK - MJ)^2\right].$$

Nun ist aber $MK^2 = MA^2 - KA^2 = r^2 - b^2$, und $MJ^2 = MD^2 - JD^2 = r^2 - a^2$ und $MK - MJ = h$, also hat man

$$\text{Schicht} = \tfrac{6}{6}\,r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,(r^2 - b^2) + 3\,(r^2 - a^2) - h^2\right]$$
$$= \frac{\pi h}{6}\left[6\,r^2 - 3\,(r^2 - b^2) - 3\,(r^2 - a^2) + h)^2\right],$$

oder endlich

$$\text{Kugelschicht} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2\right].$$

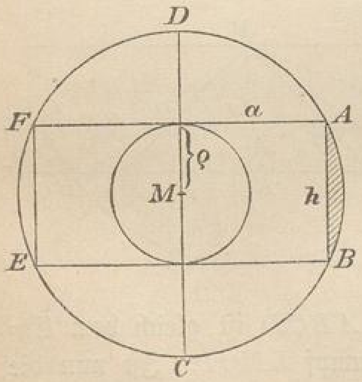
Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$\text{Kugelsegment} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + h^2\right],$$

die gegen die frühere den Vorzug hat, daß a und h am Segment gemessen werden können, während dort zwar h, aber nicht r meßbar war, sondern berechnet werden mußte.

Bemerkung. Die Formeln für das Segment, den Sektor und die Schicht sind hier zwar nur an der Halbkugel bewiesen, gelten aber, wie ganz einfache Betrachtungen zeigen, auch dann, wenn die Kugelteile über den größten Kreis der Kugel hinausreichen.

Fig. 151.



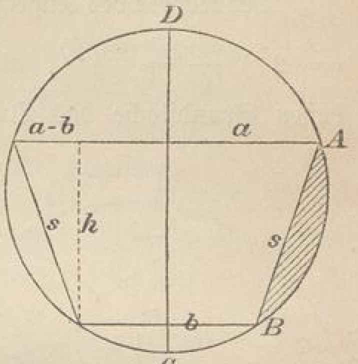
47) **Aufgabe.** Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Drehung des durch die Sehne AB abgeschnittenen Kreissegments um die parallele Achse CD entsteht.

Auflösung. Kugelschicht $ABEF$ — Cylinder $ABEF$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,a^2 + h^2\right] - \frac{6\,a^2\pi h}{6} = \frac{\pi h}{6}\left[6\,a^2 + h^2 - 6\,a^2\right] = \frac{\pi h^3}{6},$$

oder, wenn man $\varrho = \frac{h}{2}$ einführt, $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$. Der durch Rotation des Segments entstandene Körper ist also inhaltsgleich mit einer Kugel vom Radius $\frac{h}{2}$. Der Inhalt ist also nur abhängig von h, nicht aber vom Kugelradius r. (Je größer r, desto kleiner zwar das Kreissegment für dasselbe h, desto größer aber der Drehungsweg. Beides gleicht sich aus.)

Fig. 152.

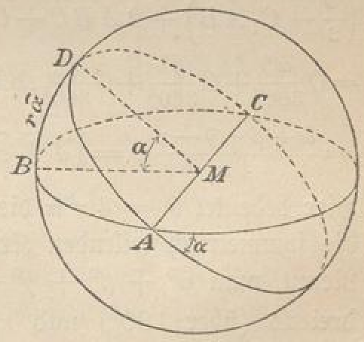


48) **Aufgabe.** Den entsprechenden Körper für den Fall zu berechnen, daß das Kreissegment um einen Durchmesser gedreht wird, der nicht parallel zur Sehne ist.

Auflösung. Schicht — Kegelstumpf $= \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3b^2 + h^2\right]$ $- \frac{\pi h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3b^2 + h^2\right] - \frac{\pi h}{6}\left[2a^2 + 2ab + 2b^2\right]$ $= \frac{\pi h}{6}\left[a^2 + b^2 - 2ab + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[(a-b)^2 + h^2\right]$. Da aber $(a-b)^2 + h^2 = s^2$ ist, so folgt $J = \frac{\pi h}{6}s^2$.

Ganz allgemein folgt also der Satz: Rotiert ein Kreissegment um einen beliebigen Durchmesser, so ist der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers das $\frac{h}{s}$-fache einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Sehne des Segmentes ist.

Fig. 153.



[49) Fläche und Körper des Kugelzweiecks.*) In Fig. 153 ist von der Kugelfläche durch die größten Kreise ABC und ADC ein Zweieck mit den Ecken A und C ausgeschnitten. Seine Fläche folgt aus der Proportion $F : O = \alpha^0 : 360^0$, also $F = O\frac{\alpha^0}{360^0}$, wo $O = 4r^2\pi$ die Oberfläche der Kugel ist.

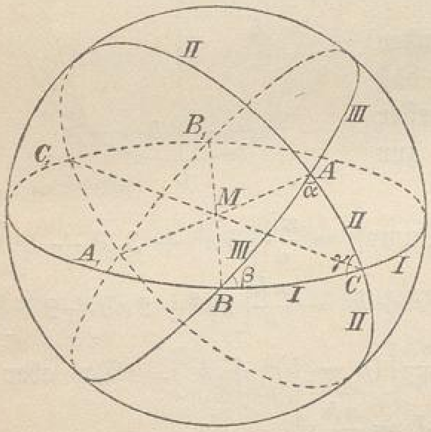
Ist dagegen der Bogen $BD = r\widehat{\alpha}$ in Längeneinheiten bestimmt, so ist $F = O\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi}$.

*) Auf dem Gymnasium sind die Abschnitte 49 bis 51 zu überschlagen.

Aus $F = 4r^2\pi\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = 2r\cdot(r\widehat{\alpha}) = d\cdot\widehat{BD}$ folgt, daß die Fläche des Kugelzweiecks gleich einem Rechteck aus dem Durchmesser und dem symmetrisch teilenden Bogen ist.

Der Körper des Kugelzweiecks ist $K = J\frac{\alpha^0}{360^0} = J\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = \frac{4}{3}r^3\pi\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi}$ $= (2r)^2\frac{\widehat{\alpha}r}{6} = \frac{d^2(r\widehat{\alpha})}{6}$, also gleich dem 6^{ten} Teile eines Prismas, dessen Grundfläche das Quadrat des Durchmessers, dessen Höhe der symmetrisch teilende Bogen ist.

Fig. 154.



50) Fläche und Körper des Kugeldreiecks. In Fig. 154 ist durch die größten Kreise I, II und III, die sich unter den Durchmessern AA_1, BB_1 und CC_1 schneiden, ein Kugeldreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ gebildet, dessen Fläche, wenn man die Zweiecke mit Z_α, Z_β, Z_γ bezeichnet, folgendermaßen gefunden werden kann: $Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma = (ABC + A_1BC) + (BCA + B_1CA) + (CAB + C_1AB)$*) $= (ABC + A_1BC + B_1CA) + 2ABC + C_1AB$. Der erste Posten ist die Fläche der durch den Kreis III abgeschnittenen Halbkugel $\frac{O}{2}$ vermindert um das Dreieck CA_1B_1, welches als Scheiteldreieck symmetrisch und flächengleich mit C_1AB ist. Also hat man die Gleichung $\left(\frac{O}{2} - C_1AB\right) + 2ABC + C_1AB = Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma$, oder $\frac{O}{2} + 2ABC$ $= O\frac{\alpha^0}{360^0} + O\frac{\beta^0}{360^0} + O\frac{\gamma^0}{360^0}$, d. h. Kugeldreieck $ABC = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0}O$ $= \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi}O = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)r^2 = (r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi)r$. Hier bedeutet $O = 4r^2\pi$ die Kugeloberfläche, während $r\widehat{\alpha}$, $r\widehat{\beta}$ und $r\widehat{\gamma}$ die symmetrisch teilenden Kreisbogen der einzelnen Kugelzweiecke sind. Nennt man $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0$ den Winkelüberschuß des Kugeldreiecks (über 180^0) und $r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi$ den Bogenüberschuß der entsprechenden Zweiecke (über den Halbkreisbogen), so ergiebt sich Folgendes: Die Fläche des Kugeldreiecks ist proportional dem Quadrate des Radius und proportional dem Winkelüber-

*) Achte auf die cyklischen Vertauschungen.

schusse; sie ist gleich einem Kugelzweieck, dessen Winkel der halbe Winkelüberschuß ist und gleich dem Rechteck aus dem Radius und dem Bogenüberschusse der drei Zweiecke.

Handelt es sich um gleichseitige Kugeldreiecke, so daß der Inhalt wird $\frac{3\alpha^0 - 180^0}{720^0} O$ oder $\frac{\alpha^0 - 60^0}{240^0} O$, und setzt man dies der Reihe nach gleich $\frac{1}{4} O$, $\frac{1}{8} O$ und $\frac{1}{20} O$, so folgt $\alpha = 120^0$ bezw. $\alpha = 90^0$, $\alpha = 72^0$, und die Ecken sind der Reihe nach die Sektoren des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, deren Hauptschnitte Kreise geben, die sich unter den gefundenen Winkeln schneiden.

Stellt man die entsprechenden Formeln für das Kugelviereck und Kugelfünfeck auf, so kommt man durch ähnliche Spezialisierung auf den Fall des Würfels und des Pentagondodekaeders. Es handelt sich also um Probleme der Kugelteilung.

51) Verbindet man die Ecken des Kugeldreiecks mit dem Kugelcentrum, so erhält man den Körper des Kugeldreiecks, dessen Inhalt man aus der Fläche durch Multiplikation mit $\frac{r}{3}$ erhält (Pyramidenformel), so daß man hat:

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$= \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi\right) \frac{r^3}{3} = \left(r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi\right) \frac{r^2}{3}$$

oder, wenn J den Kugelinhalt bedeutet,

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} J = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} J.$$

[Auch diese Formeln sind leicht in Worte zu kleiden. Bei der einen handelt es sich um den Inhalt einer Pyramide über r^2, deren Höhe der Bogenüberschuß der drei Zweiecke ist.]

c) Übungsaufgaben.

52) Unter den Übungsaufgaben sind die mit der mathematischen Geographie zusammenhängenden die wichtigsten; z. B.: Wie groß ist die Fläche der heißen, der beiden gemäßigten, der beiden kalten Zonen, und in welchem Verhältnisse stehen sie? Wie groß ist die Zonenfläche zwischen dem Äquator und dem ersten Grade nördlicher Breite*); wie groß die vom 45^{ten} und 46^{ten} Grade

*) Gemeint ist der zu 1^0 nördlicher Breite gehörige Parallelkreis. Die abgekürzte Redeweise wird schwerlich zu Mißverständnissen führen.