



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik**

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen  
bestimmt

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

a) Körperstumpfe.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93613](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93613)

**Beweis.**

$$FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2 \\ = a^2 + a^2 + b^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = 4a^2.$$

(Vgl. Geom. 5a.) Also ist  $FC = 2a = FG = GC$ , d. h.  $FCG$  ein gleichseitiges Dreieck. Dasselbe gilt von den 19 anderen Dreiecken, so daß der Körper von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. An ihm lassen sich entsprechende Berechnungen anstellen, wie am Dodekaeder. Es ergibt sich

$$\rho = a \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}, \quad J = a \sqrt{3} \frac{3+\sqrt{5}}{12}.$$

**VI. Berechnungsübungen.****a) Körperstumpfe.**

Unter Körperstumpf versteht man einen einfach gestalteten Körper, der von zwei parallelen Grundflächen  $G$  und  $g$  begrenzt ist.\*)

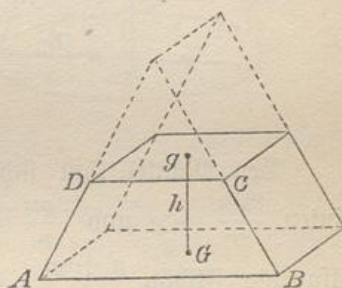
32) Stumpf des Dachkörpers. Sind  $G$  und  $g$  die beiden Grundflächen, und ist  $h$  die Höhe, so ist der Inhalt

$$J = \frac{G + g}{2} h.$$

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe der Inhaltsformel des Trapezes  $ABCD$ , welches ebenfalls als Grundfläche benutzt werden kann.

Der mittlere Horizontalschnitt  $\frac{G + g}{2}$  befindet sich in halber Höhe.

Fig. 139.



33) Stumpf des Kreiskegels. Fig. 140 stellt zunächst den Stumpf des senkrechten Kreiskegels dar, der andeutungsweise zum vollständigen Kegel ergänzt ist;  $r$  und  $\rho$  seien die Grundradien,  $h$  die Höhe des Stumpfes,  $x$  die des ganzen Kegels. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $BCD$  und  $BAM$  folgt  $(r - \rho) : h = r : x$ , also  $x = \frac{hr}{r - \rho}$ .

\*) Im Unterrichte empfiehlt es sich, die beiden Grundflächen der Stumpfe als  $G_1$  und  $G_2$  zu bezeichnen. Hier wurden sie mit Rücksicht auf die vorhandenen Gleiches mehrfach als  $G$  und  $g$  bezeichnet.

Der Stumpf ist gleich dem ganzen Kegel vermindert um den Ergänzungskegel, also

$$J = \frac{r^2 \pi x}{3} - \frac{\varrho^2 \pi (x-h)}{3} = \frac{\pi}{3} [x(r^2 - \varrho^2) + \varrho^2 h]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[ \frac{hr}{r-\varrho} (r+\varrho)(r-\varrho) + \varrho^2 h \right],$$

also

$$1) \quad J = \frac{\pi h}{3} [r^2 + r\varrho + \varrho^2].$$

Bringt man  $\pi$  in die Klammer, so erhält man in dieser  $r^2 \pi = G$ ,  $\varrho^2 \pi = G_1$ ,  $r\varrho \pi = \sqrt{(r^2 \pi)(\varrho^2 \pi)} = \sqrt{G \cdot G_1}$ , wo  $G$  und  $G_1$  die beiden Grundflächen sind. Man hat also die Inhaltsformel

$$2) \quad J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{GG_1} + G_1].$$

Fig. 140.

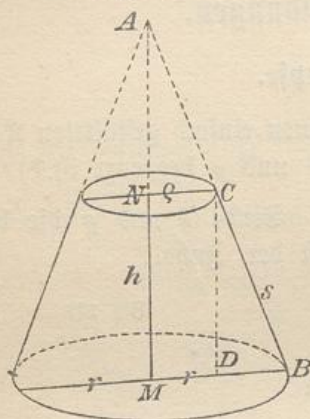
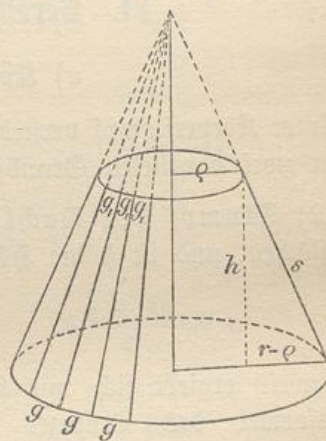


Fig. 141.



Der Mantel läßt sich in  $n$  schmale Trapeze mit den Grundlinien  $\frac{2r\pi}{n} = g$  und  $\frac{2\varrho\pi}{n} = g_1$  einteilen, von denen jedes die Höhe  $s$ , also die Fläche  $\frac{g+g_1}{2} s = \frac{\pi}{n} (r+\varrho) s$  hat. Der Mantel des Stumpfes hat also die Fläche

$$3) \quad M = (r+\varrho)\pi s.$$

Statt  $s$  kann gesetzt werden

$$s = \sqrt{(r-\varrho)^2 + h^2}.$$

34) **Aufgabe.** In welcher Höhe befindet sich die mittlere Querschnittsfläche des Kegelstumpfes?

**Auflösung.** Ist ihr Radius gleich  $z$ , so müßte sein:

Inhalt = mittlerer Schnitt mal Höhe, also

$$J = z^2 \pi h = \frac{\pi h}{3} [r^2 + r\varrho + \varrho^2],$$

also  $z = \sqrt{\frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3}}$ . Um die Höhe  $y$  zu finden, in der sich dieser Radius  $z$  befindet, benutze man die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Fig. 142 folgende Proportion

$$(r - z) : y = (z - \varrho) : (h - y),$$

woraus folgt

$$y = \frac{h(r - z)}{r - \varrho},$$

wo der Wert von  $z$  einzusetzen ist. (Der mittlere Querschnitt befindet sich also nicht etwa in halber Höhe.)

**Bemerkung.** Die Inhaltsformel (nicht aber die Mantelformel) gilt nach dem Satze des Cavalieri auch für den Stumpf des schiefen Kreiskegels.

35) Pyramidenstumpf. Nach Teil I, Ster. Nr. 26 haben Kegel und Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in demselben Niveau gleiche Horizontalschnitte. Haben also Kegel- und Pyramidenstumpf gleiche Grundflächen  $G$  und  $g$  und dieselbe Höhe  $h$ , so haben die ergänzten Körper dieselbe Höhe  $x$ . Demnach sind auch die Stumpfe nach Cavalieri inhaltsgleich. Folglich ist auch für den Pyramidenstumpf

$$J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g].$$

Selbständig ergibt sich dies folgendermaßen: Der Parallelschnitt in Fig. 143 schneidet einen der ganzen Pyramide ähnlichen Körper ab, folglich ist

$$G : g = x^2 : (x - h)^2,$$

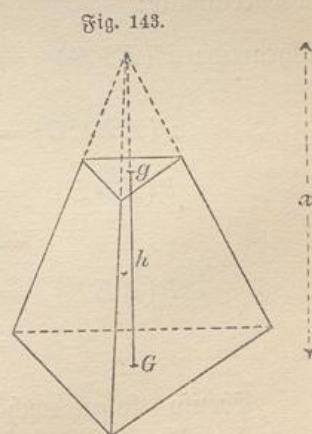
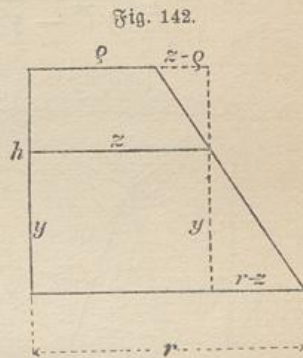
denn in ähnlichen Körpern verhalten sich homologe Flächen wie die Quadrate homologer Linien. Daraus folgt

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : (x - h)$$

und

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Setzt man dies in



$$J = \frac{Gx}{3} - \frac{g(x-h)}{3} = \frac{1}{3} [x(G-g) + gh]$$

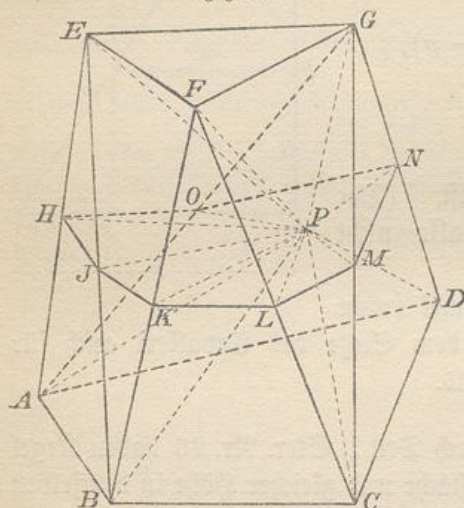
ein, so entsteht

$$J = \frac{1}{3} \left[ \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} (\sqrt{G} + \sqrt{g}) \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) + gh \right],$$

oder endlich

$$J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g].$$

Fig. 144.



36) Ebenflächiges Prismatoid. Man versteht darunter einen Körper, dessen parallele Grundflächen Vielecke sind, während als Seitenflächen im allgemeinen nur Dreiecke auftreten, von denen jedoch zwei benachbarte zu einem ebenen Viereck zusammenfallen können (sobald die obere und die untere Kante parallel sind).

In Fig. 144 ist als untere Grundfläche ein Viereck  $ABCD$ , als obere ein Dreieck  $EFG$  gewählt. Die Halbierungspunkte der Seitenkanten liegen in einem Horizontalschnitt. Die untere Grundfläche  $U$  bezeichne man als Unterschnitt, die obere  $O$  als Oberschnitt, die in halber Höhe durchgelegte Fläche  $M$  als Mittelschnitt, der hier  $4 + 3 = 7$  Seiten hat, im allgemeinen  $m + n$  Seiten haben kann.

Ein beliebiger Punkt  $P$  des Mittelschnitts werde mit allen Ecken der drei Schnitte verbunden. Dann erhält man folgende Körper und Körperinhalte:

$$\text{Pyramide } P(EFG) = \frac{h}{2} \cdot \frac{O}{3} = \frac{hO}{6},$$

$$\text{„ } P(ABCD) = \frac{h}{2} \cdot \frac{U}{3} = \frac{hU}{6},$$

$$\text{„ } P(ABE) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(HJE) \\ = 4 \cdot \text{Pyramide } E(HJP) = 4 \cdot HJP \cdot \frac{h}{6},$$

$$\text{„ } P(BEF) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(JKB) \\ = 4 \cdot \text{Pyramide } B(JKP) = 4 \cdot JKP \cdot \frac{h}{6}.$$

$$\text{Ebenso folgt noch } 4KLP \cdot \frac{h}{6}, \quad 4LMP \cdot \frac{h}{6}, \quad 4MNP \cdot \frac{h}{6},$$

$4NOP \frac{h}{6}$  und  $4OPH \frac{h}{6}$ . Dabei geben die den Faktor 4 enthaltenden Inhalte zusammengenommen den Mittelschnitt  $M$  multipliziert mit  $\frac{4h}{6}$ . Der ganze Körper hat also den Inhalt

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M].$$

Er hat diese Inhaltsformel, die Newton-Simpson'sche Formel, mit zahlreichen anderen Körpern gemein, so daß das ebenflächige Prisma nur ein spezieller Fall eines weit allgemeineren Körpers ist.

Spezielle Fälle des Prismatoids sind das Prisma, der Dachkörper, bei dem die eine Grundfläche Null ist, die Pyramide und der Kegel, bei denen dasselbe stattfindet und die Stumpfe der letztgenannten Körper. Von ihnen gilt also die genannte Inhaltsformel. Sie dient jedoch bei diesen nicht zur Berechnung, sondern zum Nachweis wichtiger Sätze.

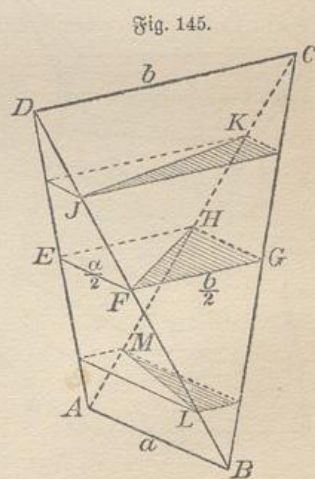
[37] Das Halbtetraeder. Jedes beliebige Tetraeder (Fig. 145) kann mit der Kante  $a$  auf einen horizontalen Tisch gestellt und um diese Kante so gedreht werden, daß schließlich auch die Kante  $b$  horizontal ist. Dann ist der Körper der Spezialfall des Prismatoids, bei dem das obere und das untere Polygon zu geraden Linien geworden sind. Ist also  $EFGH$  der horizontale Mittelschnitt  $M$ , und ist  $h$  der senkrechte Abstand der Kanten  $a$  und  $b$ , so ist der Inhalt des Körpers  $J = \frac{h}{6} [U + O + 4M]$ , oder, da  $U = 0$  und  $O = 0$  ist,  $J = \frac{2}{3} hM$ . (Der Mittelschnitt ist ein Parallelogramm mit den Seiten  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{b}{2}$ , die denselben Winkel  $\gamma$  einschließen, unter dem sich die Geraden  $a$  und  $b$  kreuzen. Es ist also

$$M = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin \gamma$$

und

$$J = \frac{4}{6} h \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sin \gamma = \frac{abh}{6} \sin \gamma.)$$

Zieht man nun zahlreiche Horizontalschnitte, so erkennt man, daß jeder ein Parallelogramm ist, welches durch die Diagonale  $JK$  bzw.  $FH, LM$  u. s. w. halbiert wird. Die Gesamtheit dieser Diagonalen giebt eine gekrümmte Fläche, das sogenannte windschiefe Viereck  $ABCD$ , dessen gerade Horizontalen der Reihe nach von der Richtung  $DC$  aus in



die Richtungen  $JK, FH, LM, BA$  übergehen. Nach dem Satze des Cavalieri wird das Tetraeder durch diese windschiefe Fläche in zwei inhaltsgleiche Körper geteilt, die sogenannten Halbtetraeder. Jedes derselben hat den Mittelschnitt  $M_1 = \frac{M}{2}$  und den Inhalt  $J = \frac{2}{3} h M_1 = \frac{h}{6} [U + O + 4M_1]$ , wo  $U = 0$  und  $O = 0$  ist. Folglich: Das Halbtetraeder gehorcht der Newton-Simpson'schen Formel.

38) Das Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen. Läßt man in dem ebenflächigen Prismatoid Fig. 144 an Stelle zweier benachbarter Seitendreiecke eine windschiefe Vierecksfläche mit horizontalen Geraden treten, so schneidet man vom Gesamtkörper ein Halbtetraeder von der besprochenen Stellung ab. Ist der abgeschnittene Teil des Mittelschnitts  $M_1$ , so bleibt ein Körper übrig vom Inhalte

$$J = \frac{h}{6} (U + O + 4M) - \frac{4h}{6} M_1 = \frac{h}{6} [U + O + 4(M - M_1)],$$

wo  $M - M_1$  der neue Mittelschnitt ist. Folglich gilt die Simpson'sche Regel auch weiter, wenn man an Stelle von beliebig vielen der benachbarten Dreieckspaare windschiefe Flächen der besprochenen Art treten läßt. Also:

Der Inhalt des Prismatoids mit (teilweise oder ausnahmslos) windschiefen Seitenflächen (die durch horizontale Geraden gebildet sind) ist

$$J = \frac{h}{6} (U + O + 4M).$$

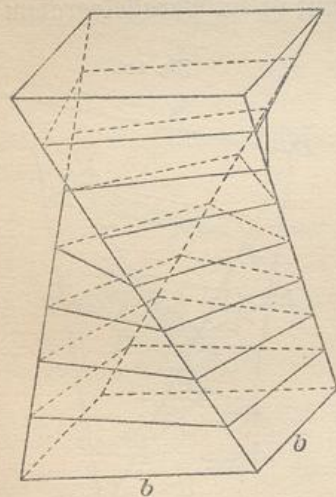


Fig. 146.

39) Fig. 146 stellt den Spezialfall dar, bei dem die Grundflächen gleichliegende Quadrate sind. In diesem Falle ist der Mittelschnitt, wie man durch Herunterprojizieren erkennt, die Hälfte der Grundfläche  $b^2$ , also

$$J = \frac{h}{6} [b^2 + b^2 + 4 \frac{b^2}{2}] = \frac{2}{3} b^2 h,$$

d. h.  $\frac{2}{3}$  des zugehörigen Prismas.

40) Sind die Grundflächen regelmäßige Polygone von unendlicher Seitenzahl, also Kreise, so entsteht das durch Fig. 115 dargestellte Drehungshyperboloid, dessen Inhalt also ebenfalls

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M]$$

ist. Besonders einfach wird die Formel, wenn der Mittelschnitt diesen Körper, wie in der Figur, in zwei kongruente Teile zerlegt. Dann wird

$$J = \frac{h}{6} [U + U + 4M] = \frac{h}{3} [U + 2M].$$

**Bemerkung.** Aus dem bei dem windschiefen Prismatoid angewandten Verfahren ergibt sich, daß, wenn die Newton-Simpson-Formel von zwei Körpern derselben Höhe gilt, sie auch von der Summe und Differenz dieser Körper gilt. Die Querschnittsflächen, die in derselben Höhe liegen, können dabei zu ganz beliebigen Gestalten vereinigt werden, sei es durch Addition oder durch Subtraktion.

41) **Übungsaufgaben.** Unter den Aufgaben über Körperstumpfe sind z. B. diejenigen von besonderem Interesse, bei denen es sich um das spezifische Gewicht  $p'$  in Verbindung mit dem wirklichen Gewichte  $p$  handelt. Dabei ist zunächst  $p = Kp'$ , wo  $K$  der Körperinhalt ist. Schwimmt ein Körper, und ist  $W \cdot 1 = W$  der verdrängte Wasserraum und zugleich sein Gewicht, so ist, da der Körper ebensoviel wiegt, wie  $W$ ,  $Kp' = W$ , also  $p' = \frac{W}{K}$  das spezifische Gewicht. Ist z. B. letzteres gegeben, so kann man fragen, wie tief ein Cylinder oder Prisma, eine Pyramide, ein Kegel- oder Pyramidenstumpf, ein Prismatoid u. s. w. eintaucht, je nachdem das Eintauchen in diesem oder jenem Sinne erfolgt.

Ferner sind von Interesse Übungsaufgaben über Stumpfe, denen Kugeln um- oder einbeschrieben werden können.

Abstumpfungen kommen in der Krystallographie vielfach vor. So ist z. B. das an den Vierkant-Ecken abgestumpfte Rhombendodekaeder identisch mit dem abgekanteten Würfel, das an den Dreikant-Ecken abgestumpfte identisch mit dem abgekanteten Oktaeder. Zahlreiche Beispiele aus des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ geben Veranlassung zu Konstruktionen und Berechnungen.

### b) Kugelberechnungen.

42) Kugelabschnitt (Kugelsegment). In Teil I, Ster. Nr. 27, wurde der Inhalt der Halbkugel gefunden durch Vergleich mit einem Cylinder von Radius  $r$  und Höhe  $r$ , aus dem der auf der Grund-