Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

II. Arithmetische Reihen.

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

21) Die Glieder einer Zahlenreihe können auch so aufeinander folgen, daß der Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist, wie z. B. in

$$5, 7, 9, 11, 13, \ldots,$$

dann nennt man die Reihe eine arithmetische Reihe.

Ist a das Anfangsglied, n die Anzahl der Glieder und d die konstante Differenz, so lautet die Reihe folgendermaßen:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \ldots, \quad a+(n-1)d.$$

Das n^{te} Glied hat also, auch wenn es nicht Schlußglied ist, die Form

$$t = a + (n-1)d.$$

22) Die Summe der arithmetischen Reihe kann man finden, indem man sie zweimal in entgegengesetzter Ordnung hinschreibt, also z. B.

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (t-d) + t,$$
$$s = t + (t-d) + (t-2d) + \cdots + (a+d) + a.$$

Durch beiderseitige Addition erhält man

$$2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) \cdots + (a+t) + (a+t)$$

oder

$$2s = n(a+t),$$

demnach ist

$$s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Dasselbe Resultat findet man durch folgende Überlegung: Der mittlere Wert des ersten und des letzten Gliedes ist $\frac{a+t}{2}$, der des zweiten und des vorletzten Gliedes ebenfalls $\frac{a+t}{2}$ u. s. w., $\frac{a+t}{2}$ ist also überhaupt das arithmetische Mittel sämtlicher Glieder. Die Summe der Reihe muß demnach $n\frac{a+t}{2}$ sein.

23) **Übungsaufgaben.** Wie groß ist die Summe der n ersten Zahlen der gewöhnlichen Zahlenreihe?

$$\left[s = \frac{n(n+1)}{2};\ \text{z. B. } 1 + 2 + 3 + \cdots + 199 = \frac{199 \cdot 200}{2} = 19\,900.\right]$$

Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?

$$[s = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n^2,$$

also stets eine Quadratzahl, z. B. $1 + 3 + 5 + \cdots + 11 = 36 = 6^2$.]

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 101 bis 200? [Gliederzahl $n = 100$, also $s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{100}{2}(101 + 200) = 50 \cdot 301 = 15\,050$.]

Wie groß ist die Summe der geraden Zahlen von 102 bis 200? [Gliederzahl $n = 50$, also $s = \frac{50}{2}(102 + 200) = 25 \cdot 302 = 7550$.]

Weitere Übungsaufgaben siehe z. B. in den Sammlungen von Bardey und Heis.

b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung.*)

24) **Aufgabe.** Weise nach, daß jede der folgenden Gleichungen eine **identische** ist.

a) $$\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1},$$

b) $$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2},$$

c) $$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Bemerkung. Fährt man mit der Bildung dieser Gleichungen fort, so lautet die m^{te} folgendermaßen:

d) $$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} - \frac{(x-1)x(x+1)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} = \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

*) Dieser Abschnitt kann überschlagen werden, wenn man sich beim Beweise des binomischen Lehrsatzes mit dem Schlusse von n auf $(n+1)$ begnügen will.