Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

b) Anwendung auf die Rentenrechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

oder, wenn man beiderseits mit x^{n-1} multipliziert,

$$5)\quad x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}=\frac{x^n-y^n}{x-y}.$$

Hierin sind zahlreiche Spezialformeln enthalten, die häufig als Beispiele für aufgehende Division Verwendung finden, z. B.

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3.$$

Setzt man in 5) $-y$ statt y ein, so bleibt der Zähler der rechten Seite bei geradem n ungeändert, ändert sich aber bei ungeradem n, auf der anderen aber entstehen abwechselnde Vorzeichen, z. B.

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3,$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$$

Bemerkung. Jedes Glied der geometrischen Reihe ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Nachbargliedern. Durch Einschaltung mittlerer Proportionalen läßt sich also aus jeder solchen Reihe eine neue ableiten, aus dieser eine dritte u. s. w.

b) Anwendung auf die Rentenrechnung.

7) **Aufgabe.** Jemand legt am Schlusse jedes Jahres eine Ersparnis von r Mark zinsbar an und schlägt jedesmal die Zinsen zum Kapital. Wieviel besitzt er nach n Jahren?

Auflösung. Wird der Prozentsatz mit dem Zeichen % bezeichnet, so hat der erste Posten r nach n Jahren den Wert $r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-1}$, denn er war $n-1$ Jahre lang zinsbar angelegt. (Vergl. Teil I, Arithmetik Nr. 112.) Der zweite Posten hat nach n Jahren den Wert $r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-2}$, u. s. w. Die Summe der Schlußwerte der einzelnen Posten ist also nach n Jahren:

$$r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-1}+r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-2}+r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-3}+\cdots+r\left(1+\frac{\%}{100}\right)+r,$$

oder nach Gleichung 3)

$$r\,\frac{\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n-1}{\left(1+\frac{\%}{100}\right)-1},$$

also, wenn man den Schlußwert mit k und den Ausdruck $1 + \frac{\%}{100}$ mit q bezeichnet und eine einfache Umformung vornimmt:

$$6)\qquad k = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right] = \frac{100r}{\%}[q^n - 1].$$

Bezeichnet man jeden Einzelposten als die jährliche **Rente** (oder Rate), so hat man in 6) den Wert gefunden, den eine auf n Jahre zu zahlende jährliche Rente r nach n Jahren hat. Er heißt der **Schlußwert der Rente**. Die Formel ist wichtig für die Berechnung der Lebensversicherung. Ist n die aus der Statistik folgende mittlere Lebensdauer der sich heute versichernden Person, und zahlt sie jährlich r Mark, so ist k die nach dem Tode zurückzuzahlende Summe. Ähnlich ist es bei der Feuerversicherung von Gebäuden, z. B. Theatern, bei denen eine mittlere Dauer des Bestehens auf Grund der Statistik angenommen wird.

8) **Aufgabe.** Jemand will bei gegebenem Zinsfuß auf n Jahre eine an jedem Jahresschluß zu zahlende Rente r kaufen. Wie groß ist der Zahlungspreis c?

Auflösung. Der Kaufpreis c würde nach n Jahren den Wert $k = c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$ haben, die Rente bei gleichem Zinsfuß den Wert $k = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right]$. Beide Schlußwerte müssen gleich sein, also

$$7)\qquad c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right].$$

Demnach ist der **Kaufpreis** (oder **Anfangswert**) der Rente

$$7^*)\qquad c = \frac{100r}{\%}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n}\right] = \frac{100r}{\%}\left[1 - \left(\frac{100}{100 + \%}\right)^n\right],$$

oder

$$c = \frac{100r}{\%}\left[1 - \frac{1}{q^n}\right].$$

Hierher gehört die Ablösung von Renten durch eine Barzahlung.

9) **Aufgabe.** Welche Rente r kann man bei gegebenem Zinsfuß auf n Jahre für einen Kaufpreis c kaufen?

Auflösung. Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

$$8)\qquad r = \frac{c \cdot \%}{100\left[1 - \left(\frac{100}{100 + \%}\right)^n\right]} = \frac{c \cdot \%}{100\left[1 - \frac{1}{q^n}\right]}.$$

10) **Aufgabe.** Auf wie viele Jahre kann man bei gegebenem Zinsfuß eine jährliche Rente r für einen Kaufpreis c erwerben?

Auflösung. Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\%}{100}}\right)^n = 1 - \frac{c\,\frac{\%}{100}}{r} = \frac{r - c\,\frac{\%}{100}}{r},$$

oder

$$\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n = \frac{r}{r - c\,\frac{\%}{100}}.$$

Beiderseitiges Logarithmieren giebt

$$n \lg\left(1+\frac{\%}{100}\right) = \lg r - \lg\left(r - \frac{c\,\%}{100}\right),$$

also ist die Anzahl der Jahre

$$9) \qquad n = \frac{\lg r - \lg\left(r - \frac{c\,\%}{100}\right)}{\lg\left(1+\frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg r - \lg(r - 0{,}01\,c\,\%)}{\lg q}.$$

Im allgemeinen erhält man kein ganzzahliges n, obwohl der Ausgangspunkt der Betrachtung ein solches angenommen hat. Über den überschießenden Bruchteil ist dann besondere Vereinbarung zu treffen.

11) **Bemerkung.** Die Berechnung des Prozentsatzes könnte folgendermaßen eingeleitet werden. Man setze $1 + \frac{\%}{100} = x$, also $\frac{\%}{100} = x - 1$ dann geht Gleichung 7) über in

$$10) \quad cx^n = \frac{r}{x-1}(x^n - 1) = r[x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1].$$

Es handelt sich also um die Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $cx^n(x-1) = r(x^n - 1)$, oder um die Gleichung n^{ten} Grades $cx^n = r[x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1]$. Sobald also n größer als 2 (bezw. 3 oder 4) ist, übersteigt die Aufgabe den Standpunkt der Schule. Renten auf so geringe Anzahl von Jahren zu berechnen, ist aber ohne praktische Bedeutung.

12) **Aufgabe.** Jemand hat c Mark Vermögen, legt es zinsbar an und legt jährlich r Mark Ersparnisse dazu. Wieviel besitzt er nach n Jahren?