Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

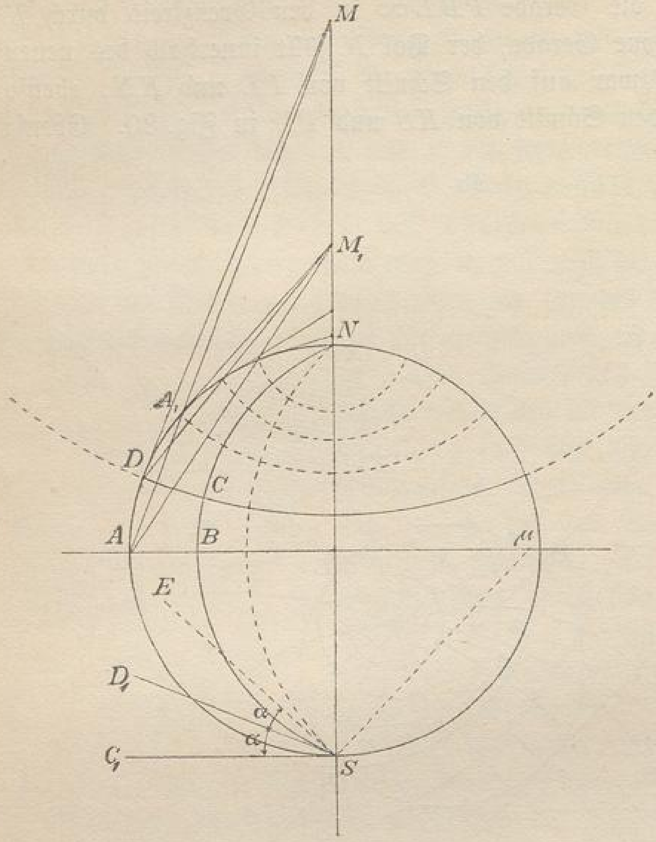
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

a) Graphische Darstellungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Fig. 83.



Auflösung. $ABCD$ in Fig. 83 sei das gegebene „Rechteck". Die Tangente in D giebt M auf SN. Die Gerade MA giebt den Schnitt A_1, die Tangente A_1M_1 giebt den Mittelpunkt für den neuen Kreis der Schar. DM_1 und AM_1 geben zwei neue Teilpunkte u. s. w., so daß man beliebig viele Kreise der Schar zeichnen kann. In S mögen die Tangenten SC_1 und SD_1 der gegebenen Büschelkreise den Winkel α einschließen. Man mache $\sphericalangle D_1SE = C_1SD_1 = \alpha$, errichte auf SE das Lot $S\mu$ bis zur Horizontalen, dann ist μ der Mittelpunkt für den folgenden Büschelkreis u. s. w.

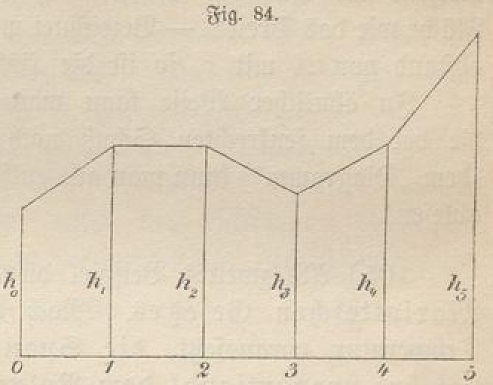
XIII. Der Koordinatenbegriff.

a) Graphische Darstellungen.

103) Statistische Verhältnisse pflegt man auf graphischem (zeichnendem) Wege zu veranschaulichen. So könnten z. B. durch Fig. 84 die Schwankungen in der Frequenz einer Schule für einen Zeitraum von 5 Jahren dargestellt werden. Die gleichen Abschnitte auf der Horizontalen bedeuten die gleichen Zeiträume (Jahre), die regelmäßige Bewegung von 0 bis 5 den Verlauf der Zeit. Die Höhen verhalten

sich wie die entsprechenden Frequenzzahlen. Zunahme im ersten, Gleichbleiben im zweiten, Abnahme im dritten, Zunahme im vierten, verstärkte Zunahme im fünften Jahre sind ohne weiteres zu erkennen.

Fig. 84.

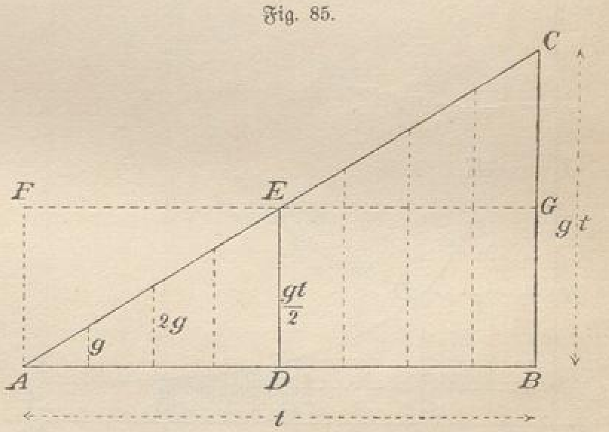


Ebenso veranschaulicht man die Schwankungen in der Bevölkerung von Städten und Staaten, in der Transportmenge von Eisenbahnen und Hafenanlagen, die Schwankungen in der Produktion der Landwirtschaft, der Bergwerke, der Industrie, die Preisschwankungen des Getreides, des Eisens u. s. w., die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks (Barometerstandes), des Wasserstandes der Flüsse, u. s. w. Bei einer größeren Anzahl gleicher Zeiträume kann man die mittlere Höhe als die Veranschaulichung des mittleren Zustandes betrachten.

101) Aus einigen Beispielen wird man den Nutzen solcher Darstellungen für die mathematische Physik erkennen.

Fig. 85 veranschaulicht die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume freifallenden (oder eines von konstanter Triebkraft bewegten) Körpers. Ist g die Geschwindigkeitszunahme für jede Sekunde, so hat der Körper nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $8g$, nach t Sekunden die Geschwindigkeit gt. Die Endpunkte der Geschwindigkeitslote liegen in einer Geraden. Das mittlere Lot giebt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{gt}{2}$ an. Diese,

Fig. 85.



auf die Zeit t ausgedehnt, giebt den Weg $\frac{1}{2}gt^2$, und zwar auch für die beschleunigte Bewegung, der Inhalt des Dreiecks von Basis t und Höhe gt ist ebenfalls $\frac{1}{2}gt^2$. Die Dreiecksfläche stellt also den vom Körper zurückgelegten Weg dar. Die einzelnen Trapezflächen geben den Weg in den einzelnen Sekunden an. Das Rechteck der mittleren Geschwindigkeit $ABGF$ hat natürlich dieselbe Fläche wie das Dreieck. — Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von A mit x, so ist die Höhe an jeder Stelle $y = gx$.

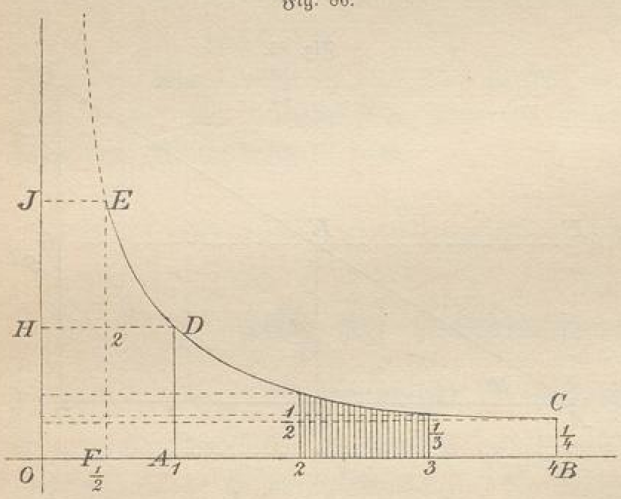
In ähnlicher Weise kann man die Bewegung veranschaulichen, die bei dem senkrechten Schuß nach oben entsteht. Aus der Figur (dem „Diagramm") kann man alle entsprechenden Bewegungsverhältnisse ablesen.

105) Als zweites Beispiel diene die graphische Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Nach diesem ist, wenn man konstante Temperatur voraussetzt, die Spannung einer Gasmenge umgekehrt proportional dem Volumen.

In Fig. 86 ist nun Folgendes dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 der Grundlinie stellen die Volumina 0, 1, 2, 3, 4 dar. An der Stelle 1 ist die Spannung $AD = 1$ angenommen, z. B. gleich 1 Atmosphäre (10 334 kg pro qm der Druckfläche). Dann ist an Stelle 2, 3, 4, ... die Spannung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... als Lot aufzusetzen. Dagegen würde an Stelle $\frac{1}{2}$ das Lot $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ zu zeichnen sein.

Das Diagramm kann nach links bis zur Stelle $x = 0$, nach rechts bis zum unendlichen Bereiche ($x = \infty$) ausgedehnt werden. Die Endpunkte der Lote bilden eine später zu besprechende Kurve, die man als die Mariottesche Kurve bezeichnen kann. (Sie wird wegen Annahme konstanter Temperatur auch als Isotherme bezeichnet.) Gewisse in der Figur angedeutete Rechtecke sind inhaltsgleich, z. B. $OFEJ$ und $OADH$.

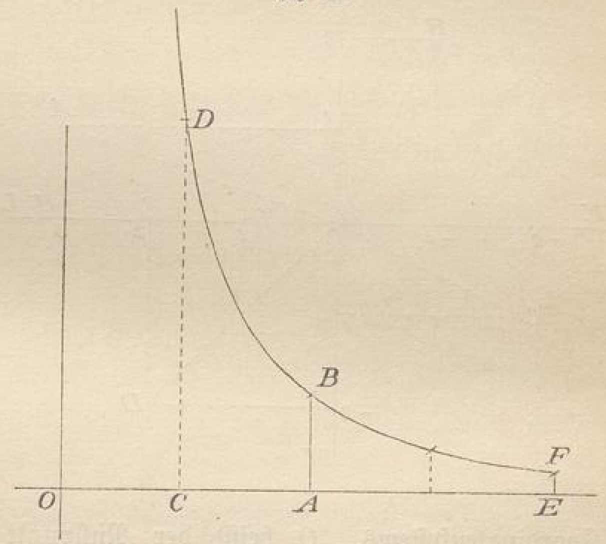
Fig. 86.



Da in der Mechanik das Produkt aus der Kraft und dem Kraftwege Arbeit bedeutet, so stellen die kleinen als Rechtecke aufzufassenden senkrechten Flächenstreifen, wie sie von 2 bis 3 angedeutet sind, Arbeiten dar, die z. B. in Meterkilogrammen zu messen sind. Die Fläche $ABCD$ stellt also die Expansionsarbeit dar, welche die Luft bei der Ausdehnung auf das vierfache Volumen leistet, wenn die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Dagegen stellt die Fläche $ADEF$ die Arbeit dar, die nötig ist, um unter Konstanthaltung der Temperatur dieselbe Luft auf das halbe Volumen zusammenzupressen. Es handelt sich also in Fig. 86 zugleich um das Arbeitsdiagramm für Expansion und Kompression unter der Bedingung konstanter Temperatur. Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von O mit x, so ist die zugehörige Höhe stets $y = \frac{1}{x}$.

[106) Als drittes Beispiel diene die graphische Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Nach diesem ist die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskörper umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Befindet sich z. B. die Sonne in O, die Erde in A (Fig. 87), und stellt AB die Größe der gegenseitigen Anziehung für die Entfernung OA dar, so ist diese für die halbe Entfernung OC viermal so groß, für die doppelte Entfernung OE der vierte Teil. Setzt man also $OA = 1$, und einen beliebigen Horizontalabstand $= x$, so ist die zugehörige Anziehung durch das Lot $y = \frac{AB}{x^2}$ zu veranschaulichen. Auch hier stellt die Fläche zwischen der Kurve und der Horizontalen eine Arbeit dar. Um z. B. den Erdball aus der Entfernung OA in die Entfernung OE zu versetzen, müßte man eine Arbeit leisten, die durch die Fläche $AEFB$ dargestellt wird. [Die Arbeit, die nötig sein würde, die Erde aus der Entfernung OA in unendliche Entfernung zu bringen, wird durch das von A aus

Fig. 87.



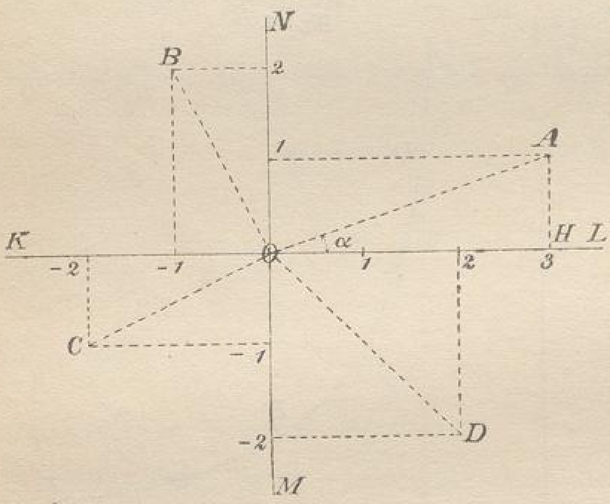
bis ins Unendliche fortgesetzte Diagramm dargestellt und als das Potential für den Punkt A bezeichnet.]

107) Man erkennt, daß sich durch solche Diagramme schwierige Dinge auf einfache Art veranschaulichen lassen. Man bezeichnet den Horizontalabstand vom Anfangspunkte als Abscisse, den Vertikalabstand als Ordinate. Beide tragen noch den gemeinschaftlichen Namen Koordinaten. Um jedoch den mathematischen Verhältnissen noch allgemeiner zu entsprechen, läßt man auch negative Abscissen und Ordinaten zu, und zwar sind die ersteren nach links, die letzteren nach unten gerichtet.

b) Die Koordinaten von Punkten.

108) In Fig. 88 hat der Punkt A die Koordinaten $x = 3$ und $y = 1$; Punkt B hat $x = -1$, $y = 2$; für den Punkt C ist $x = -2$, $y = -1$; für den Punkt D ist $x = 2$, $y = -2$.

Fig. 88.



Diese Punkte liegen der Reihe nach im 1., 2., 3. und 4. Quadranten der Ebene. Den letzteren entsprechen, wie in der Trigonometrie, der Reihe nach die Vorzeichen $++$, $-+$, $--$, $+-$. Die von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade KL heißt die X-Achse, die ebenfalls von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade MN die Y-Achse des Koordinatensystems. O heißt der Nullpunkt des letzteren. Jedem reellen Koordinatenpaare x, y entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Quadrant sich aus den Vorzeichen ergiebt. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Ebene ein reelles Koordinatenpaar.

109) Die Koordinaten x und y bezeichnet man als die Cartesischen Koordinaten, nach Descartes oder Cartesius, der sie zuerst