Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

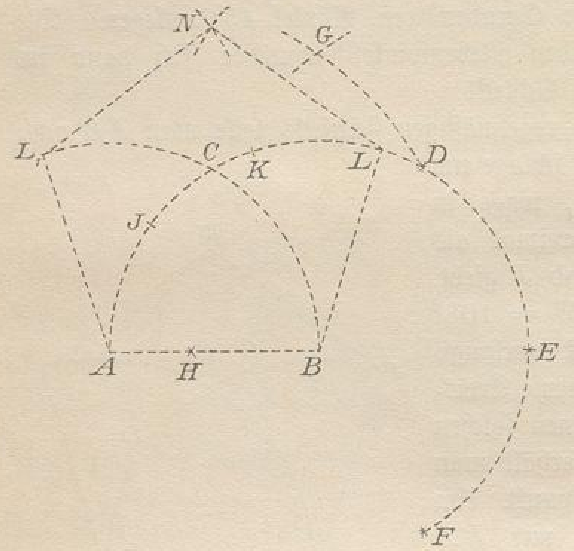
Leipzig, 1897

a) die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Bogen um D und F, die den Schnitt H geben. Trage von A aus auf dem Kreise 3mal BH ab, was J, K und L giebt, dann ist L ein Punkt des Fünfecks. Bogen um A und B mit AB bezw. AL geben L_1, Bogen um L und L_1 mit AB geben N. Die Punkte $ABLNL_1$ sind die Ecken des gesuchten Fünfecks.

Fig. 6.



Das Zehneck konstruiert man nach ihm folgendermaßen. Wiederhole die vorige Konstruktion bis H und schlage um A und B Bogen mit EH, die den Schnitt M geben. Der Kreis um M mit Radius MA ist der Um-Kreis des leicht zu vollendenden Zehnecks.

Versuche beide Konstruktionen als richtig nachzuweisen.

Der große Geometer Steiner hat versucht, die geometrischen Konstruktionen mit dem Lineal allein auszuführen, also ohne den Zirkel. Bei zahlreichen Konstruktionen ergab sich die Möglichkeit dieser Ausführung nur unter der Bedingung, daß in der Ebene ein fester Kreis gegeben war.

II. Übungen an den Dreieckskreisen.

a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

7) Im ersten Teile (Nr. 120, 149, 182) ist Folgendes gezeigt worden: Setzt man bei einem Dreieck mit den Seiten a, b und c

1. $$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p_1 = \frac{-a+b+c}{2},$$
$$p_2 = \frac{a-b+c}{2}, \quad p_3 = \frac{a+b-c}{2},$$

so bedeuten p_1, p_2 und p_3 die Längen der Tangenten, die von den Eckpunkten aus an die benachbarten Berührungskreise gelegt sind.

Zugleich ist $p_1 + p_2 + p_3 = p$; die Radien der Berührungskreise berechnen sich aus

2. $\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}, \quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}}, \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}}, \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}};$

dagegen ist der Inhalt des Dreiecks

3. $F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$

Aufgabe. Leite daraus durch Rechnung folgende Beziehungen ab:

4. $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}.$

(Setze für $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die obigen Werte ein, mache die Brüche gleichnamig und forme ihre Summe so um, daß der Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ entsteht.)

5. $\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = p p_1 p_2 p_3$, also auch $F = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}.$

6. $\varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = p_1 p_2 + p p_3 = ab, \quad \varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = p_2 p_3 + p p_1 = bc,$
$\varrho\varrho_2 + \varrho_3\varrho_1 = p_3 p_1 + p p_2 = ca.$*)

(Die Formel ist leicht als Rechtecksatz in Worten auszudrücken. Zu ihrer Ableitung zeige, daß $\varrho\varrho_3 = p_1 p_2 = \frac{c - (a - b)}{2} \cdot \frac{c + (a - b)}{2} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4}$ ist, bilde ebenso $\varrho_1\varrho_2 = p p_3 = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4}$, und bilde die Summe, die ab giebt.)

7. $\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{2}{h_1}, \quad \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_2},$
$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}.$

(Denn es ist z. B. nach Obigem

$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{p_1}{F} + \frac{p_2}{F} = \frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F} = \frac{2c}{ch_3} = \frac{2}{h_3}$ u. s. w.)

Die Formel läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

7.* $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{2\varrho_2\varrho_3}{\varrho_2 + \varrho_3}, \qquad h_2 = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho} = \frac{2\varrho_3\varrho_1}{\varrho_3 + \varrho_1},$
$h_3 = \frac{2\varrho\varrho_3}{\varrho_3 - \varrho} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}.$

---

*) Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices 1, 2 und 3. Die zweite Formel folgt so aus der ersten, daß 2 statt 1, 3 statt 2, 1 statt 3 geschrieben wird. Ebenso folgt die dritte aus der zweiten. Man erspart dadurch alle Rechnungswiederholungen.

$$8.\quad a = F\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right), \quad b = F\left(\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right),$$
$$c = F\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3}\right).$$

(In der vorigen Beweisführung kam die Gleichung $\frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F}$ vor, also ist $\frac{c}{F} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ u. s. w.) Setzt man in 8. für F seinen Wert $\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$ ein, so wird $a = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}\,\frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_2\varrho_3} = (\varrho_2 + \varrho_3)\sqrt{\frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_2\varrho_3}}$. Ebenso folgt $a = (\varrho_1 - \varrho)\sqrt{\frac{\varrho_2\varrho_3}{\varrho\varrho_1}}$. Aus beiden Gleichungen erhält man durch Multiplikation eine einfachere. Das neue System von Gleichungen ist:

$$9.\quad a^2 = (\varrho_1 - \varrho)(\varrho_2 + \varrho_3), \qquad b^2 = (\varrho_2 - \varrho)(\varrho_3 + \varrho_1),$$
$$c^2 = (\varrho_3 - \varrho)(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Das Quadrat über jeder Dreiecksseite ist also gleich dem Rechteck aus der Differenz und der Summe je zweier der Radien, die Dreiecksseite selbst ist die mittlere Proportionale zur genannten Summe und Differenz.

Solcher Beziehungen lassen sich noch beliebig viele aufstellen, die zum Teil von weiter gehendem Interesse sind. So kann man z. B. in der Gruppe 2. die p und ϱ einfach vertauschen, also $p = \sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho}}$ u. s. w.

8) **Konstruktive Bemerkungen.**

α) Aus Formel 4. erkennt man, daß jeder der vier Radien bestimmt ist, wenn die drei anderen gegeben sind. Um z. B. ϱ aus den übrigen Radien zu konstruieren, kann man mehrere Wege einschlagen.

Aus 4. folgt $\varrho = \frac{\varrho_1(\varrho_2\varrho_3)}{(\varrho_1\varrho_2) + (\varrho_2\varrho_3) + (\varrho_3\varrho_1)}$, wo die Klammern Rechtecke sind, die man in Quadrate verwandeln kann. Die des Nenners lassen sich nach Pythagoras addieren, so daß man hat $\varrho = \frac{\varrho_1 m^2}{n^2} = \left(\frac{\varrho_1 m}{n}\right)\frac{m}{n} = \frac{xm}{n}$. Hier bestimmt sich x aus der Proportion $n : m = \varrho_1 : x$, darauf ϱ aus der Proportion $n : x = m : \varrho$ als vierte Proportionale.

Einfacher und übersichtlicher ist folgender Weg: Man nehme, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gegeben sind, eine beliebige Länge als Einheit an, am bequemsten einen der Radien, z. B. $\varrho_3 = 1$, so daß auch $\frac{1}{\varrho_3} = 1$