Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

V. Allgemeines über die Kegelschnitte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Potentials und gewisse Probleme über stationäre Strömung der Elektricität, der Wärme und der Flüssigkeiten. Ihre Bedeutung für die Geometrie, Stereometrie, für die darstellende Geometrie, Schattenlehre und Perspektive ist eine ebenso große, wie die der anderen Kegelschnitte.

V. Allgemeines über die Kegelschnitte.

37) Weil die Sätze von Pascal und Brianchon von allen Kegelschnitten gelten, so kann man folgende Konstruktionen ausführen:

a) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Punkten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder: aus 4 Punkten und der Tangente in einen von ihnen; aus 3 Punkten und der Tangente in zweien von ihnen.)

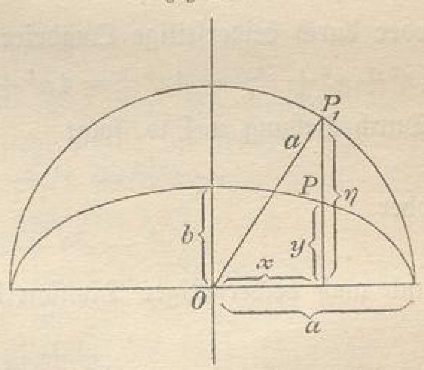
b) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Tangenten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder aus 4 Tangenten und dem Berührungspunkte auf einen von ihnen; aus 3 Tangenten und dem Berührungspunkte auf zweien von ihnen.)

Man kann nämlich die Fünfecke auf beliebig viele Arten zu Pascalschen oder Brianchonschen Sechsecken vervollständigen. Über diese und andere Konstruktionen vergleiche des Verfassers „Einführung" oder Teil III.

Suche zu beweisen, daß der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Kreisen gleiche Entfernung haben, stets ein Kegelschnitt $p \pm q = 2a$ (in einigen speziellen Fällen eine Parabel) ist.

38) **Aufgabe.** Die Hauptgleichungen der Kegelschnitte zu finden.

Fig. 200.



a) Für die Parabel ist bereits gefunden

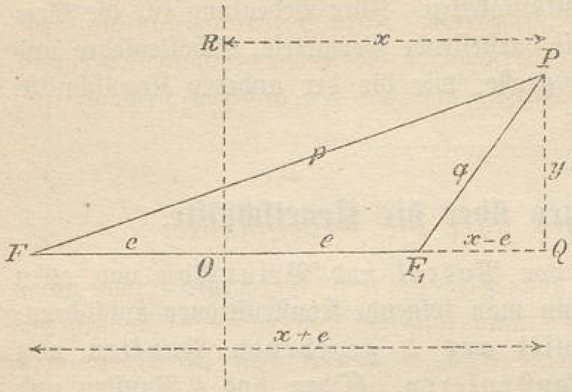
$$y^2 = 2px.$$

b) Ellipse. Für jeden Punkt P_1 des mit Radius a um den Nullpunkt geschlagenen Kreises (Fig. 200) ist $x^2 + \eta^2 = a^2$. Wird jedes η im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkleinert, so wird die neue Höhe $y = \eta \frac{b}{a}$, so daß $\eta = y \frac{a}{b}$ ist.

Für jeden Punkt P der Ellipse ist also, wie die Einsetzung ergiebt,

$$x^2 + \left(y \frac{a}{b}\right)^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Fig. 201.



c) Ellipse und Hyperbel. Setzt man in Fig. 201 $FO = OF_1 = e$, den Abstand RP jedes Kurvenpunktes P von der senkrechten Achse gleich x, den Abstand QP von der horizontalen gleich y, so daß

$$p = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

und

$$q = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

ist, so gehen die Gleichungen für beide Kurven

$$p \pm q = 2a$$

über in

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a,$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$[(x+e)^2 + y^2] + [(x-e)^2 + y^2]$$
$$\pm 2\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) + 2xe} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) - 2xe} = 4a^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + e^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2,$$

also

$$\pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2),$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 + (x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + e^2).$$

Durch Hebung u. s. w. folgt

$$-x^2e^2 = a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2e^2$$

oder

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

und nach beiderseitiger Division durch die rechte Seite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Diese Gleichung gilt für beide Kurven.*) Bei der Ellipse ist aber $a^2 - e^2$ positiv und kann gleich b^2 gesetzt werden, bei der Hyperbel

*) Wiederhole die Rechnung mit Hülfe der Anfangsgleichungen $(x+e)^2 + y^2 = p^2$ und $(x-e)^2 + y^2 = (2a \mp p)^2$, aus denen durch Subtraktion und Umformung folgt $\pm ap = a^2 + ex$, was in die erstere einzusetzen ist.

ist $a^2 - e^2$ negativ und kann gleich $-b^2$ gesetzt werden. Dann ist die Ellipsengleichung, wie vorher,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dagegen die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $b = a$, also

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Dagegen ergiebt sich für die gleichseitige Hyperbel in anderer Stellung (Mariottesche Kurve) $xy = c$ oder $y = \frac{c}{x}$ (z. B. wenn $c = 1$ ist $xy = 1$ und $y = \frac{1}{x}$), wo c das konstante Rechteck bedeutet. (Vergl. Fig. 199.)

39) Mit diesen Gleichungen rechnet man ebenso, wie mit der Kreisgleichung. So ergiebt sich z. B. durch einfache Betrachtungen, die als Übungsaufgaben dienen mögen, Folgendes:

Die Tangente im Punkte x_1y_1 der Parabel $y^2 = 2px$ oder $yy = p(x + x)$ hat die Gleichung

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

die Tangente im Punkte der Ellipse bezw. Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $\frac{xx}{a^2} \pm \frac{yy}{b^2} = 1$ hat die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Dieselben Gleichungen gelten für die Polaren des Punktes x_1y_1, wenn derselbe nicht auf der Kurve liegt. Für die Ellipse läßt sich dies nach der bei Figur 200 angewandten Methode vom Kreise aus beweisen. Für die Parabel folgt es aus Fig. 185.

40) Bedeutung der Worte Parabel, Ellipse, Hyperbel.

Das griechische Wort παραβολή bedeutet Nebeneinanderstellung, Vergleichung und in mathematischer Hinsicht auch Gleichsetzung.

Das Verbum ἐκλείπω bedeutet im Infinitiv „weglassen". Daraus ist das Wort Eklipse oder Ellipse, d. h. „Weglassung" abgeleitet. (Man denke z. B. an die Eklipsen des Mondes und der Sonne, d. h. an die Verfinsterungen, die nur stattfinden können, wenn beide Körper in der scheinbaren Sonnenbahn zusammentreffen oder sich in ihr in Diametralstellung befinden. Die Sonnenbahn wird daher Ekliptik genannt, was als der geometrische Ort der Finsternisse aufgefaßt werden kann.)

Das Wort ὑπερβολή bedeutet ein Übertreffen, z. B. in der Mathematik „das Hinausgehen über einen gewissen Wert".

Den Grund zu den entsprechenden Benennungen der Kegelschnitte erkennt man an ihren Scheitelgleichungen.

Die der Parabel ist nämlich

a) $$y^2 = 2px.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Verschiebt man hier den Nullpunkt des Koordinatensystems auf der X-Achse um $(-a)$, so tritt an Stelle jeder Abscisse ξ eine andere, $x = \xi + a$, so daß $\xi = x - a$ ist. Dagegen ist die Ordinate $y = \eta$ unverändert geblieben. Die Kurvengleichung geht also über in die Scheitelgleichung

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

b) $$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

wo $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt ist.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hier verschiebe man den Nullpunkt um $+a$ (um an den Scheitel von entsprechender Krümmung zu kommen). Man erhält die Scheitelgleichung

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

c) $$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Für die Parabel ist also $y^2 = 2px$, für die Ellipse $y^2 < 2px$, für die Hyperbel $y^2 > 2px$, so daß die Gleichsetzung, das Weglassen eines gewissen Wertes und das Hinausgehen über einen gewissen Wert leicht erkennbar sind.

41) Die neuen, p enthaltenden Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gehen in die der Parabel über, sobald $a = \infty$ gesetzt wird. Die Größe p kann als eine Art von Parameter betrachtet werden. Für

die Parabel ist ihre Bedeutung bereits erklärt worden. Für die Ellipse und die Hyperbel kann p mit Hülfe der Proportion $a : b = b : p$, die mit der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ übereinstimmt, leicht konstruiert werden. Bei allen drei Kegelschnitten ist p die positive Ordinate im Brennpunkte (bezw. in beiden Brennpunkten) der Kurve. Man erkennt dies, wenn man in die Gleichungen $y^2 = 2px$ und $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Werte $x = \frac{p}{2}$ bezw. $x = \pm e$ einsetzt und y berechnet.

42) Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem gegebenen Punkte (F) und einer gegebenen Geraden (LN) ein konstantes Verhältnis $\frac{m}{n}$ haben, ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{m}{n} \lesseqgtr 1$ ist.

Beweis. In Fig. 185 sei $SF : NS = m : n$, ebenso $FP : F_2P = m : n$. Wird also $NF = l$ gesetzt, so ist $FP = \sqrt{(x - SF)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2}$ und $F_2P = x + NS = x + \frac{n}{m+n}l$. Die Gleichung $FP^2 = \frac{m^2}{n^2}F_2P^2$ geht also über in

$$\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{n^2}\left(x + \frac{n}{m+n}l\right)^2,$$

was sich umformen läßt zu

$$y^2 = \frac{2lm}{n}x + x^2\left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right).$$

Nach Obigem ist dies die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Faktor von x^2 negativ, oder Null, oder positiv ist. Dabei wird $p = \frac{lm}{n}$ und $a = \frac{n^2}{m^2 - n^2}p = \frac{lmn}{m^2 - n^2}$.

[43) Dreht sich ein Kegelschnitt um eine seiner Achsen, so entsteht ein Drehungs-Ellipsoid oder Drehungs-Paraboloid oder Drehungs-Hyperboloid, von denen das letztere einmantelig oder zweimantelig sein kann, je nach Wahl der Drehungsachse. Bei sämtlichen diesen Körpern ist die aus der Höhe y berechnete Querschnittsfläche q_y höchstens vom 2^{ten} Grade, also läßt sich bei allen der Inhalt nach der Simpson-Regel oder der Summenformel berechnen.

Dasselbe gilt von ihren Cavalierischen Erweiterungen, bei denen die Kreisquerschnitte in ähnliche Ellipsen übergehen.

Auch über diese Körper bietet die „Einführung" Übungsaufgaben, ebenso Teil III. Die einfachste Inhaltsformel hat das Drehungsparaboloid. Aus $y : h = x^2 : r^2$ (in Fig. 202) folgt nämlich $y : h = x^2\pi : r^2\pi$, also Querschnitt $q_y = x^2\pi y = \frac{r^2\pi y}{h} = \frac{G}{h} y$. Da der Querschnitt ein solcher ersten Grades ist, so ergiebt sich nach Nr. 64 als Inhalt $J = \frac{G}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} Gh$, d. h. die Hälfte des Cylinders. (Vgl. Fig. 202.)

Fig. 202.

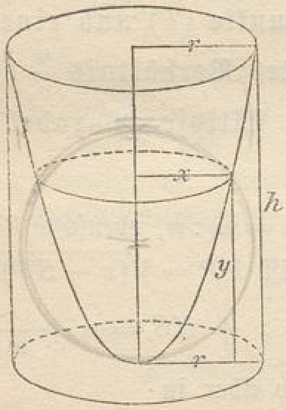
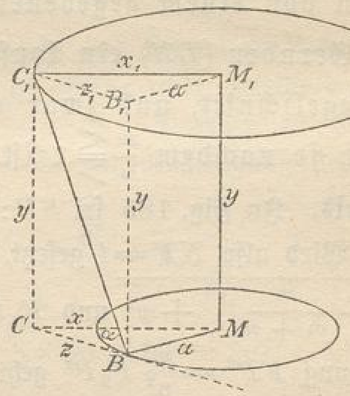


Fig. 203.



Daß der in Fig. 115 dargestellte Körper, der durch Drehung einer Geraden um eine sie schräg kreuzende Achse entsteht, ein Rotationshyperboloid ist, ergiebt sich folgendermaßen: MM_1 in Fig. 203 sei die Drehungsachse, BC_1 die sie kreuzende Gerade, BC ihre Projektion auf die Grundfläche, in der $MB = a$, das gemeinschaftliche Lot der Geraden MM_1 und BC_1 liegt, so daß BC Tangente ist. Dann ist $x^2 - z^2 = a^2$, also, da $z = \frac{y}{\tan\alpha}$ ist, $x^2 - \frac{y^2}{\tan^2\alpha} = a^2$, oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\tan\alpha)^2} = 1\,.$$

Dies stimmt überein mit der Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen a und $b = a\tan\alpha$, deren Asymptotenneigung also gleich α ist. D. h. die Entfernung x der Geraden BC_1 von der Achse wird für jede Höhe y ebenso berechnet, wie die Abscisse der genannten Hyperbel. Bei der Rotation gilt dies von jeder Lage der Geraden BC_1, so daß es sich hier nur um ein Drehungshyperboloid handeln kann.

Übungsmaterial über die Kegelschnittsflächen bietet die „Einführung in das stereometrische Zeichnen".]