



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen
bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

I. Die Ellipse als Zylinderschnitt.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93613](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93613)

Fünfte Abteilung.

Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

1) **Vorbemerkung.** Jeder ebene Schnitt durch einen senkrechten oder schiefen Kreisegel heißt ein Kegelschnitt. Auch der senkrechte und schiefe Kreiszylinder kann als Kegel betrachtet werden, nur liegt bei ihm die Spitze in unendlicher Entfernung. Demnach gehören die Schnitte solcher Cylinder zu den Kegelschnitten. Über den Kegelschnitten lassen sich ebenfalls Cylinder und Kegel errichten. Es läßt sich zeigen, daß auch die ebenen Schnitte dieser Gebilde Kegelschnitte im gewöhnlichen Sinne geben. Ist dies der Fall, so bedeutet es nur eine Auffassung von einem anderen Gesichtspunkte aus, wenn man sagt, jede Parallel- oder Centralprojektion eines Kegelschnittes giebt wieder einen Kegelschnitt. Es läßt sich vermuten, daß, da der Kreis ein Kegelschnitt ist, zahlreiche seiner Eigenschaften sich auf die übrigen Kegelschnitte übertragen lassen oder auf besondere Eigenschaften der letzteren hinführen. Noch sei bemerkt, daß in der analytischen Geometrie jeder Kegelschnitt eine ebene Kurve ist, in deren Gleichung die Koordinaten in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommen, und daß umgekehrt jede ebene Kurve zweiten Grades einen Kegelschnitt bedeutet. Es handelt sich also hier um ein in sich vollkommen abgerundetes Gebiet der Elementarmathematik, in welches jedoch hier nur ein Einblick gegeben werden soll.

I. Die Ellipse als Cylinderschnitt.

2) Figur 175 stellt einen senkrechten Kreiszylinder (in der Parallelperspektive 1 : 2 mit Neigung 90°) dar. Durch den Punkt M_1

punkten desselben (AD und BC) sind parallel zur Sehnen-
schar. Die Tangenten in den Endpunkten des zur Sehnen-
schar gehörigen Durchmessers
 GH , also AB und CD , sind
parallel zu dem halbierenden
Durchmesser EF . Die Sehnen
der Parallelschar stehen bei
der Ellipse unter einander
in demselben Verhältnis, wie
die entsprechenden Sehnen
beim Kreise. So ergibt sich
z. B. Folgendes:

Legt man die in demselben
Verhältnis verlängerte oder
verkürzte Parallelschar von
Sehnen eines Kreises
in beliebiger Richtung
als Parallelschar an
den Durchmesser an
(wie es vorher unter
 90° geschah), so ent-
steht eine Ellipse.

Fig. 177.

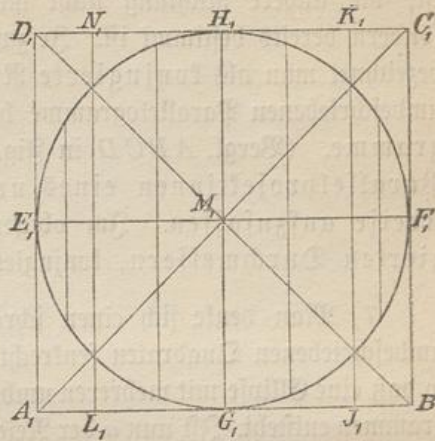
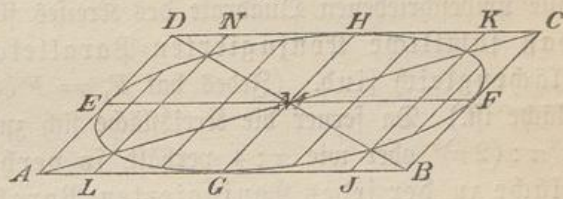


Fig. 178.



5) An dieser Ellipse kann man mit jeder Parallelschar dasselbe
wiederholen, stets entsteht wieder eine Ellipse, die man auch direkt
aus dem Kreise entstehen lassen könnte. Dasselbe erreicht man, indem
man über einer Ellipse einen beliebigen schrägen Cylinder konstruiert
und diesen durch eine ganz beliebige Ebene schneidet. Folglich:

Jeder ebene Schnitt durch jeden beliebigen (senkrechten
oder schiefen) elliptischen Cylinder ist eine Ellipse, jede be-
liebige Parallelprojektion der Ellipse ist eine Ellipse. Im
speziellen Falle treten Kreise an die Stelle der Ellipse. An jedem
elliptischen Cylinder lassen sich Kreischnitte auffinden.

Der Kreis und die Kugel erscheinen in schräger Parallel-
perspektive stets als Ellipse, ihr von der Sonne auf eine
Ebene geworfener Schatten ist stets eine Ellipse. (Tangenten-
cylinder der Sonnenstrahlen an der Kugel.)

6) Halbiert man zwei parallele Sehnen der Ellipse, so erhält man
durch Verbindung der Halbierungspunkte den halbierenden Durchmesser
der Sehnenchar, und die Figur läßt sich zu einem umbeschriebenen

Parallelogramm ergänzen, dessen Berührungspunkte den Mittellinien angehören. Diese besondere Art umbeschriebener Parallelogramme hat die Eigentümlichkeit, daß, wenn die eine Richtung gegeben ist, die andere Richtung nicht mehr beliebig gegeben werden kann, sondern bereits bestimmt ist. Je zwei so zusammengehörige Richtungen bezeichnet man als konjugierte Richtungen, die durch sie gegebenen umbeschriebenen Parallelogramme heißen Konjugierten-Parallelogramme. (Vergl. $ABCD$ in Fig. 178.) Die letzteren sind stets als Parallelprojektionen eines umbeschriebenen Quadrates am Kreise aufzufassen. Im obigen Sinne spricht man von konjugierten Durchmesser, konjugierten Sehnen u. s. w.

7) Man denke sich einen schräg liegenden Kreis mit mehreren umbeschriebenen Quadraten senkrecht auf die Horizontalebene projiziert, so daß eine Ellipse mit mehreren umbeschriebenen Konjugierten-Parallelogrammen entsteht. Ist nun α der Neigungswinkel der Kreisebene, so erhält jeder Flächenteil F in der Projektion den Inhalt $F \cos \alpha$. Da aber alle umbeschriebenen Quadrate des Kreises flächengleich sind, so folgt, daß sämtliche Konjugierten-Parallelogramme der Ellipse flächengleich sind. (Jedes hat $F_1 = F \cos \alpha$, wo F die Quadratfläche ist.) Da ferner die Kreisfläche sich zur Quadratfläche hier wie $r^2 \pi : (2r)^2$ oder wie $\pi : 4$ verhält, so verhält sich die Ellipsenfläche zu der jedes Konjugierten-Parallelogramms wie $\pi : 4$. So ist z. B. der Inhalt des Hauptrechtecks der Ellipse mit den Halbachsen a und b gleich $4ab$, folglich ist die Ellipsenfläche gleich $(4ab) \frac{\pi}{4} = ab\pi$, was sich auch aus der zuerst gegebenen Konstruktionsmethode (in Nr. 2) ohne weiteres ableiten läßt.

Sind ferner c und d die unter dem Winkel α aneinander stoßenden Seiten des Konjugierten-Parallelogramms, so ist dessen Flächeninhalt $F_1 = cd \sin \alpha$, der der zugehörigen Ellipse also, die in den Schnittpunkten der Mittellinien berührt, ist

$$F = \frac{\pi}{4} cd \sin \alpha.$$

Da sich in das Parallelogramm noch andere Berührungsellipsen einzeichnen lassen, sei die besprochene als die Hauptellipse des Parallelogramms bezeichnet. [Den Umfang der Ellipse zu berechnen, ist mit elementaren Hilfsmitteln nicht möglich.]

8) Einige Übungsaufgaben.

a) Zu einer gegebenen Ellipse den Mittelpunkt und die Achsen zu finden.

Auflösung. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen bestimmen einen Durchmesser, dessen Halbierung den Mittelpunkt giebt. Ein Kreis um den letzteren, der die Ellipse in vier Punkten schneidet, giebt Sehnen, deren Richtungen mit den Achsenrichtungen übereinstimmen.

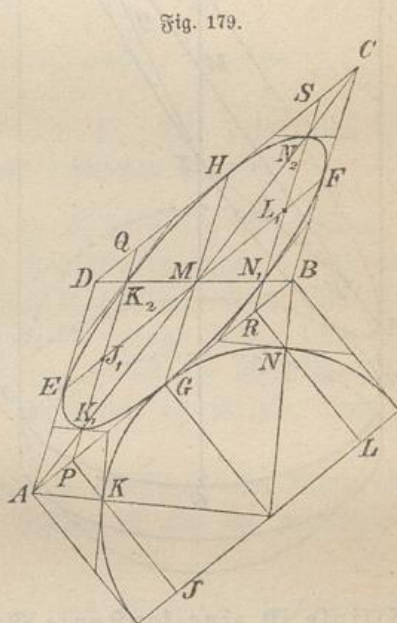
b) In einem Ellipsenpunkte die Tangente zu konstruieren.

Auflösung. Ziehe den zum Punkte gehörigen Durchmesser, halbiere ihn und ebenso eine parallele Sehne. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte giebt die Tangentenrichtung.

c) In ein gegebenes Parallelogramm die Hauptellipse einzuzeichnen.

Auflösung. Man zeichne über der Grundlinie ein Quadrat mit dem einbeschriebenen Kreise und stelle Fig. 177 und 178 her. (Vergl. auch Fig. 179.)

9) Wink für die Parallelperspektive. Soll in das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 179) die Hauptellipse schnell einskizziert werden, so ziehe man die Diagonalen AC und BD und durch ihren Schnittpunkt M die Mittellinien EF und GH , welche die Berührungspunkte geben. Die Halbkreisloten JK und LN geben Parallele PQ und RS mit den Ellipsenpunkten K_1, K_2, N_1, N_2 , durch welche Parallele zu den Diagonalen zu legen sind. So erhält man 8 Tangenten mit den Berührungspunkten, was zum Skizzieren der Ellipse ausreicht. Der Vergleich mit der Kreisfigur ergiebt die Richtigkeit.

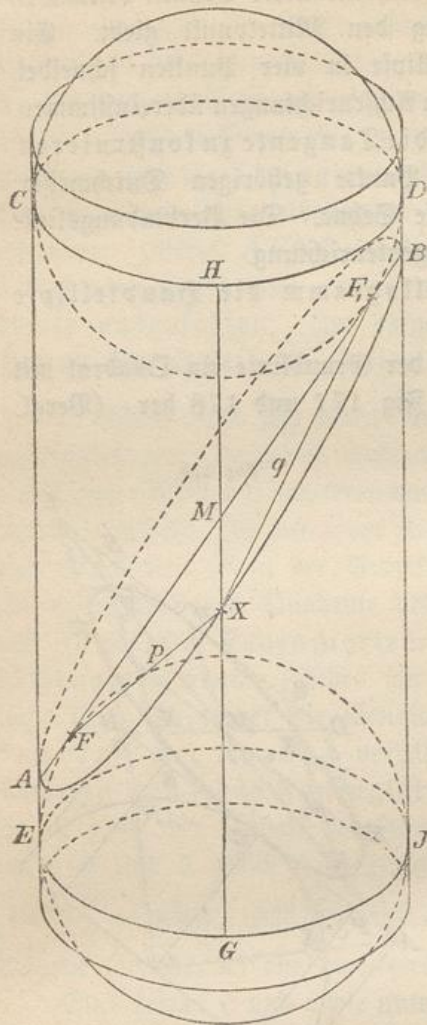


Anderer Übungen findet man in der „Einführung in das ster. Zeichnen“. Die Sätze über Pol und Polare, ebenso die Sätze von Pascal und Brianchon gelten auf Grund der Parallelprojektion von der Ellipse ebenso, wie vom Kreise.

10) Berührungskugeln und Brennpunkte der Ellipse.

Fig. 180 stellt einen Kreiszylinder mit schräger Schnittebene dar, in den Berührungskugeln soweit eingeschoben sind, daß sie die Schnittebene in F und F_1 berühren. [Von diesen Kugeln sind in Fig. 180 nur die Hauptkreise gezeichnet, denn genau genommen

Fig. 180.



müßten die Kugeln als Ellipsen erscheinen.] Verbindet man einen beliebigen Punkt X der Schnittcurve mit F und F_1 und legt man durch X die Gerade GH auf der Cylinderfläche, die von dem Berührungskreise CD bis zum Berührungskreise EJ reicht, so sind FX und XG als Tangenten an die untere Kugel einander gleich, ebenso F_1X und XH als Tangenten an die obere Kugel, folglich ist $FX + XF_1 = GX + XH$, oder $p + q = GH$. Nun ist aber der Abstand GH der parallelen Kreise CD und EJ überall derselbe, folglich muß auch die Liniensumme $p + q$ für alle Punkte der Schnittcurve dieselbe Größe haben. Man nennt F und F_1 aus einem später zu erörternden Grunde die Brennpunkte der Ellipse, ihre Verbindungslinien mit einem beliebigen Punkte der Peripherie bezeichnet man als zusammengehörige Brennstrahlen. Man hat also den Satz:

Die Summe zusammengehöriger Brennstrahlen der

Ellipse ist eine konstante Größe.

AB ist die große Achse der Ellipse. Auf ihr liegen F und F_1 in derselben Entfernung e von M . Man nennt e die Brennweite der Ellipse.

11) Aufgabe. Eine Ellipse von gegebener Brennweite e zu konstruieren, für welche die konstante Summe der Brennstrahlen gleich $2a$ ist.

Auflösung. Man lege $FF_1 = 2e$ (Fig. 181) beliebig hin. Auf $KL = 2a$ wähle man einen beliebigen Teilpunkt Z und schlage mit $KZ = p$ und $ZL = q$ Kreisbogen um F und F_1 , die sich in zwei Punkten P und P_1 schneiden. Wechselt man für jede Zirkelöffnung den Brennpunkt, so findet man noch P_3 und P_4 , also im ganzen

und denkt man sich diese von der Ellipse (nach dem bekannten optischen Gesetze der Gleichwinkeligkeit) reflektiert, so vereinigen sich sämtliche zurückgeworfenen Strahlen im anderen Brennpunkte.

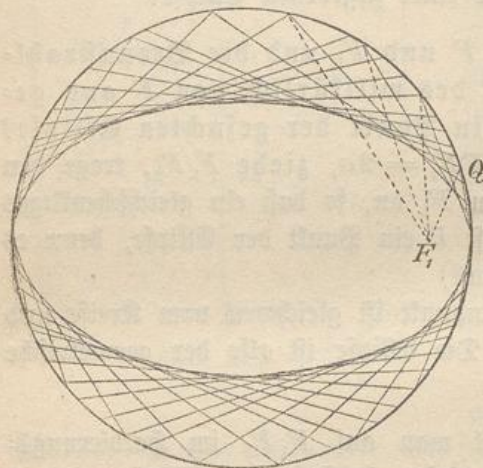
(Fallen hingegen von außen Lichtstrahlen in der Richtung nach dem einen Brennpunkte ein, so werden sie so zurückgeworfen, als ob sie aus dem anderen Brennpunkte kämen.)

Der Name Brennpunkt ist also optischen Ursprungs.

14) Alle möglichen Punkte F_2 liegen auf einem Kreise mit Radius $2a$ um den Mittelpunkt F , folglich die Halbierungspunkte Q aller möglichen Geraden F_1F_2 auf einem Kreise mit dem halb so großen Radius a (gesetzmäßige Verkleinerung $\frac{1}{2}$ mit äußerem Ähnlichkeitspunkte F_1). Man merke also noch folgende beiden Konstruktionen:

a) Schlägt man einen Kreis um F mit dem Radius $F_1F_2 = 2a$, verbindet man jedes F_2 mit F_1 , und errichtet

Fig. 182.



man in dem Halbierungspunkte Q auf jedem F_1F_2 ein Lot, so erhält man als Schnittpunkte mit dem entsprechenden FF_2 lauter Ellipsenpunkte P .

b) Hat man einen Kreis mit Radius a (Fig. 182) und in ihm einen beliebigen Punkt F_1 , und errichtet man auf jedem Strahle F_1Q im Punkte Q der Peripherie ein Lot, so schattiert man die Ellipse durch lauter Tangenten aus. (Der

Kreis wird der umbeschriebene Kreis der Ellipse.) Diese Konstruktion ist mit Hilfe des Winkeldreiecks leicht auszuführen. Legt man die Lote dicht genug an einander, so ist ein Ausziehen der Kurve überflüssig.

II. Die Ellipse als Kegelschnitt.

15) Fig. 183 stellt einen senkrechten Kreiskegel dar, der durch eine schräge Ebene geschnitten ist, die nur den einen Mantel, nicht seine Erweiterung nach oben trifft. In den Regel sind Berührungspunkte