Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

VI. Berechnungsübungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Beweis.

$$FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2$$

$$= a^2 + d^2 + b^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = 4a^2.$$

(Vgl. Geom. 5a.) Also ist $FC = 2a = FG = GC$, d. h. FCG ein gleichseitiges Dreieck. Dasselbe gilt von den 19 anderen Dreiecken, so daß der Körper von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. An ihm lassen sich entsprechende Berechnungen anstellen, wie am Dodekaeder. Es ergiebt sich

$$\varrho = a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}, \quad J = a\sqrt{3}\,\frac{3+\sqrt{5}}{12}.$$

VI. Berechnungsübungen.

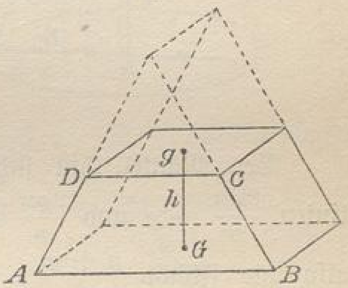
a) Körperstumpfe.

Unter Körperstumpf versteht man einen einfach gestalteten Körper, der von zwei parallelen Grundflächen G und g begrenzt ist.*)

32) Stumpf des Dachkörpers. Sind G und g die beiden Grundflächen, und ist h die Höhe, so ist der Inhalt

$$J = \frac{G+g}{2}h.$$

Fig. 139.



Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe der Inhaltsformel des Trapezes $ABCD$, welches ebenfalls als Grundfläche benutzt werden kann.

Der mittlere Horizontalschnitt $\frac{G+g}{2}$ befindet sich in halber Höhe.

33) Stumpf des Kreiskegels. Fig. 140 stellt zunächst den Stumpf des senkrechten Kreiskegels dar, der andeutungsweise zum vollständigen Kegel ergänzt ist; r und ϱ seien die Grundradien, h die Höhe des Stumpfes, x die des ganzen Kegels. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD und BAM folgt $(r-\varrho):h = r:x$, also $x = \frac{hr}{r-\varrho}$.

*) Im Unterrichte empfiehlt es sich, die beiden Grundflächen der Stumpfe als G_1 und G_2 zu bezeichnen. Hier wurden sie mit Rücksicht auf die vorhandenen Clichés mehrfach als G und g bezeichnet.

Der Stumpf ist gleich dem ganzen Kegel vermindert um den Ergänzungskegel, also

$$J = \frac{r^2\pi x}{3} - \frac{\varrho^2\pi(x-h)}{3} = \frac{\pi}{3}\left[x(r^2-\varrho^2)+\varrho^2 h\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{hr}{r-\varrho}(r+\varrho)(r-\varrho)+\varrho^2 h\right],$$

also

1) $$J = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r\varrho + \varrho^2\right].$$

Bringt man π in die Klammer, so erhält man in dieser $r^2\pi = G$, $\varrho^2\pi = G_1$, $r\varrho\pi = \sqrt{(r^2\pi)(\varrho^2\pi)} = \sqrt{G\cdot G_1}$, wo G und G_1 die beiden Grundflächen sind. Man hat also die Inhaltsformel

2) $$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{GG_1} + G_1\right].$$

Fig. 140.

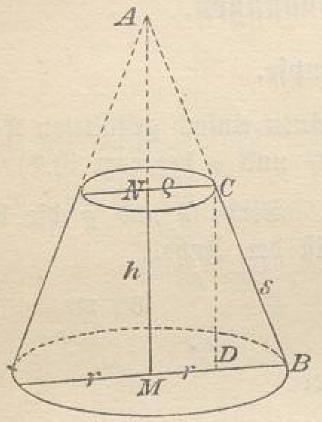
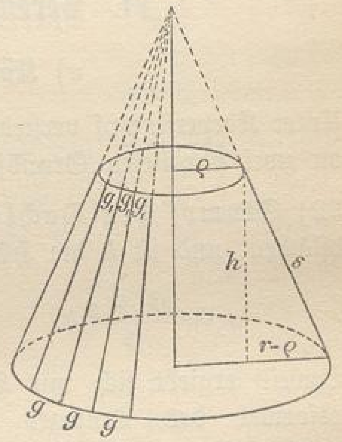


Fig. 141.



Der Mantel läßt sich in n schmale Trapeze mit den Grundlinien $\frac{2r\pi}{n} = g$ und $\frac{2\varrho\pi}{n} = g_1$ einteilen, von denen jedes die Höhe s, also die Fläche $\frac{g+g_1}{2}s = \frac{\pi}{n}\left(r+\varrho\right)s$ hat. Der Mantel des Stumpfes hat also die Fläche

3) $$M = (r+\varrho)\pi s.$$

Statt s kann gesetzt werden

$$s = \sqrt{(r-\varrho)^2 + h^2}.$$

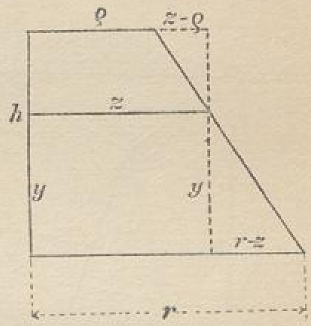
34) **Aufgabe.** In welcher Höhe befindet sich die mittlere Querschnittsfläche des Kegelstumpfes?

Auflösung. Ist ihr Radius gleich z, so müßte sein:
Inhalt = mittlerer Schnitt mal Höhe, also

$$J = z^2 \pi h = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r\varrho + \varrho^2\right],$$

also $z = \sqrt{\frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3}}$. Um die Höhe y zu finden, in der sich dieser Radius z befindet, benutze man die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Fig. 142 folgende Proportion

Fig. 142.



$$(r - z) : y = (z - \varrho) : (h - y),$$

woraus folgt

$$y = \frac{h(r - z)}{r - \varrho},$$

wo der Wert von z einzusetzen ist. (Der mittlere Querschnitt befindet sich also nicht etwa in halber Höhe.)

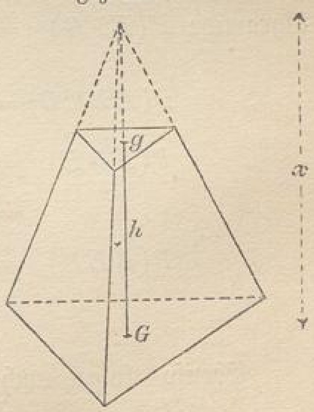
Bemerkung. Die Inhaltsformel (nicht aber die Mantelformel) gilt nach dem Satze des Cavalieri auch für den Stumpf des schiefen Kreiskegels.

35) Pyramidenstumpf. Nach Teil I, Ster. Nr. 26 haben Kegel und Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in demselben Niveau gleiche Horizontalschnitte. Haben also Kegel- und Pyramidenstumpf gleiche Grundflächen G und g und dieselbe Höhe h, so haben die ergänzten Körper dieselbe Höhe x. Demnach sind auch die Stumpfe nach Cavalieri inhaltsgleich. Folglich ist auch für den Pyramidenstumpf

$$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{Gg} + g\right].$$

Selbständig ergiebt sich dies folgendermaßen: Der Parallelschnitt in Fig. 143 schneidet einen der ganzen Pyramide ähnlichen Körper ab, folglich ist

Fig. 143.



$$G : g = x^2 : (x - h)^2,$$

denn in ähnlichen Körpern verhalten sich homologe Flächen wie die Quadrate homologer Linien. Daraus folgt

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : (x - h)$$

und

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Setzt man dies in

$$J = \frac{Gx}{3} - \frac{g(x-h)}{3} = \tfrac{1}{3}\left[x(G-g) + gh\right]$$

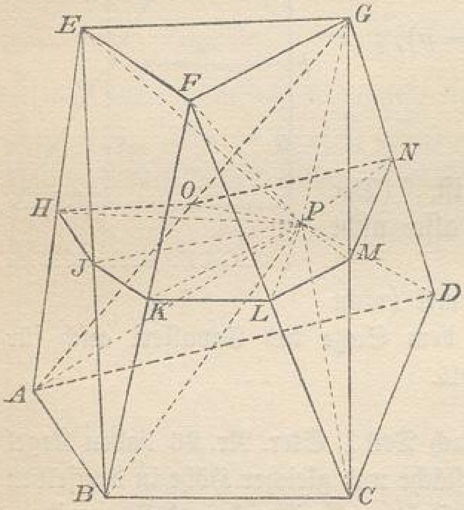
ein, so entsteht

$$J = \tfrac{1}{3}\left[\frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\left(\sqrt{G}+\sqrt{g}\right)\cdot\left(\sqrt{G}-\sqrt{g}\right) + gh\right],$$

oder endlich

$$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{Gg} + g\right].$$

Fig. 144.



36) Ebenflächiges Prismatoid. Man versteht darunter einen Körper, dessen parallele Grundflächen Vielecke sind, während als Seitenflächen im allgemeinen nur Dreiecke auftreten, von denen jedoch zwei benachbarte zu einem ebenen Viereck zusammenfallen können (sobald die obere und die untere Kante parallel sind). In Fig. 144 ist als untere Grundfläche ein Viereck $ABCD$, als obere ein Dreieck EFG gewählt. Die Halbierungspunkte der Seitenkanten liegen in einem Horizontalschnitte. Die untere Grundfläche U bezeichne man als Unterschnitt, die obere O als Oberschnitt, die in halber Höhe durchgelegte Fläche M als Mittelschnitt, der hier $4 + 3 = 7$ Seiten hat, im allgemeinen $m + n$ Seiten haben kann.

Ein beliebiger Punkt P des Mittelschnitts werde mit allen Ecken der drei Schnitte verbunden. Dann erhält man folgende Körper und Körperinhalte:

Pyramide $P(EFG) \;\;= \frac{h}{2}\frac{O}{3} = \frac{hO}{6}$,

„ $P(ABCD) = \frac{h}{2}\frac{U}{3} = \frac{hU}{6}$,

„ $P(ABE) \;\;= 4 \cdot$ Pyramide $P(HJE)$

$= 4 \cdot$ Pyramide $E(HJP) = 4 \cdot HJP \cdot \frac{h}{6}$,

„ $P(BEF) \;\;= 4 \cdot$ Pyramide $P(JKB)$

$= 4 \cdot$ Pyramide $B(JKP) = 4 \cdot JKP \cdot \frac{h}{6}$.

Ebenso folgt noch $4KLP \cdot \frac{h}{6}$, $4LMP \cdot \frac{h}{6}$, $4MNP \cdot \frac{h}{6}$,

$4 NOP \frac{h}{6}$ und $4 OPH \frac{h}{6}$. Dabei geben die den Faktor 4 enthaltenden Inhalte zusammengenommen den Mittelschnitt M multipliziert mit $\frac{4h}{6}$. Der ganze Körper hat also den Inhalt

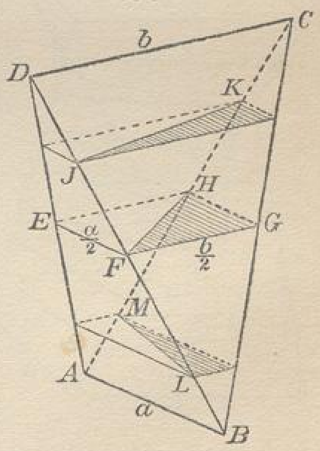
$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M].$$

Er hat diese Inhaltsformel, die Newton-Simpsonsche Formel, mit zahlreichen anderen Körpern gemein, so daß das ebenflächige Prismatoid nur ein spezieller Fall eines weit allgemeineren Körpers ist.

Spezielle Fälle des Prismatoids sind das Prisma, der Dachkörper, bei dem die eine Grundfläche Null ist, die Pyramide und der Kegel, bei denen dasselbe stattfindet und die Stumpfe der letztgenannten Körper. Von ihnen gilt also die genannte Inhaltsformel. Sie dient jedoch bei diesen nicht zur Berechnung, sondern zum Nachweis wichtiger Sätze.

[37) Das Halbtetraeder. Jedes beliebige Tetraeder (Fig. 145) kann mit der Kante a auf einen horizontalen Tisch gestellt und um diese Kante so gedreht werden, daß schließlich auch die Kante b horizontal ist. Dann ist der Körper der Spezialfall des Prismatoids, bei dem das obere und das untere Polygon zu geraden Linien geworden sind. Ist also $EFGH$ der horizontale Mittelschnitt M, und ist h der senkrechte Abstand der Kanten a und b, so ist der Inhalt des Körpers $J = \frac{h}{6}[U + O + 4M]$, oder, da $U = 0$ und $O = 0$ ist, $J = \frac{2}{3} h M$. (Der Mittelschnitt ist ein Parallelogramm mit den Seiten $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$, die denselben Winkel γ einschließen, unter dem sich die Geraden a und b kreuzen. Es ist also

Fig. 145.



$$M = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin \gamma$$

und

$$J = \tfrac{4}{6} h \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sin \gamma = \frac{abh}{6} \sin \gamma.)$$

Zieht man nun zahlreiche Horizontalschnitte, so erkennt man, daß jeder ein Parallelogramm ist, welches durch die Diagonale JK bezw. FH, LM u. s. w. halbiert wird. Die Gesamtheit dieser Diagonalen giebt eine gekrümmte Fläche, das sogenannte windschiefe Viereck $ABCD$, dessen gerade Horizontalen der Reihe nach von der Richtung DC aus in die Richtungen JK, FH, LM, BA übergehen. Nach dem Satze des Cavalieri wird das Tetraeder durch diese windschiefe Fläche in zwei inhaltsgleiche Körper geteilt, die sogenannten Halbtetraeder. Jedes derselben hat den Mittelschnitt $M_1 = \frac{M}{2}$ und den Inhalt $J = \frac{2}{3} h M_1 = \frac{h}{6}[U + O + 4 M_1]$, wo $U = 0$ und $O = 0$ ist. Folglich: Das Halbtetraeder gehorcht der Newton-Simpsonschen Formel.

38) Das Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen. Läßt man in dem ebenflächigen Prismatoid Fig. 144 an Stelle zweier benachbarter Seitendreiecke eine windschiefe Vierecksfläche mit horizontalen Geraden treten, so schneidet man vom Gesamtkörper ein Halbtetraeder von der besprochenen Stellung ab. Ist der abgeschnittene Teil des Mittelschnitts M_1, so bleibt ein Körper übrig vom Inhalte

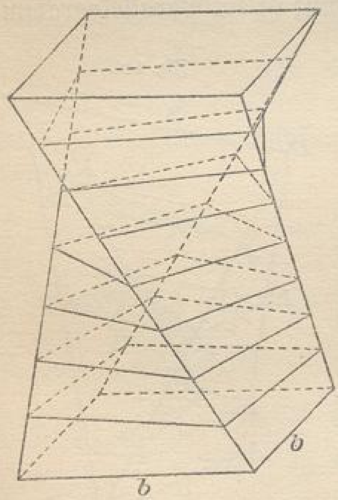
$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4 M) - \frac{4h}{6} M_1 = \frac{h}{6}[U + O + 4(M - M_1)],$$

wo $M - M_1$ der neue Mittelschnitt ist. Folglich gilt die Simpsonsche Regel auch weiter, wenn man an Stelle von beliebig vielen der benachbarten Dreieckspaare windschiefe Flächen der besprochenen Art treten läßt. Also:

Der Inhalt des Prismatoids mit (teilweise oder ausnahmslos) windschiefen Seitenflächen (die durch horizontale Geraden gebildet sind) ist

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4 M).$$

Fig. 146.



39) Fig. 146 stellt den Spezialfall dar, bei dem die Grundflächen gleichliegende Quadrate sind. In diesem Falle ist der Mittelschnitt, wie man durch Herunterprojizieren erkennt, die Hälfte der Grundfläche b^2, also

$$J = \frac{h}{6}\left[b^2 + b^2 + 4\frac{b^2}{2}\right] = \frac{2}{3} b^2 h,$$

d. h. $\frac{2}{3}$ des zugehörigen Prismas.

40) Sind die Grundflächen regelmäßige Polygone von unendlicher Seitenzahl, also Kreise, so entsteht das durch Fig. 115 dargestellte Drehungshyperboloid, dessen Inhalt also ebenfalls

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4\,M]$$

ist. Besonders einfach wird die Formel, wenn der Mittelschnitt diesen Körper, wie in der Figur, in zwei kongruente Teile zerlegt. Dann wird

$$J = \frac{h}{6}[U + U + 4M] = \frac{h}{3}[U + 2\,M].$$

Bemerkung. Aus dem bei dem windschiefen Prismatoid angewandten Verfahren ergiebt sich, daß, wenn die Newton-Simpson-Formel von zwei Körpern derselben Höhe gilt, sie auch von der Summe und Differenz dieser Körper gilt. Die Querschnittsflächen, die in derselben Höhe liegen, können dabei zu ganz beliebigen Gestalten vereinigt werden, sei es durch Addition oder durch Subtraktion.

41) **Übungsaufgaben.** Unter den Aufgaben über Körperstumpfe sind z. B. diejenigen von besonderem Interesse, bei denen es sich um das spezifische Gewicht p' in Verbindung mit dem wirklichen Gewichte p handelt. Dabei ist zunächst $p = Kp'$, wo K der Körperinhalt ist. Schwimmt ein Körper, und ist $W \cdot 1 = W$ der verdrängte Wasserraum und zugleich sein Gewicht, so ist, da der Körper ebensoviel wiegt, wie W, $Kp' = W$, also $p' = \frac{W}{K}$ das spezifische Gewicht. Ist z. B. letzteres gegeben, so kann man fragen, wie tief ein Cylinder oder Prisma, eine Pyramide, ein Kegel- oder Pyramidenstumpf, ein Prismatoid u. s. w. eintaucht, je nachdem das Eintauchen in diesem oder jenem Sinne erfolgt.

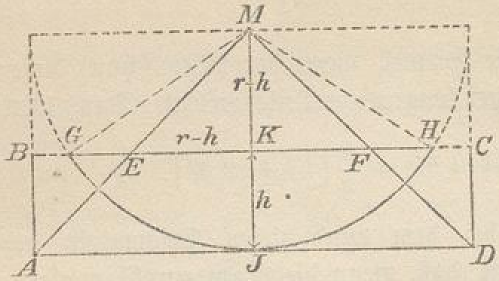
Ferner sind von Interesse Übungsaufgaben über Stumpfe, denen Kugeln um- oder einbeschrieben werden können.

Abstumpfungen kommen in der Krystallographie vielfach vor. So ist z. B. das an den Vierkant-Ecken abgestumpfte Rhombendodekaeder identisch mit dem abgekanteten Würfel, das an den Dreikant-Ecken abgestumpfte identisch mit dem abgekanteten Oktaeder. Zahlreiche Beispiele aus des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen" geben Veranlassung zu Konstruktionen und Berechnungen.

b) Kugelberechnungen.

42) Kugelabschnitt (Kugelsegment). In Teil I, Ster. Nr. 27, wurde der Inhalt der Halbkugel gefunden durch Vergleich mit einem Cylinder von Radius r und Höhe r, aus dem der auf der Grund-

Fig. 147.



fläche stehende Kegel von Höhe r ausgeschnitten war. Der Restkörper hatte dabei in gleicher Höhe gleiche Querschnittsfläche mit der Kugel. Von der Figur ist hier nur der Aufriß gezeichnet. Nach dem Satze von Cavalieri muß ähnlich, wie dort, der Kugelabschnitt GJH denselben Inhalt haben, wie der entsprechende Restkörper, d. h. wie Cylinder $ABCD$ — Kegelstumpf $AEFD$. Folglich, wenn $AB = h$, also $EK = MK = r - h$ gesetzt wird,

$$\text{Segment} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$$

$$= \frac{\pi h}{3}[3r^2 - r^2 - r(r-h) - (r-h)^2],$$

oder

$$\text{Segment} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

43) Kugelsektor. Setzt man auf das Kugelsegment GHJ den Kegel GHM auf, so erhält man den Kugelausschnitt oder Kugelsektor, der zur Segmenthöhe h gehört. Sein Inhalt ist

$$\text{Segment} + \text{Kegel} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi \overline{GK}^2}{3}(r - h)$$

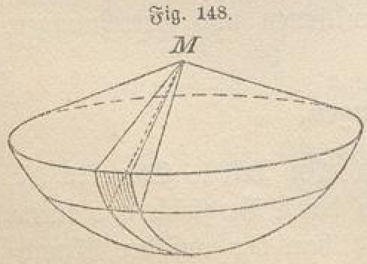
$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3) + \frac{\pi}{3}[r^2 - (r-h)^2](r - h),$$

wo sich alles bis auf $\frac{2}{3}r^2\pi h$ weghebt. Also

$$\text{Sektor} = \frac{2}{3}r^2\pi h.$$

44) Kugelkalotte. Die Wölbungsfläche des Segmentes heißt Kugelhaube (Kugelkappe oder Kalotte). Zu ihrer Berechnung schlägt man dasselbe Verfahren ein, wie in Teil I, Ster. 38. Man teilt die Wölbungsfläche z. B. durch Parallelkreise und Meridiane in kleine „quadratische" Flächen G_1, G_2, G_3, ... ein, deren Ecken mit dem Kugelcentrum verbunden werden. So entstehen Pyramiden von der Höhe r und dem Inhalte $G_1\frac{r}{3}$, $G_2\frac{r}{3}$, $G_3\frac{r}{3}$, u. s. w. Dann ist

Fig. 148.



$$\text{Sektor} = \text{Summe der Pyramiden} = \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots),$$

oder Sektor $= \frac{r}{3} \cdot$ Kalotte, also Kalotte $= \frac{3 \cdot \text{Sektor}}{r} = \frac{3}{r}\frac{2}{3}r^2\pi h$, oder

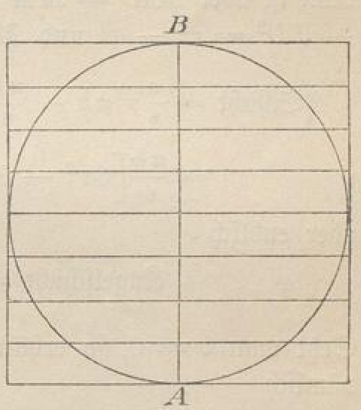
$$\text{Kalotte} = 2r\pi h.$$

Genau ebenso groß ist in Fig. 147 der Mantel des der ganzen Kugel umbeschriebenen Cylinders von der Grundfläche bis zur Höhe h.

45) Zonenfläche. Zwei Parallelkreise schneiden aus der Kugelfläche eine Zonenfläche aus, die als Differenz zweier Kalotten betrachtet werden kann. Gehört zur einen die „Pfeilhöhe" h_1, zur anderen die Pfeilhöhe h_2, so erhält man

$$\text{Zonenfläche} = 2r\pi h_1 - 2r\pi h_2$$
$$= 2r\pi(h_1 - h_2).$$

Fig. 149.

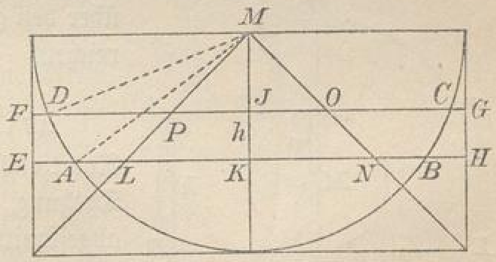


Setzt man die senkrechte Höhendifferenz $h_1 - h_2 = h$, so erhält man

$$\text{Zonenfläche} = 2r\pi h.$$

In der Aufrißzeichnung Fig. 149 ist daher jede Zonenfläche gleich der gleich hohen Schicht des Cylindermantels. Ist also der Durchmesser AB in n gleiche Teile geteilt, so wird durch die Normalebenen in den Teilpunkten die Kugelfläche in flächengleiche Zonen zerlegt. Projiziert man also die Länder der Erdoberfläche normal auf den Berührungscylinder des Äquators, so erhält man eine flächentreue Weltkarte, die nach Aufschneiden des Cylinders ein Rechteck in der Ebene giebt (äquivalente Abbildung nach Lambert).

Fig. 150.



46) Kugelschicht. Die durch zwei Horizontalschnitte aus dem Kugelkörper geschnittene Schicht $ABCD$ ist gleich dem Cylinder $EHGF$ vermindert um den Kegelstumpf $LNOP$. Ist nun die senkrechte Höhe $KJ = h$, Radius $JD = a$ und Radius $KA = b$, so hat man:

$$\text{Schicht} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[KL^2 + KL\cdot JP + JP^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[MK^2 + MK\cdot MJ + MJ^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[2\,MK^2 + 2\,MK\cdot MJ + 2\,MJ^2\right]$$
$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,MK^2 + 3\,MJ^2 - (MK - MJ)^2\right].$$

Nun ist aber $MK^2 = MA^2 - KA^2 = r^2 - b^2$, und $MJ^2 = MD^2 - JD^2 = r^2 - a^2$ und $MK - MJ = h$, also hat man

$$\text{Schicht} = \tfrac{6}{6}\,r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,(r^2 - b^2) + 3\,(r^2 - a^2) - h^2\right]$$
$$= \frac{\pi h}{6}\left[6\,r^2 - 3\,(r^2 - b^2) - 3\,(r^2 - a^2) + h)^2\right],$$

oder endlich

$$\text{Kugelschicht} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2\right].$$

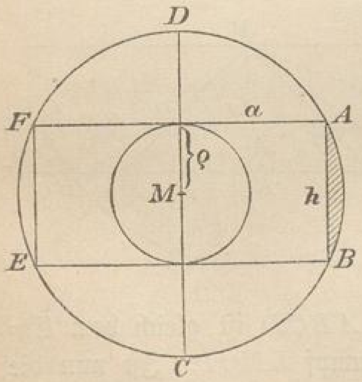
Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$\text{Kugelsegment} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + h^2\right],$$

die gegen die frühere den Vorzug hat, daß a und h am Segment gemessen werden können, während dort zwar h, aber nicht r meßbar war, sondern berechnet werden mußte.

Bemerkung. Die Formeln für das Segment, den Sektor und die Schicht sind hier zwar nur an der Halbkugel bewiesen, gelten aber, wie ganz einfache Betrachtungen zeigen, auch dann, wenn die Kugelteile über den größten Kreis der Kugel hinausreichen.

Fig. 151.



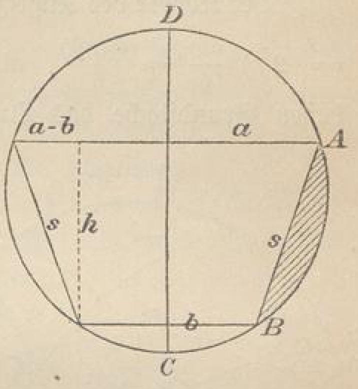
47) **Aufgabe.** Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Drehung des durch die Sehne AB abgeschnittenen Kreissegments um die parallele Achse CD entsteht.

Auflösung. Kugelschicht $ABEF$ — Cylinder $ABEF$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,a^2 + h^2\right] - \frac{6\,a^2\pi h}{6} = \frac{\pi h}{6}\left[6\,a^2 + h^2 - 6\,a^2\right] = \frac{\pi h^3}{6},$$

oder, wenn man $\varrho = \frac{h}{2}$ einführt, $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$. Der durch Rotation des Segments entstandene Körper ist also inhaltsgleich mit einer Kugel vom Radius $\frac{h}{2}$. Der Inhalt ist also nur abhängig von h, nicht aber vom Kugelradius r. (Je größer r, desto kleiner zwar das Kreissegment für dasselbe h, desto größer aber der Drehungsweg. Beides gleicht sich aus.)

Fig. 152.

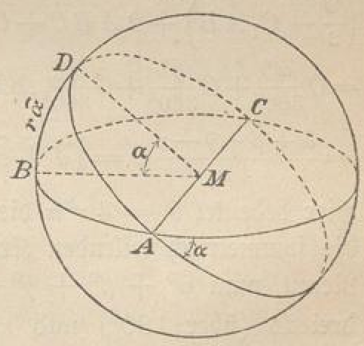


48) **Aufgabe.** Den entsprechenden Körper für den Fall zu berechnen, daß das Kreissegment um einen Durchmesser gedreht wird, der nicht parallel zur Sehne ist.

Auflösung. Schicht — Kegelstumpf $= \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2\right]$ $- \frac{\pi h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2\right] - \frac{\pi h}{6}\left[2\,a^2 + 2\,ab + 2\,b^2\right]$ $= \frac{\pi h}{6}\left[a^2 + b^2 - 2\,ab + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[(a-b)^2 + h^2\right]$. Da aber $(a-b)^2 + h^2 = s^2$ ist, so folgt $J = \frac{\pi h}{6}s^2$.

Ganz allgemein folgt also der Satz: Rotiert ein Kreissegment um einen beliebigen Durchmesser, so ist der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers das $\frac{h}{s}$-fache einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Sehne des Segmentes ist.

Fig. 153.



[49) Fläche und Körper des Kugelzweiecks.*) In Fig. 153 ist von der Kugelfläche durch die größten Kreise ABC und ADC ein Zweieck mit den Ecken A und C ausgeschnitten. Seine Fläche folgt aus der Proportion $F : O = \alpha^0 : 360^0$, also $F = O\frac{\alpha^0}{360^0}$, wo $O = 4r^2\pi$ die Oberfläche der Kugel ist.

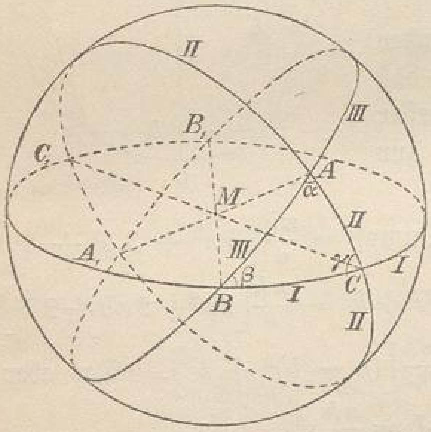
Ist dagegen der Bogen $BD = r\widehat{\alpha}$ in Längeneinheiten bestimmt, so ist $F = O\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi}$.

*) Auf dem Gymnasium sind die Abschnitte 49 bis 51 zu überschlagen.

Aus $F = 4r^2\pi\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = 2r\cdot(r\widehat{\alpha}) = d\cdot\widehat{BD}$ folgt, daß die Fläche des Kugelzweiecks gleich einem Rechteck aus dem Durchmesser und dem symmetrisch teilenden Bogen ist.

Der Körper des Kugelzweiecks ist $K = J\frac{\alpha^0}{360^0} = J\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = \frac{4}{3}r^3\pi\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = (2r)^2\frac{\widehat{\alpha}r}{6} = \frac{d^2(r\widehat{\alpha})}{6}$, also gleich dem 6^{ten} Teile eines Prismas, dessen Grundfläche das Quadrat des Durchmessers, dessen Höhe der symmetrisch teilende Bogen ist.

Fig. 154.



50) **Fläche und Körper des Kugeldreiecks.** In Fig. 154 ist durch die größten Kreise I, II und III, die sich unter den Durchmessern AA_1, BB_1 und CC_1 schneiden, ein Kugeldreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ gebildet, dessen Fläche, wenn man die Zweiecke mit Z_α, Z_β, Z_γ bezeichnet, folgendermaßen gefunden werden kann: $Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma = (ABC + A_1BC) + (BCA + B_1CA) + (CAB + C_1AB)$*) $= (ABC + A_1BC + B_1CA) + 2ABC + C_1AB$. Der erste Posten ist die Fläche der durch den Kreis III abgeschnittenen Halbkugel $\frac{O}{2}$ vermindert um das Dreieck CA_1B_1, welches als Scheiteldreieck symmetrisch und flächengleich mit C_1AB ist. Also hat man die Gleichung $\left(\frac{O}{2} - C_1AB\right) + 2ABC + C_1AB = Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma$, oder $\frac{O}{2} + 2ABC = O\frac{\alpha^0}{360^0} + O\frac{\beta^0}{360^0} + O\frac{\gamma^0}{360^0}$, d. h. Kugeldreieck $ABC = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0}O = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi}O = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)r^2 = (r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi)r$. Hier bedeutet $O = 4r^2\pi$ die Kugeloberfläche, während $r\widehat{\alpha}$, $r\widehat{\beta}$ und $r\widehat{\gamma}$ die symmetrisch teilenden Kreisbogen der einzelnen Kugelzweiecke sind. Nennt man $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0$ den Winkelüberschuß des Kugeldreiecks (über 180^0) und $r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi$ den Bogenüberschuß der entsprechenden Zweiecke (über den Halbkreisbogen), so ergiebt sich Folgendes: **Die Fläche des Kugeldreiecks ist proportional dem Quadrate des Radius und proportional dem Winkelüber-**

*) Achte auf die cyklischen Vertauschungen.

schusse; sie ist gleich einem Kugelzweieck, dessen Winkel der halbe Winkelüberschuß ist und gleich dem Rechteck aus dem Radius und dem Bogenüberschusse der drei Zweiecke.

Handelt es sich um gleichseitige Kugeldreiecke, so daß der Inhalt wird $\frac{3\alpha^0 - 180^0}{720^0} O$ oder $\frac{\alpha^0 - 60^0}{240^0} O$, und setzt man dies der Reihe nach gleich $\frac{1}{4} O$, $\frac{1}{8} O$ und $\frac{1}{20} O$, so folgt $\alpha = 120^0$ bezw. $\alpha = 90^0$, $\alpha = 72^0$, und die Ecken sind der Reihe nach die Sektoren des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, deren Hauptschnitte Kreise geben, die sich unter den gefundenen Winkeln schneiden.

Stellt man die entsprechenden Formeln für das Kugelviereck und Kugelfünfeck auf, so kommt man durch ähnliche Spezialisierung auf den Fall des Würfels und des Pentagondodekaeders. Es handelt sich also um Probleme der Kugelteilung.

51) Verbindet man die Ecken des Kugeldreiecks mit dem Kugelcentrum, so erhält man den Körper des Kugeldreiecks, dessen Inhalt man aus der Fläche durch Multiplikation mit $\frac{r}{3}$ erhält (Pyramidenformel), so daß man hat:

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$= \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi\right) \frac{r^3}{3} = \left(r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi\right) \frac{r^2}{3}$$

oder, wenn J den Kugelinhalt bedeutet,

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} J = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} J.$$

[Auch diese Formeln sind leicht in Worte zu kleiden. Bei der einen handelt es sich um den Inhalt einer Pyramide über r^2, deren Höhe der Bogenüberschuß der drei Zweiecke ist.]

c) Übungsaufgaben.

52) Unter den Übungsaufgaben sind die mit der mathematischen Geographie zusammenhängenden die wichtigsten; z. B.: Wie groß ist die Fläche der heißen, der beiden gemäßigten, der beiden kalten Zonen, und in welchem Verhältnisse stehen sie? Wie groß ist die Zonenfläche zwischen dem Äquator und dem ersten Grade nördlicher Breite*); wie groß die vom 45ten und 46ten Grade

*) Gemeint ist der zu 1^0 nördlicher Breite gehörige Parallelkreis. Die abgekürzte Redeweise wird schwerlich zu Mißverständnissen führen.

nördlicher Breite eingeschlossene Zone? Wie groß ist jedes Meridianzweieck von Grad zu Grad? Wie viele Quadratmeilen Meeresfläche übersieht man von 10 m, 100 m, 1000 m, 10 000 m, 100 000 m Meereshöhe aus? Eine wie große Fläche wird durch ein Meteor beleuchtet, welches sich 8 Meilen über der Erdoberfläche befindet? Wie hoch muß ein Meteor schweben, um 1000 Quadratmeilen Erdoberfläche zu beleuchten? Der Erschütterungskreis eines Erdbebens reiche von 10^0 nördlicher Breite bis 60^0 nördlicher Breite; wie viele Quadratmeilen umfaßt er, und der wievielte Teil der Erdoberfläche wird erschüttert? Den wievielten Teil der Erdoberfläche schließt der 45te Breitenkreis ein? Welcher Parallelkreis schließt den vierten Teil der Erdoberfläche ein (d. h. um welchen Grad nördlicher Breite handelt es sich)? Die Fläche der scheinbaren Himmelskugel ist wievielmal so groß, als die scheinbare Fläche der Sonne (deren scheinbarer Durchmesser 32′ beträgt)? Der wievielte Teil der Sonnenausstrahlung kommt der Erde zu gute? (Es ist zu untersuchen, wieviel mal so groß die scheinbare Himmelskugel ist, als die scheinbare Fläche der Erde für den Sonnenbewohner. Die Erde habe dabei den Durchmesser 1720 Meilen, und die Entfernung von der Sonne betrage 20 Millionen Meilen.) Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Kugeldreiecks auf der Erde, wenn jeder seiner Winkel 70^0 beträgt? Wie viele Tonnenmassen enthält der Erdkörper, wenn sein spezifisches Gewicht 5,6 ist? (Unter Tonnenmasse soll hier eine Masse verstanden werden, die an der Erdoberfläche 1000 kg wiegt. Nach dem Gewichte wird deshalb nicht gefragt, weil die Erde nicht an ihrer eigenen Oberfläche gewogen werden kann, weil ferner die Masse unveränderlich, das Gewicht aber von der Lage, Gestalt und Massenverteilung des anziehenden und angezogenen Körpers abhängig ist.) Wieviel Tonnen würde der nach der Sonnenoberfläche versetzte Erdkörper wiegen, wenn dort die Anziehung 28mal so groß ist, als auf der Erde? Für die Bewohner des 50ten Grades nördlicher Breite gehen die bis zu 50^0 vom Polarstern entfernten Gestirne nie unter (Circumpolarsterne), die bis zu 50^0 vom Südpol entfernten gehen nie auf. Den wievielten Teil des gestirnten Himmels lernen diese Bewohner nur kennen? Angenommen, bei der Fluterscheinung steige der vierte Teil der Oberfläche des über den ganzen Erdball verbreitet gedachten Ozeans (die eine Flutwelle) durchschnittlich um $\frac{1}{2}$ m, wie viele Kubikmeilen Wasser würde die Flutwelle enthalten? (Wie viele Meterkilogramme oder Metertonnen Arbeit bedeutet eine solche Steigung?)

Aufgaben über die den regelmäßigen Körpern um- und eingeschriebenen Kugeln befinden sich schon in Teil I. Sie können hier ergänzt werden. Aufgaben über Kugeln, die Kegeln und regelmäßigen Pyramiden einbeschrieben sind, ebenso über gewisse Kugelreihen, befinden sich in dem Kapitel über geometrische Reihen.

Umbeschriebene Körper. Einer Kugel einen Kegel umzubeschreiben, der den n-fachen Inhalt oder die n-fache Oberfläche hat als die erstere. Dieselbe Aufgabe für die 3-, 4-seitige Pyramide. Auch Kegelstumpfe und Pyramidenstumpfe, die gewissen Forderungen entsprechen, können umbeschrieben werden.

Aus dem Radius der Kugel die Elemente sämtlicher einbeschriebenen bezw. umbeschriebenen regelmäßigen Polyeder zu berechnen. (Die Resultate befinden sich in zahlreichen Übungsbüchern.)

Aufgaben wie folgende: Wie groß muß die Segmenthöhe sein, damit der n^{te} Teil vom Kugelkörper abgeschnitten werde, führen auf Gleichungen 3^{ten} Grades.

Spezifisches Gewicht. Eine Kugel sinke bis zur Tiefe h ins Wasser ein. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht? Auflösung

$$p' = \frac{W}{K} = \frac{\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \frac{h^2(3r - h)}{4r^3}.$$ Dieselbe Aufgabe für die Hohlkugel von Radius r und r_1. Wie groß muß die Wandstärke einer gußeisernen Halbkugel von 1 m Durchmesser ($p' = 7{,}5$) genommen werden, damit sie bis zum 4^{ten} Teile des Durchmessers, zur Hälfte, zu Dreiviertel desselben, oder ganz untertaucht? Statt der Kugel nehme man die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht, die beiden ersten lasse man erst mit der Wölbung voran, dann mit der Ebene voran eintauchen. Auch Segmente von Hohlkugeln können genommen werden. (Die Frage nach der Tiefe des Eintauchens führt auf Gleichungen dritten Grades.)

VII. Der Schwerpunkt, die Guldinschen Regeln, und die Sätze über abgeschrägte Körper.

53) Geometrisch und mit Hülfe der Mechanik (Gesetz der statischen Momente) kann bewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems im Raume der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist; daß speziell der Schwerpunkt eines ebenen Punktsystems der Punkt mittleren Abstandes von jeder Geraden der