Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

III. Goniometrische Übungen.

III. Goniometrische Übungen.

18) Im Folgenden werden Formeln abgeleitet, von denen nur die wichtigen nummeriert sind, die übrigen sind bloßes Übungsmaterial. An ihnen soll gezeigt werden, daß sich scheinbar komplicierte Ausdrücke bisweilen durch naheliegende Umformungen vereinfachen und namentlich für den logarithmischen Rechnungsansatz geeigneter machen lassen. Zunächst werden Formeln über die Winkel 2α und $\frac{\alpha}{2}$ abgeleitet.

Setzt man in der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ den Winkel α statt β ein, so entsteht

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha,$$

folglich ist

7) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Macht man dasselbe mit der Formel für $\cos(\alpha + \beta)$, so erhält man

8) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Man kann auch schreiben (mit Hülfe von $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

und daraus folgt:

9) $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

10) $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Durch Division entsteht hieraus

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}, \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Es ist

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1 \pm \sin\alpha,$$

folglich

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\sin\alpha},$$

also durch Addition bezw. Subtraktion

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha},$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha},$$

und durch Division

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}.$$

Aus $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ folgt, wenn man die rechte Seite durch 1 oder $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ dividiert, wodurch nichts geändert wird:

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

und wenn man jedes Glied des Zählers und Nenners durch $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ dividiert:

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Auf demselben Wege ergiebt sich aus $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ die Formel

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

19) Formeln für den Sinus bezw. Cosinus von $3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$$

Setzt man hier $1-\sin^2\alpha$ statt $\cos^2\alpha$, so folgt

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Ferner ist $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$, was sich noch auf $\sin\alpha$ allein reducieren läßt.

Bilde ferner

$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha,$$

was noch auf lauter Cosinus reduciert werden kann,

$$\cos 5\alpha = 5\cos\alpha - 20\cos^3\alpha + 16\cos^5\alpha.$$

20) Einige Tangentenformeln.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Dividiert man den Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\cos\alpha\cos\beta$, so entsteht

11) $$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Setzt man $\beta = \alpha$, so geben die oberen Vorzeichen

12) $$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Da $\tan 45^0 = 1$ ist, so folgt aus 11)

$$\tan(45^0 \pm \alpha) = \frac{1 \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\alpha}.$$

In ganz entsprechender Weise können auch Formeln für die Cotangente entwickelt werden.

21) Nach 3) ist

$$1 + \sin\alpha = \sin 90^0 + \sin\alpha = 2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ebenso ist

$$1 - \sin\alpha = 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Durch Division und Wurzelausziehung folgt

$$\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}},$$

wozu die Schlußformel von Abschnitt 20) verglichen werden kann.

Von geringerer Bedeutung sind die Formeln

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Dagegen findet man Formeln von hervorragender Wichtigkeit im arithmetischen Teile (Abschnitt VI), wo sie mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt sind.

[22) Berechnung der Funktionen einiger besonderer Winkel.

In Teil I Seite 189 wurden die Werte einiger Winkelfunktionen auf geometrischem Wege berechnet. Goniometrisch erreicht man dasselbe folgendermaßen:

Aus $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ folgt z. B.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ebenso ist $\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Aus $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ folgt z. B.

$$\cos 90^0 = 4\cos^3 30^0 - 3\cos 30^0$$

oder, da die linke Seite gleich Null ist, nach Division durch $\cos 30^0$:

$$4\cos^2 30^0 = 3, \quad \text{also} \quad \cos 30^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sin 60^0.$$

Folglich

$$\sin 30^0 = \sqrt{1-\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} = \cos 60^0.$$

Aus der Formel für $\cos 5\alpha$ folgt für $\alpha = \frac{180^0}{10} = 18^0$, also für $5\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\cos 5\alpha = 0$, $0 = 5\cos\frac{\pi}{10} - 20\cos^3\frac{\pi}{10} + 16\cos^5\frac{\pi}{10}$, also nach Division durch $16\cos\frac{\pi}{10}$

$$\cos^4\frac{\pi}{10} - \frac{5}{4}\cos^2\frac{\pi}{10} = -\frac{5}{16}.$$

Daraus würden sich für $\cos^2\frac{\pi}{10}$ die beiden Lösungen $\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ ergeben. Nun kann aber nur einer dieser Werte richtig sein. Bedenkt man z. B. daß $\cos^2 18^0 > \cos^2 30^0$, d. h. $> \frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$ sein muß, so erkennt man, daß das negative Zeichen zu verwerfen ist. Demnach ist

$$\cos 18^0 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \sin 72^0.$$

Das andere Wurzelzeichen kommt in Folgendem zum Vorschein. Die Formel für $\sin 5\alpha$ geht für $\alpha = \frac{\pi}{5}$ d. h. $5\alpha = \pi$ über in

$$0 = 5 \sin\frac{\pi}{5} - 20 \sin^3\frac{\pi}{5} + 16 \sin^5\frac{\pi}{5},$$

oder nach Division durch $16 \sin\frac{\pi}{5}$ in

$$\sin^4\frac{\pi}{5} - \tfrac{5}{4} \sin^2\frac{\pi}{5} = - \tfrac{5}{16}.$$

Auch hieraus würde für $\sin^2\frac{\pi}{5}$ folgen $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Da aber $\sin^2 36^0 < \sin^2 45^0$, d. h. $< \frac{1}{2}$ sein muß, so ist $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ zu groß, und es folgt

$$\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \cos 54^0.$$

Aus $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ folgt für $\alpha = \frac{\pi}{5}$:

$$\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1 = 2\,\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^0 = \sin 54^0.$$

Aus $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\left[\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]^2 - 1$ folgt $\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^0$.

Mit Hülfe der obigen Formeln lassen sich noch viele andere berechnen, z. B. $\sin 15^0 = \sin\frac{30^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\tan 15^0 = 2 - \sqrt{3}$, $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$. Daraus folgt z. B. $\sin 7\frac{1}{2}{}^0 = \sin\frac{15^0}{2} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{6 - 3\sqrt{2}}\right]$. Ferner ist $\sin 22\frac{1}{2}{}^0 = \sin\frac{45^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\cos 22\frac{1}{2}{}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\tan 22\frac{1}{2}{}^0 = \sqrt{2} - 1$, $\cot 22\frac{1}{2}{}^0 = \sqrt{2} + 1$ u. s. w.]

[23) Handelt es sich um die Winkel eines Dreiecks, α, β und γ, so ist vor allem zu beachten, daß $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ und $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist. Daraus folgt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma, \quad \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma, \quad \tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma,$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}.$$

So folgt z. B. aus

$$\tan(\alpha + \beta) = -\tan\gamma,$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\tan\gamma,$$

oder

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ folgt $\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)$ $= 270^0 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 180^0$. Folglich gilt auch für diese neuen Dreieckswinkel die Formel

$$\tan\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \tan\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right)\tan\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right),$$

also ist für Dreieckswinkel überhaupt

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Aus

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[2\cos\frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

folgt

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ähnliche Formeln lassen sich noch in größerer Zahl ableiten. Versuche z. B. folgende zu beweisen:

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \sin\gamma = 4\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}.$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1,$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} - \cot\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1,$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}.]$$

[24) Goniometrische Gleichungen. (Vergl. Seite 161.) Eine besondere Art von transcendenten Gleichungen erhält man, wenn die Unbekannte als Bogen oder Winkel von goniometrischen Funktionen vorkommt. Nur einige Beispiele seien angegeben.

Aufgabe. Für welche Winkel bezw. Bogen ist

$$a\sin x = b\cos x?$$

Auflösung. $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}$, $\tan x = \frac{b}{a}$, also $x = \arctan\frac{b}{a}$, d. h. x ist der Bogen, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist. Der Bogen bezw. Winkel ist mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln zu bestimmen.

Aufgabe. Für welche Winkel bezw. Bogen ist

$$\sin x + \cos x = a?$$

Auflösung. $\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} = a$,

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = a - \sin x, \quad 1 - \sin^2 x = a^2 - 2a\sin x + \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x - a\sin x = \frac{1 - a^2}{2}, \quad \sin x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2},$$

$$x = \arcsin\frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

(Wie groß darf der absolute Betrag von a höchstens sein?)

Aufgabe. Für welchen Winkel bezw. Bogen ist

$$a\sin 2x = b\sin x?$$

Auflösung. $2a\sin x\cos x = b\sin x$, $\cos x = \frac{b}{2a}$, $x = \arccos\frac{b}{2a}$.

Aufgabe. Für welchen Winkel ist $a\sin x = b\cot x$?

Auflösung. $x = \arccos\frac{-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2a}$.]