Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

a) Den Sinus eines Winkels durch die Tangente auszudrücken.

Auflösung. Es ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, also durch Quadrierung $\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, oder $\tan^2\alpha - \tan^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha\,(1+\tan^2\alpha) = \tan^2\alpha$, folglich $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

b) Den Cosinus durch die Tangente auszudrücken.

Auflösung. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$, folglich $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha\,(1+\tan^2\alpha) = 1$, folglich $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

c) Leite ebenso ab: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

[Andere Ableitungen der Formeln a) und b) ergeben sich so:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha,$$

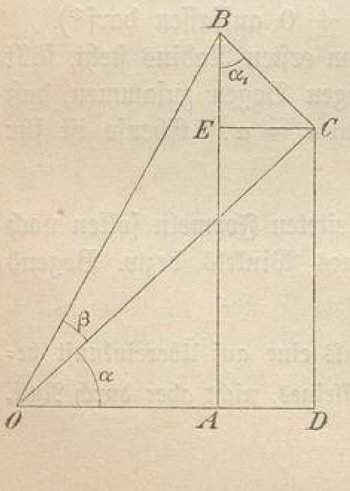
folglich

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.\Big]$$

II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen.

Fig. 108.



13) **Aufgabe.** Den Sinus des Winkels $(\alpha+\beta)$ durch die Funktionen der Einzelwinkel α und β auszudrücken.

Auflösung. In Fig. 108 sei $\sphericalangle AOB = \alpha + \beta$, $BA \perp OA$, $BC \perp OC$, $CD \perp OD$, $EC \perp AB$. Dabei ist $\sphericalangle EBC = \alpha_1 = \alpha$. (Warum?) Ferner ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AB}{OB} = \frac{AE+EB}{OB} = \frac{DC}{OB} + \frac{EB}{OB}.$$

Zu DC gehört die Hypotenuse OC, zu EB

die Hypotenuse BC. Multipliziert man den Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit OC, die des zweiten mit BC, so erhält man

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC\cdot OC}{OC\cdot OB}+\frac{BE\cdot BC}{BC\cdot OB}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Es ist also

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

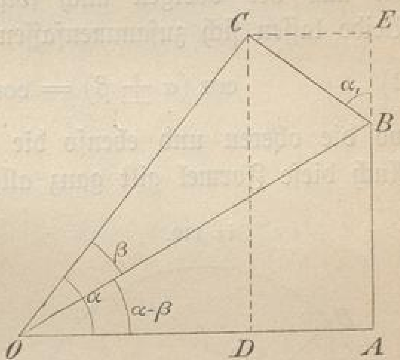
Bemerkung. An der Figur sind nur geringfügige Änderungen nötig, wenn $(\alpha+\beta)$ ein stumpfer Winkel, oder wenn α oder β, oder beide Winkel stumpf sind. Die Formel hat überhaupt allgemeine Geltung.

14) Der Winkel β kann auch abgezogen werden. Dann handelt es sich, wenn man die Formel vorläufig weiter gelten läßt, um

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Für diesen Fall ist die entsprechende Zeichnung in Fig. 109 dargestellt, wo Winkel $AOB=(\alpha-\beta)$, alles andere wie vorher ist. Es wird

Fig. 109.



$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{AB}{OB}=\frac{AE-BE}{OB}$$
$$=\frac{DC}{OB}-\frac{BE}{OB}.$$

Erweitert man die Brüche wieder mit den zu DC und BE gehörigen Hypotenusen, so folgt

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{DC\cdot OC}{OC\cdot OB}-\frac{BE\cdot BC}{BC\cdot OB}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

womit das Weitergelten der ersten Formel bewiesen ist. Beide Formeln vereinigen sich zu folgender:

1) $$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

in der die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören.

Ohne Geometrie ergeben sich die Erweiterungen der Gültigkeit für Winkel der übrigen Quadranten auf folgendem Wege. Sind z. B. α und β spitz, so ist für die Summe der Winkel $(\pi-\alpha)$ und β, von denen der erstere stumpf ist,

$$\sin[(\pi-\alpha)+\beta]=\sin[\pi-(\alpha-\beta)]=\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)\cos\beta+\cos(\pi-\alpha)\sin\beta.$$

Ebenso ist für zwei stumpfe Winkel $(\pi - \alpha)$ und $(\pi - \beta)$

$$\sin[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta)] = \sin[2\pi - (\alpha + \beta)]$$
$$= -\sin(\alpha + \beta) = -[\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta]$$
$$= +\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta).$$

Dies genügt zum Beweise des Weitergeltens der Formel 1).

15) **Aufgabe.** Den Cosinus des Winkels $(\alpha + \beta)$ durch die Funktionen der Einzelwinkel darzustellen.

Auflösung. In Figur 108 ist $\cos(\alpha + \beta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OD - AD}{OB}$ $= \frac{OD}{OB} - \frac{EC}{OB} = \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} - \frac{EC}{BC} \cdot \frac{BC}{OB} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Demnach ist

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Ebenso ergiebt sich aus der Figur 109 die Formel

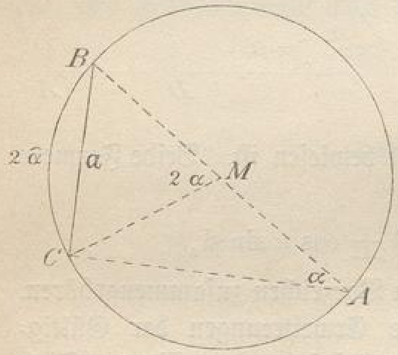
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

die aus der vorigen auch folgt, wenn man $-\beta$ statt β einsetzt. Beide lassen sich zusammenfassen in

2) $$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Auch diese Formel gilt ganz allgemein.

Fig. 110.

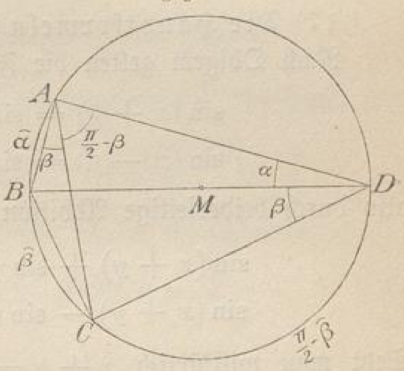


[16) Die Formeln für die Funktionen von $(\alpha + \beta)$ lassen sich auch mit Hülfe des Ptolemäischen Satzes (vergl. Seite 1) ableiten. Dazu ist folgende Vorbemerkung nötig. In Fig. 110 ist ein Kreis mit Radius 1, eine Sehne $BC = a$ und der zugehörige Peripheriewinkel α^0 mit dem Durchmesser AB als Schenkel dargestellt. Dabei ist $\sin\alpha^0 = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{2}$, also Sehne $\overline{BC} = 2\sin\alpha^0$. Zum Peripheriewinkel α^0 gehört aber der Centriwinkel $2\alpha^0$ und zu diesem der Bogen $\widehat{BC}$, der mit $2\widehat{\alpha}$ bezeichnet werden soll. Es ist also Sehne $\overline{BC} = 2\sin\frac{\widehat{BC}}{2}$, sobald der Kreisradius gleich 1 gesetzt wird. Dies gilt zugleich auch von dem größeren der beiden Kreisbogen, die zur Sehne BC gehören, d. h. von $2\pi - 2\widehat{\alpha} = 2(\pi - \widehat{\alpha})$, denn es ist $\sin\frac{2(\pi - \widehat{\alpha})}{2} = \sin\widehat{\alpha} = \sin\frac{\widehat{BC}}{2}$. Auch kann man jeden der beiden Bogen um 2π oder ein beliebiges Vielfaches von 2π vergrößern.

Macht man dagegen den Radius des Kreises $= \frac{1}{2}$, so gehört zum Peripheriewinkel α^0 der Bogen $\widehat{BC} = r \cdot 2\widehat{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 2\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}$, und es ist $\sin\alpha^0 = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}$. Folglich: *Im Kreise mit dem Durchmesser 1 ist Sehne* $\overline{BC} = \sin\widehat{BC}$ = *dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels.*

Hiervon wird Anwendung auf Fig. 111 gemacht. Im Kreise M mit Durchmesser $BD = 1$ (und Radius $r = \frac{1}{2}$) sind an den Durchmesser die Winkel $BDA = \alpha$ und $BDC = \beta$ nach verschiedenen Seiten angelegt, so daß $\widehat{BA} = \widehat{\alpha}$ und $\widehat{BC} = \widehat{\beta}$ die zugehörigen Kreisbogen sind. Dabei ist $\sphericalangle CAD = 90^0 - \beta$, ebenso Bogen $\widehat{CD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\beta}$. (Warum?)

Fig. 111.



Nach *Ptolemäus* ist nun

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

also nach der vorigen Entwickelung*)

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot 1$$
$$= \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\alpha + \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) \sin\beta$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta,$$

folglich

a) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Legt man die Winkel α und β auf derselben Seite des Durchmessers an und ist $\alpha > \beta$, so findet man ebenso

b) $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

*) Die Bogen sind von jetzt ab einfach mit α und β bezeichnet.

Setzt man in b) statt α den Bogen $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, so erhält man

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta,$$

oder

c) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Setzt man dagegen in Formel b) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ an Stelle von α, so entsteht

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Die Ableitung für α und β gilt allerdings zunächst nur für den Fall, daß α und β spitze Winkel sind. Durch die in 14) angewandten Substitutionen läßt sich aber auch hier die Allgemeingültigkeit für beliebig große Winkel nachweisen.]

17) Die Hauptformeln für die Addition der Funktionen. Nach Obigem gelten die Formeln

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$

also durch beiderseitige Addition bezw. Subtraktion:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x\cos y,$$
$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x\sin y.$$

Setzt man willkürlich $x + y = \alpha$ und $x - y = \beta$, so muß man, wie sich durch Addition und Subtraktion ergiebt, $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ setzen. So entstehen die Formeln

3) $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

4) $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ganz ebenso folgen aus den Formeln für $\cos(x + y)$ und $\cos(x - y)$ die folgenden:

5) $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

6) $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Die Formeln 3) bis 6) erleichtern die Berechnungen mit Hülfe der Logarithmen. Inwiefern?