Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Man kann die obige Gleichung $x^3 - 3ax = b$ auch ohne Hülfe der reciproken Gleichungen lösen, jedoch soll dies und die Lehre von den Gleichungen 4^{ten} Grades vorläufig aufgeschoben bleiben.

Beispiele für die Gleichungen dritten Grades bietet die Stereometrie in Menge. Die Formel für das Kugelsegment z. B. ist

$$J = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2).$$

Demnach führt die Aufgabe, die Höhe h zu finden, durch die ein Kugelsegment von gegebenem r (bezw. gegebenem a) einen vorgeschriebenen Inhalt J erhält, auf eine Gleichung dritten Grades, z. B. auf

$$x^3 + 3a^2x = \frac{6J}{\pi}, \quad \text{oder auf} \quad x^3 - 3rx^2 = -\frac{3J}{\pi}.$$

Ebenso folgende Aufgabe: Wie tief taucht eine gegebene Kugel von gegebenem specifischem Gewicht p' $(p' < 1)$ ins Wasser ein?

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch auf die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht und den Kugelsektor ausdehnen. Bei der Halbkugel z. B. kann man noch die Fälle unterscheiden, ob sie mit der Grundebene voran oder mit der Wölbung voran eintauchen soll.

IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

77) Die allgemeine Form der Gleichungen 2^{ten} Grades mit zwei Unbekannten ist die folgende:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0.$$

Dabei sind die Glieder mit x^2, mit xy und mit y^2 solche, die das Unbekannte in der 2^{ten} Potenz enthalten. Die übrigen enthalten es in der 1^{ten} Potenz oder gar nicht.

Berechnet man y aus der einen Gleichung, und setzt man den Wert in die andere ein, so entsteht eine Gleichung 4^{ten} Grades für x allein. Da die Lösung solcher Gleichungen noch nicht gelehrt werden soll, ist auch die Bestimmung der Unbekannten aus den obigen Gleichungen vorläufig nicht möglich. Zu jedem Werte von x gehört ein bestimmter von y, so daß man stets vier Wertepaare erhält, die nicht durcheinander gemischt werden dürfen.

Es giebt aber häufig vorkommende Spezialformen, bei denen die Gleichungen sich auf einfachere zurückführen lassen. Abgesehen von den auf der Hand liegenden Vereinfachungen mögen einige Methoden der Reduktion behandelt werden.

1) $$\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b. \end{cases}$$

Addition giebt $x^2 + y^2 + 2xy = a + b$, also $x + y = \sqrt{a + b}$. Das Weitere ist einfach.

Oder: man schreibe

$$x(x + y) = a,$$
$$y(x + y) = b.$$

Division giebt $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ u. s. w.

2) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \quad\;\; xy = b. \end{cases}$$

Man bilde $2xy = 2b$, vereinige dies durch Addition bezw. Subtraktion mit $x^2 + y^2 = a$, was $x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b$ bezw. $x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b$ giebt. Aus beiden Gleichungen folgt

$$x + y = \sqrt{a + 2b}$$
$$x - y = \sqrt{a - 2b},$$

u. s. w.

3) $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Addition giebt $x^2 + y^2 = \frac{a + b}{2}$, Subtraktion giebt $2xy = a - b$, Fortsetzung ähnlich, wie bei 2).

4) $$\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 + y^3$ ist zerlegbar in $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, so daß $(x + y)b = a$ ist u. s. w.

5) $$\begin{cases} \quad\;\; x^3 - y^3 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 - y^3$ ist zerlegbar in $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

6) $$\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ xy\,(x + y) = b. \end{cases}$$

Nach der letzteren Gleichung ist $3x^2y + 3xy^2 = 3b$, was sich mit der ersten zu

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a + 3b \quad \text{oder} \quad (x + y)^3 = a + 3b$$

vereinigen läßt, so daß $x + y = \sqrt[3]{a + 3b}$ ist.

7) $$\begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ xy\,(x - y) = b. \end{cases}$$

Ähnlich, wie vorher, erhält man $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = a - 3b$, also $x - y = \sqrt[3]{a - 3b}$.

8) $$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Die erste Gleichung läßt sich schreiben als $(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = a$ oder durch Produktzerlegung als $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = a$. Durch Division erhält man das Weitere.

9) $$\begin{cases} \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = a, \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

Das letztere zerlegt sich in $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = b$, so daß man durch Multiplikation aus beiden Gleichungen $(x + y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = ab$ erhält, wovon sich $x^3 + y^3 = b$ abziehen läßt, u. s. w.

10) $$\begin{cases} ax + by = 2\,(x^2 - y^2), \\ \dfrac{b}{x - y} - \dfrac{a}{x + y} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}. \end{cases}$$

Betrachtet man hier zunächst a und b als Unbekannte, so giebt die Multiplikationsmethode $a = \dfrac{x^2 - y^2}{x}$ und $b = \dfrac{x^2 - y^2}{y}$, also $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{x}$, so daß einfachere Gleichungen, z. B. die beiden letzteren, zur Verfügung stehen.

11) $$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Man kann $\sqrt{x} = v$, also $x^2 = v^4$, $\sqrt{y} = w$, also $y^2 = w^4$ setzen und die Gleichungen $v + w = a$, $v^4 + w^4 = b$ behandeln, wo w leicht zu eliminieren ist.

Weitere Aufgaben findet man in den gebräuchlichen Sammlungen. Bisweilen führen nur Kunstgriffe zur Lösung, die vermieden werden könnten, wenn die Gleichungen 4^{ten} Grades schon jetzt zur Verfügung ständen.

78) Gleichungen, wie 11), bei denen die Unbekannten unter irgend welchen Wurzelzeichen stehen, werden als irrationale Gleichungen bezeichnet und kommen hier nur soweit in Betracht, als sie sich auf rationale Gleichungen niederen Grades zurückführen lassen.

Ebenso wird auf ein Durchnehmen der transcendenten Gleichungen, bei denen die Unbekannte als Potenzexponent vorkommt, z. B. als a^x, b^x u. s. w. (wohin nach Kapitel VI auch $\cos x$, $\sin x$ u. s. w. gehören) verzichtet. Nur auf solche kann hingewiesen werden, die sich in einfacher Weise auf rationale algebraische Hülfsgleichungen zurückführen lassen.

Handelt es sich z. B. um $10^{2x} + a10^x = b$, so setze man $10^x = y$, dies giebt $y^2 + ay = b$, also $y = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$, folglich $x = {}^{10}\lg y = {}^{10}\lg \left[- \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right]$.

Ebenso führt $e^{2x} + ae^x = b$ auf $x = {}^{e}\lg \left[- \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right]$.

Von hier aus kann man zu Gleichungen übergehen, die sich durch entsprechende Substitution in reducierbare von höherem Grade verwandeln.

Bei $\cos x + a \sin x = b$ setzt man $\cos x = z$ und findet $z + a\sqrt{1 - z^2} = b$, $a^2(1 - z^2) = (b - z)^2$, bestimmt z und berechnet x mit Hülfe der trigonometrischen Tabellen.

Dagegen sind Gleichungen wie $x + a \cos x = b$ mit elementaren Hülfsmitteln nicht lösbar.

Unten werden unter Nr. 24 der Trigonometrie noch einige goniometrische Gleichungen behandelt.
