Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes.*)

36) Setzt man in der identischen Gleichung $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ für x der Reihe nach die ganzzahligen Werte $1, 2, 3, \ldots n$, so entsteht folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0^3 &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 \\ 1^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 \\ 2^3 &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 \\ &\;\vdots \\ (n-1)^3 &= n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1. \end{aligned}$$

Durch Addition der senkrechten Kolonnen erhält man eine neue Gleichung, in der sich alle Glieder 3^{ter} Potenz bis auf das einzige n^3 wegheben, so daß stehen bleibt:

$$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n.$$

Demnach ist die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis n^2

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) - \frac{n}{3}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3},$$

oder endlich

1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgaben. Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis 100^2? Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von 200^2 bis 300^2?

37) Macht man dasselbe mit der identischen Gleichung

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

so ist die durch Addition der senkrechten Kolonnen entstehende Gleichung

*) Dieser Abschnitt ist nur dann durchzunehmen, wenn es wünschenswert erscheint, in der Stereometrie gelegentlich der Simpson- bzw. Summenformel über den dritten Grad hinauszugehen.

$$0 = n^4 - 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdot\cdot + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot + n^2)$$
$$- 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

so daß die Summe der Kubikzahlen von 1^3 bis n^3 wird:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$
$$= \frac{n^4}{4} + \frac{6}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot + n^2) - \frac{4}{4}(1 + 2 + 3 + \cdot\cdot + n) + \frac{n}{4}$$
$$= \frac{n^4}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{4},$$

oder endlich:

$$2) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdot\cdot + n)^2.$$

Die Summe der n ersten Kubikzahlen ist also stets eine Quadratzahl und zwar das Quadrat von der Summe der n ersten Zahlen.

Aufgaben. Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von 1^3 bis 100^3, und das Quadrat von welcher Zahl ist diese Summe? Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von 200^3 bis 300^3?

Bilde in derselben Weise, wie oben, die Formeln für

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdot\cdot + n^4 \quad \text{und} \quad 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdot\cdot + n^5.$$

38) **Bemerkung.** Aus

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

folgt nach beiderseitiger Division durch n^2

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Setzt man $n = \infty$, so fällt $\frac{1}{2n}$ weg, und man erhält die Formel:

$$3) \qquad \text{für } n = \infty \text{ ist } \quad \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Aus $\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

folgt nach beiderseitiger Division durch n^3

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Setzt man $n = \infty$, so fallen rechts die beiden letzten Glieder weg, und man hat die Formel

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \quad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Ebenso ergiebt sich für $n = \infty$

$$4) \qquad \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Allgemeiner gilt für ganzes positives p der Satz:

$$5) \qquad \text{für } n = \infty \text{ ist } \quad \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

wofür man auch schreiben kann

$$5^*) \qquad \text{für } n = \infty \text{ ist } \quad \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n} m^p = \frac{1}{p+1}.$$

[Die Formeln dieses Abschnitts finden vielfache Anwendung in der Kurvenlehre, Stereometrie und Mechanik, z. B. bei der Flächenberechnung von Parabeln 2^{ter} und höherer Ordnung, bei der Untersuchung der Kreisevolvente, bei der Inhaltsberechnung von Paraboloiden höherer Ordnung, auch bei gewissen Ableitungen der Simpson-Newtonschen Regel und der Summenformel der Stereometrie, bei der Untersuchung schräg abgeschnittener Prismen und Cylinder, bei der Berechnung von Trägheitsmomenten, elastischen Linien und Träger-Abbiegungen, bei hydrostatischen Untersuchungen u. s. w. Es handelt sich dabei um das Umgehen der Integration ganzer rationaler Funktionen. Auf höherem Standpunkte wird bewiesen, daß die Formel auch für gebrochenes p gilt, nur muß dann $p > -1$ sein.]

39) Die Reihen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ oder $\sum\limits_{m=1}^{m=n} m^2$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ oder $\sum\limits_{m=1}^{m=n} m^3$, überhaupt die Reihen $\sum\limits_{m=1}^{m=n} m^p$ sind arithmetische Reihen 2^{ter}, 3^{ter}, $\ldots$ p^{ter} Ordnung.

Bei der ersten z. B. folgen auf einander die Glieder

$$n^2, \quad (n+1)^2, \quad (n+2)^2, \quad (n+3)^2, \cdots$$

deren Differenzen sind

$$(2n+1), \quad (2n+3), \quad (2n+5), \cdots,$$

was eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung ist, so daß die ursprüngliche 2ter Ordnung war.

Bei der folgenden Reihe handelt es sich um

$$n^3, \quad (n+1)^3, \quad (n+2)^3, \quad (n+3)^3, \quad (n+4)^3, \cdots$$

also um die Differenzen

$$(3n^2 + 3n + 1), \quad (3n^2 + 9n + 7), \quad (3n^2 + 15n + 19), \quad (3n^2 + 21n + 37), \cdots.$$

Dazu sind die Differenzen

$$(6n + 6), \quad (6n + 12), \quad (6n + 18), \cdots.$$

Letzteres ist eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung, die ursprüngliche also von der dritten Ordnung. So kann man fortfahren.

40) Dasselbe ergiebt sich in zwingender Weise bei folgender Ableitung der Reihen $\sum m^p$, die unabhängig vom binomischen Lehrsatze ist.

Aus der in Abschnitt 25 behandelten Identität $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1}$ folgt $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x = \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}$ oder $\frac{2x(x+1)}{1 \cdot 2} - 2x = x^2 - x$, so daß auch folgende Identität gilt:

$$x^2 = 2\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x.$$

Setzt man für x der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \cdots, n$, und addiert man die Kolonnen der unter einander geschriebenen Zahlengleichungen, so erhält man

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$= 2\left[\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right] - [1 + 2 + 3 + \cdots + n]$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rechts steht ursprünglich die Differenz zweier arithmetischer Reihen, von denen die eine 2ter, die andere 1ter Ordnung ist.

Eine sehr einfache Betrachtung zeigt nun, daß die Summe oder Differenz zweier arithmetischer Reihen höherer Ordnung stets wieder eine solche Reihe ist, deren Ordnung im allgemeinen mit der Reihe von der höheren Ordnung übereinstimmt. Folglich steht hier rechts, wie auch links eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung.

In ähnlicher Weise folgt aus der gleichfalls unter 24) behandelten Identität

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1\cdot 2}.$$

$$\frac{x(c+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{(x-1)x(x+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{x^3-x}{1\cdot 2\cdot 3},$$

und daraus ergiebt sich die Identität

$$x^3 = 6\,\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3} - 6\,\frac{x(x+1)}{1\cdot 2} + x.$$

Setzt man wiederum für x die Werte $1, 2, 3, \cdots n$ und addiert, so entsteht

$$\begin{aligned} &1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \\ &= 6\left[\tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right] \\ &- 6\left[\tfrac{1\cdot 2}{1\cdot 2} + \tfrac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + \tfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\right] + [1+2+3+\cdots+n] \\ &= 6\,\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 6\,\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite handelt es sich um Vereinigung dreier arithmetischer Reihen, von denen die höchste von der dritten Ordnung ist. Also ist auch die Reihe der Kubikzahlen eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß $1^p + 2^p + \cdots + n^p$ für ganzes positives p eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung ist.

V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen.*)

41) Nach dem binomischen Satze ist für ganzes positives n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{1}{n^4} + \cdots.$$

*) Dieser Abschnitt kann auf dem Gymnasium überschlagen werden, obwohl pädagogische Schwierigkeiten seine Durchnahme nicht hindern. Er giebt der elementaren Lehre von den Logarithmen eine vorläufige Abrundung. Der binomische Lehrsatz wird dabei als nur für ganze positive Exponenten bewiesen vorausgesetzt.