Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

30a) Ableitung mit Hülfe der arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Bildet man der Reihe nach die ganzzahligen Potenzen des zweigliedrigen Ausdrucks (des Binoms) $a + b$, so erhält man $(a + b)^1 = a + b$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ u. s. w. Jeder dieser Ausdrücke ist nach fallenden und nach steigenden Potenzen von a und nach steigenden Potenzen von b geordnet, die Zahlenfaktoren aber entsprechen den Horizontalreihen des im vorigen Abschnitt behandelten Zahlendreiecks. Es fragt sich zunächst, ob dies immer der Fall ist.

Multipliziert man beispielsweise die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

beiderseits mit $a + b$, so entsteht links $(a + b)^4$, rechts aber entstehen die zu addierenden Reihen

$$\begin{array}{rl} & 1 \cdot a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 \\ & \qquad\quad + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1 \cdot b^4 \\ \hline \text{also } (a + b)^4 = & 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4. \end{array}$$

War also die Formel für $(a + b)^3$ nach fallenden und steigenden Potenzen von a bezw. b geordnet, so muß notwendig bei $(a + b)^4$ dasselbe der Fall sein.

Bekümmert man sich ferner bei der Addition nur um die Zahlenfaktoren, so sind folgende Reihen gliederweise zu addieren:

$$\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 3,\ 1, \\ \quad\ 1,\ 3,\ 3,\ 1 \\ \hline 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1. \end{array}$$

Statt jede Zahl mit der darunter stehenden zu vereinigen, kann man aber auch je zwei Nachbarzahlen der ersten Reihe summieren.

Die Reihen der Zahlenfaktoren (Binomial-Koefficienten) in den aufeinander folgenden Formeln werden also ebenso gebildet, wie die Horizontalreihen des Zahlendreiecks.

Die n^{te} Reihe desselben war aber

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},\ \ldots,$$

folglich ist auch für jedes ganze positive n

$$1)\quad (a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + \cdots.$$

Setzt man $-b$ statt b ein, so bleiben die Glieder mit geradzahligen Exponenten von b ungeändert, die anderen aber nehmen negatives Vorzeichen an. Man erhält also folgende mit abwechselnden Vorzeichen behaftete Reihe:

$$2)\quad (a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots.$$

Von Wichtigkeit ist der besondere Fall

$$3)\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots.$$

Da n als ganz und positiv angenommen ist, so bricht jede dieser Reihen mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, denn von dort ab kommt in jedem folgenden Gliede der Faktor $(n-n)=0$ vor.

Der vorstehende Beweis gründet sich auf die Eigenschaften gewisser Reihen höherer Ordnung. Ist die Durchnahme der letzteren nicht vorhergegangen, so begnüge man sich mit dem folgenden Beweise.

30b) Ableitung mit Hülfe des Schlusses von n auf $n+1$. Es ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

u. s. w.

Die rechten Seiten dieser Formeln lassen sich, wie die Ausrechnung zeigt, in folgender Form schreiben:

$$a^2 + \frac{2}{1}ab + \frac{2(2-1)}{1\cdot 2}b^2,$$
$$a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3(3-1)}{1\cdot 2}ab^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3,$$
$$a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4(4-1)}{1\cdot 2}a^2b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4,$$

daraus erkennt man die gemeinschaftliche Form

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \cdots,$$

die zunächst für $n = 2$, 3 und 4 als richtig erprobt ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß die beiderseitige Multiplikation mit $a + b$ auf eine Formel von derselben Gestalt führt. Man erhält nämlich:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n}{1} a^n b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \cdots$$
$$+ a^n b + \frac{n}{1} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^3 + \cdots,$$

oder, wenn man die gleichnamigen Glieder addiert,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \cdots,$$

also, wenn man $n + 1 = \nu$ setzt:

$$(a+b)^\nu = a^\nu + \frac{\nu}{1} a^{\nu-1} b + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} a^{\nu-2} b^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\nu-3} b^3 + \cdots,$$

was mit der obigen gemeinschaftlichen Form übereinstimmt.

Gilt also die binomische Formel für irgend ein ganzzahliges n, so gilt sie auch für die nächste ganze Zahl $(n + 1)$. Gilt sie also für den Exponenten 4, so gilt sie auch für 5, folglich auch für 6, 7, 8, 9 . . .

[Diese Beweismethode nennt man den Schluß von n auf $(n + 1)$, ein besonders von dem Mathematiker Kästner angewandtes Verfahren. Es hat den Mangel, die innere Notwendigkeit der gemeinschaftlichen Formel nicht erkennen zu lassen.]

[31) Auf einem höheren Standpunkte wird gezeigt, daß die binomische Reihe

$$1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots,$$

die sich ins Unendliche erstreckt, wenn n nicht zugleich ganz, positiv und reell ist, im allgemeinen nicht summiert werden kann, daß dies aber doch möglich ist, sobald der absolute Betrag von x kleiner als 1 ist. Im letzteren Falle ergiebt sich als Summe der unendlichen Reihe wiederum der Ausdruck $(1+x)^n$. Die Bedingung der Konvergenz (Summierbarkeit) ist also ganz dieselbe, wie bei der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Feinere Untersuchungen über die Konvergenz überschreiten den Standpunkt der Schule.]

32) **Bemerkung.** Aus

$$(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

was für ganzes positives n richtig ist, folgt, daß die Summe jeder Horizontalreihe des Zahlendreiecks eine Potenz von 2 ist. Also z. B.

$$1 + 1 = 2^1, \quad 1 + 2 + 1 = 2^2, \quad 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3,$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4.$$

Dagegen ist

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = 0,$$

also ist z. B.

$$1 - 2 + 1 = 0,$$
$$1 - 3 + 3 - 1 = 0,$$
$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0,$$

u. s. w. Jede Reihe des Zahlendreiecks giebt also bei abwechselnden Vorzeichen die Summe Null.

33) **Aufgaben.** Wie lautet die Formel für $(a+b)^n + (a-b)^n$? Wie lautet die Formel für $(a+b)^n - (a-b)^n$? Wie lautet die Formel für $(2x + 3y^2)^5$, für $(2x - 3y^2)^5$, für $(2x + 3y^2)^5 + (2x - 3y^2)^5$, für $(2x + 3y^2)^5 - (2x - 3y^2)^5$? Wie heißt das 4te Glied der Formel für $(3x + 5y^3)^7$?

34) **Bemerkung.** Es ist

$$\left(1 + \tfrac{3}{10\,000}\right)^2 = 1 + 0{,}0006 + 0{,}00000009 = 1{,}00060009,$$

also, wenn man mit weniger als 8 Stellen Genauigkeit rechnet, $1{,}0003^2 = \sim 1{,}0006$*). Umgekehrt ist $\sqrt{1{,}0006} = \sim 1{,}0003$.

Allgemeiner: Ist α klein im Verhältnis zu 1, so kann man in $(1 \pm \alpha)^2 = 1 \pm 2\alpha + \alpha^2$ den letzten Posten streichen und erhält $(1 \pm \alpha)^2 = \sim 1 \pm 2\alpha$. Umgekehrt ist $\sqrt{1 \pm 2\alpha} = \sim 1 \pm \alpha$, also $\sqrt{1 \pm \alpha} = \sim 1 \pm \frac{\alpha}{2}$.

Ferner ist

$$\left(1 + \frac{2}{10\,000}\right)^3 = 1 + 0{,}0006 + 0{,}0000\,0012 + 0{,}0000\,0000\,0027$$
$$= 1{,}000600120027,$$

also bei Rechnungen mit geringerer Genauigkeit $(1{,}0002)^3 = \sim 1{,}0006$, und umgekehrt $\sqrt[3]{1{,}0006} = \sim 1{,}0002$.

Allgemeiner ist es bei kleinem α gestattet, in der Formel

$$(1 \pm \alpha)^3 = 1 \pm 3\alpha + 3\alpha^2 \pm \alpha^3$$

die beiden letzten Glieder zu streichen, so daß man hat

$$(1 \pm \alpha)^3 = \sim 1 \pm 3\alpha,$$

und umgekehrt:

$$\sqrt[3]{1 \pm 3\alpha} = \sim 1 \pm \alpha \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{1 \pm \alpha} = \sim 1 \pm \frac{\alpha}{3}.$$

[35) Anwendung finden diese abgekürzten Berechnungen vielfach in der Physik und Mechanik. Ist z. B. der lineare Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers bei der Erwärmung um einen Grad Celsius gleich $\frac{1}{n}$, so daß seine Länge l in $l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ übergeht, so würde der Kubikinhalt des Würfels mit Kante l aus l^3 übergehen in $l^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \sim l^3\left(1 + \frac{3}{n}\right)$. Weil $\frac{3}{n}$ das Dreifache von $\frac{1}{n}$ ist, sagt man, der kubische Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers sei das Dreifache vom linearen Ausdehnungskoeffizienten.]

*) $\sim$ bedeutet hier „angenähert" oder „abgerundet".