Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

II. Arithmetische Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

II. Arithmetische Reihen.

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

21) Die Glieder einer Zahlenreihe können auch so aufeinander folgen, daß der Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist, wie z. B. in

$$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots,$$

dann nennt man die Reihe eine arithmetische Reihe.

Ist a das Anfangsglied, n die Anzahl der Glieder und d die konstante Differenz, so lautet die Reihe folgendermaßen:

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\ \ldots,\quad a+(n-1)d.$$

Das n^{te} Glied hat also, auch wenn es nicht Schlußglied ist, die Form

$$t = a + (n-1)d.$$

22) Die Summe der arithmetischen Reihe kann man finden, indem man sie zweimal in entgegengesetzter Ordnung hinschreibt, also z. B.

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (t-d) + t,$$
$$s = t + (t-d) + (t-2d) + \cdots + (a+d) + a.$$

Durch beiderseitige Addition erhält man

$$2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) \cdots + (a+t) + (a+t)$$

oder

$$2s = n(a+t),$$

demnach ist

$$s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Dasselbe Resultat findet man durch folgende Überlegung: Der mittlere Wert des ersten und des letzten Gliedes ist $\frac{a+t}{2}$, der des zweiten und des vorletzten Gliedes ebenfalls $\frac{a+t}{2}$ u. s. w., $\frac{a+t}{2}$ ist also überhaupt das arithmetische Mittel sämtlicher Glieder. Die Summe der Reihe muß demnach $n\frac{a+t}{2}$ sein.

23) **Übungsaufgaben.** Wie groß ist die Summe der n ersten Zahlen der gewöhnlichen Zahlenreihe?

$$\left[s = \frac{n(n+1)}{2};\ \text{z. B. } 1 + 2 + 3 + \cdots + 199 = \frac{199 \cdot 200}{2} = 19\,900.\right]$$

Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?

$$[s = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n^2,$$

also stets eine Quadratzahl, z. B. $1 + 3 + 5 + \cdots + 11 = 36 = 6^2$.]

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 101 bis 200? [Gliederzahl $n = 100$, also $s = \frac{n}{2}(a + t) = \frac{100}{2}(101 + 200)$ $= 50 \cdot 301 = 15\,050$.]

Wie groß ist die Summe der geraden Zahlen von 102 bis 200? [Gliederzahl $n = 50$, also $s = \frac{50}{2}(102 + 200) = 25 \cdot 302$ $= 7550$.]

Weitere Übungsaufgaben siehe z. B. in den Sammlungen von Bardey und Heis.

b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung.*)

24) **Aufgabe.** Weise nach, daß jede der folgenden Gleichungen eine **identische** ist.

a) $$\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1},$$

b) $$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2},$$

c) $$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Bemerkung. Fährt man mit der Bildung dieser Gleichungen fort, so lautet die m^{te} folgendermaßen:

d) $$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} - \frac{(x-1)x(x+1)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)}$$
$$= \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

*) Dieser Abschnitt kann überschlagen werden, wenn man sich beim Beweise des binomischen Lehrsatzes mit dem Schlusse von n auf $(n+1)$ begnügen will.

Diese Gleichung wird als identisch nachgewiesen, indem man links den gemeinschaftlichen Faktor absondert. Dies giebt

$$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}[(x+m)-(x-1)].$$

Hier ist $[x+m-(x-1)]=(m+1)$, was sich gegen den Faktor $(m+1)$ im Nenner hebt, so daß links dasselbe wie rechts stehen bleibt.

Die rechte Seite jeder dieser Gleichungen ist gleich dem Anfangsgliede auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichung. Das Gesetz ist also leicht in Worten wiederzugeben.

Aus diesen Gleichungen lassen sich gewisse Reihensummierungen ableiten, die als Vorbereitung für den wichtigen binomischen Lehrsatz zu betrachten sind.

25) Setzt man in der identischen Gleichung $\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}-\frac{(x-1)x}{1\,.\,2}=\frac{x}{1}$ für x der Reihe nach die ganzzahligen Werte $1, 2, 3, \ldots, n$ ein, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}-\frac{0\cdot 1}{1\cdot 2}=1,$$
$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}=2,$$
$$\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}-\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}=3,$$
$$\vdots$$
$$\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}-\frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2}=n-1,$$
$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}-\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}=n.$$

Durch Addition der drei Kolonnen, bei der sich jedoch in je zwei aufeinander folgenden Gleichungen gleiche Glieder entgegengesetzten Vorzeichens wegheben, entsteht folgende bereits bekannte Gleichung

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=1+2+3+\cdots+n.$$

26) Verfährt man ebenso mit den identischen Gleichungen b), c) und d), so erhält man die Formeln:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}+\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}+\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Und so kann man weiter fortfahren.

27) Vertauscht man in diesen Gleichungen die rechten und linken Seiten, und rechnet man die Anfangsglieder aus, so erhält man, von unten anfangend, folgende Gleichungen:

$$1+5+15+35+70+126+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$1+4+10+20+35+56+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$1+3+6+10+15+21+\cdots+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+\frac{n}{1}=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$1+1+1+1+1+1+\cdots+1=\frac{n}{1}.$$

Die Summe jeder dieser Reihen ist gleich dem n^{ten} Gliede der vorhergehenden Reihe. Die Differenz je zweier aufeinander folgenden Glieder jeder der Reihen giebt die Glieder der folgenden Reihe, was eine Folge der Identitäten a), b), c) und d) ist.

Man bezeichnet naturgemäß jede dieser Reihen als die erste Differenzenreihe der letzten (d. h. unmittelbar darüber stehenden) Reihe, als die zweite Differenzenreihe der vorletzten, als die dritte Differenzenreihe der drittletzten u. s. w.

Hat die erste Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so nennt man die letztere eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung. Hat die zweite Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so heißt die letztere eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung. Ebenso giebt es arithmetische Reihen 3ter, 4ter, 5ter ... Ordnung, bei denen also die 3., 4., 5., ...

Differenzenreihe lauter gleiche Glieder hat. Zu diesen Reihen verschiedener Ordnung gehören die soeben gefundenen.

28) Man bezeichnet diese Reihen auch als die Reihen der figurierten Zahlen. Sie lassen sich nämlich in eigentümlicher Weise in der Form eines symmetrischen Zahlendreiecks gruppieren, wobei jede der gefundenen Reihen zweimal vorkommt, einmal in der einen, dann in der anderen Schrägrichtung:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Jede Horizontalreihe lautet rückwärts ebenso wie vorwärts gelesen. Man kann das Zahlendreieck, mit der obersten Horizontalreihe beginnend, schnell hinschreiben, indem man unter je zwei Nachbarzahlen jeder Horizontalreihe die Summe beider Zahlen schreibt. Daher ist eben jede Schrägreihe die erste Differenzenreihe der einen benachbarten Schrägreihe.

29) **Aufgabe.** Wie lautet die n^{te} Horizontalreihe des Zahlendreiecks?

Auflösung. Die beiden ersten Zahlen sind 1 und n. Das n^{te} Glied der dritten Schrägreihe würde nach 27) $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ sein. Da aber diese Schrägreihe ein Glied weniger hat, als die voranstehende, so handelt es sich um das $(n-1)^{te}$ Glied, d. h. um $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$. Das n^{te} Glied der vierten Schrägreihe würde nach 27) $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ sein. Da es sich hier aber um das $(n-2)^{te}$ Glied handelt, so erhält man $\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, u. s. w. Die n^{te} Horizontalreihe lautet also

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},\ \ldots$$

Die Kenntnis dieser mit dem $(n+1)^{ten}$ Gliede abbrechenden Reihe ist für die Entwickelung der Mathematik von ganz außerordentlicher Bedeutung geworden.