Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

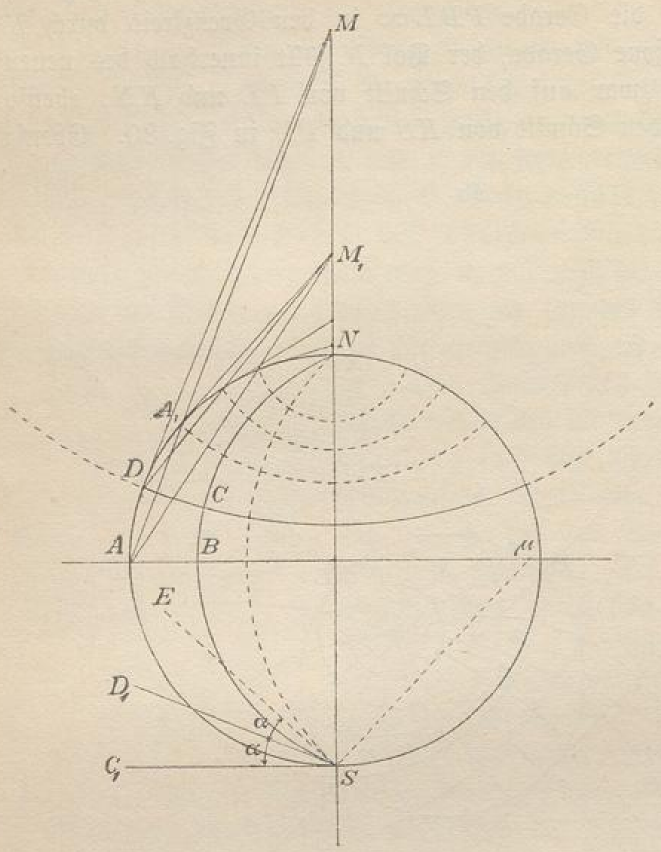
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

XIII. Der Koordinatenbegriff.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Fig. 83.



Auflösung. $ABCD$ in Fig. 83 sei das gegebene „Rechteck". Die Tangente in D giebt M auf SN. Die Gerade MA giebt den Schnitt A_1, die Tangente $A_1 M_1$ giebt den Mittelpunkt für den neuen Kreis der Schar. DM_1 und AM_1 geben zwei neue Teilpunkte u. s. w., so daß man beliebig viele Kreise der Schar zeichnen kann. In S mögen die Tangenten SC_1 und SD_1 der gegebenen Büschelkreise den Winkel α einschließen. Man mache $\sphericalangle D_1 SE = C_1 SD_1 = \alpha$, errichte auf SE das Lot $S\mu$ bis zur Horizontalen, dann ist μ der Mittelpunkt für den folgenden Büschelkreis u. s. w.

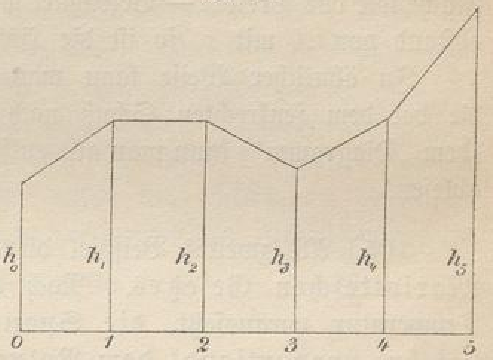
XIII. Der Koordinatenbegriff.

a) Graphische Darstellungen.

103) Statistische Verhältnisse pflegt man auf graphischem (zeichnendem) Wege zu veranschaulichen. So könnten z. B. durch Fig. 84 die Schwankungen in der Frequenz einer Schule für einen Zeitraum von 5 Jahren dargestellt werden. Die gleichen Abschnitte auf der Horizontalen bedeuten die gleichen Zeiträume (Jahre), die regelmäßige Bewegung von 0 bis 5 den Verlauf der Zeit. Die Höhen verhalten

sich wie die entsprechenden Frequenzzahlen. Zunahme im ersten, Gleichbleiben im zweiten, Abnahme im dritten, Zunahme im vierten, verstärkte Zunahme im fünften Jahre sind ohne weiteres zu erkennen.

Fig. 84.

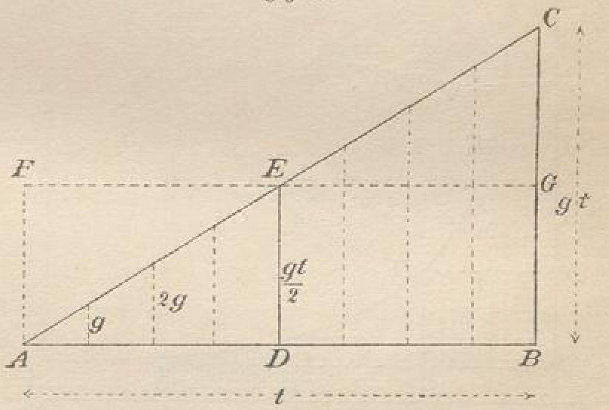


Ebenso veranschaulicht man die Schwankungen in der Bevölkerung von Städten und Staaten, in der Transportmenge von Eisenbahnen und Hafenanlagen, die Schwankungen in der Produktion der Landwirtschaft, der Bergwerke, der Industrie, die Preisschwankungen des Getreides, des Eisens u. s. w., die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks (Barometerstandes), des Wasserstandes der Flüsse, u. s. w. Bei einer größeren Anzahl gleicher Zeiträume kann man die mittlere Höhe als die Veranschaulichung des mittleren Zustandes betrachten.

101) Aus einigen Beispielen wird man den Nutzen solcher Darstellungen für die mathematische Physik erkennen.

Fig. 85 veranschaulicht die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume freifallenden (oder eines von konstanter Triebkraft bewegten) Körpers. Ist g die Geschwindigkeitszunahme für jede Sekunde, so hat der Körper nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $8g$, nach t Sekunden die Geschwindigkeit gt. Die Endpunkte der Geschwindigkeitslote liegen in einer Geraden. Das mittlere Lot giebt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{gt}{2}$ an. Diese,

Fig. 85.



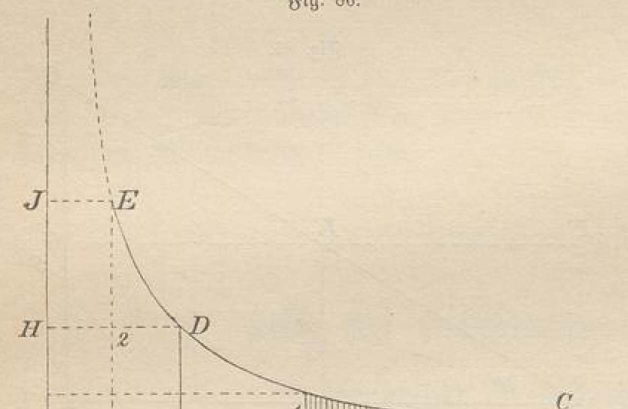
auf die Zeit t ausgedehnt, giebt den Weg $\frac{1}{2}gt^2$, und zwar auch für die beschleunigte Bewegung, der Inhalt des Dreiecks von Basis t und Höhe gt ist ebenfalls $\frac{1}{2}gt^2$. Die Dreiecksfläche stellt also den vom Körper zurückgelegten Weg dar. Die einzelnen Trapezflächen geben den Weg in den einzelnen Sekunden an. Das Rechteck der mittleren Geschwindigkeit $ABGF$ hat natürlich dieselbe Fläche wie das Dreieck. — Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von A mit x, so ist die Höhe an jeder Stelle $y = gx$.

In ähnlicher Weise kann man die Bewegung veranschaulichen, die bei dem senkrechten Schuß nach oben entsteht. Aus der Figur (dem „Diagramm") kann man alle entsprechenden Bewegungsverhältnisse ablesen.

105) Als zweites Beispiel diene die graphische Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Nach diesem ist, wenn man konstante Temperatur voraussetzt, die Spannung einer Gasmenge umgekehrt proportional dem Volumen.

In Fig. 86 ist nun Folgendes dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 der Grundlinie stellen die Volumina 0, 1, 2, 3, 4 dar. An der Stelle 1 ist die Spannung $AD = 1$ angenommen, z. B. gleich 1 Atmosphäre (10 334 kg pro qm der Druckfläche). Dann ist an Stelle 2, 3, 4, ... die Spannung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... als Lot aufzusetzen. Dagegen würde an Stelle $\frac{1}{2}$ das Lot $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ zu zeichnen sein. Das Diagramm kann nach links bis zur Stelle $x = 0$, nach rechts bis zum unendlichen Bereiche $(x = \infty)$ ausgedehnt werden. Die Endpunkte der Lote bilden eine später zu besprechende Kurve, die man als die Mariottesche Kurve bezeichnen kann. (Sie wird wegen Annahme konstanter Temperatur auch als Isotherme bezeichnet.) Gewisse in der Figur angedeutete Rechtecke sind inhaltsgleich, z. B. $OFEJ$ und $OADH$.

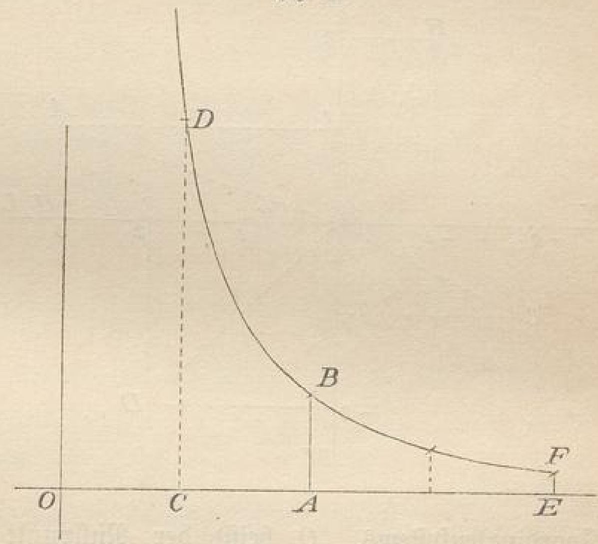
Fig. 86.



Da in der Mechanik das Produkt aus der Kraft und dem Kraftwege Arbeit bedeutet, so stellen die kleinen als Rechtecke aufzufassenden senkrechten Flächenstreifen, wie sie von 2 bis 3 angedeutet sind, Arbeiten dar, die z. B. in Meterkilogrammen zu messen sind. Die Fläche $ABCD$ stellt also die Expansionsarbeit dar, welche die Luft bei der Ausdehnung auf das vierfache Volumen leistet, wenn die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Dagegen stellt die Fläche $ADEF$ die Arbeit dar, die nötig ist, um unter Konstanthaltung der Temperatur dieselbe Luft auf das halbe Volumen zusammenzupressen. Es handelt sich also in Fig. 86 zugleich um das Arbeitsdiagramm für Expansion und Kompression unter der Bedingung konstanter Temperatur. Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von O mit x, so ist die zugehörige Höhe stets $y = \frac{1}{x}$.

[106) Als drittes Beispiel diene die graphische Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Nach diesem ist die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskörper umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Befindet sich z. B. die Sonne in O, die Erde in A (Fig. 87), und stellt AB die Größe der gegenseitigen Anziehung für die Entfernung OA dar, so ist diese für die halbe Entfernung OC viermal so groß, für die doppelte Entfernung OE der vierte Teil. Setzt man also $OA = 1$, und einen beliebigen Horizontalabstand $= x$, so ist die zugehörige Anziehung durch das Lot $y = \frac{AB}{x^2}$ zu veranschaulichen. Auch hier stellt die Fläche zwischen der Kurve und der Horizontalen eine Arbeit dar. Um z. B. den Erdball aus der Entfernung OA in die Entfernung OE zu versetzen, müßte man eine Arbeit leisten, die durch die Fläche $AEFB$ dargestellt wird. [Die Arbeit, die nötig sein würde, die Erde aus der Entfernung OA in unendliche Entfernung zu bringen, wird durch das von A aus

Fig. 87.



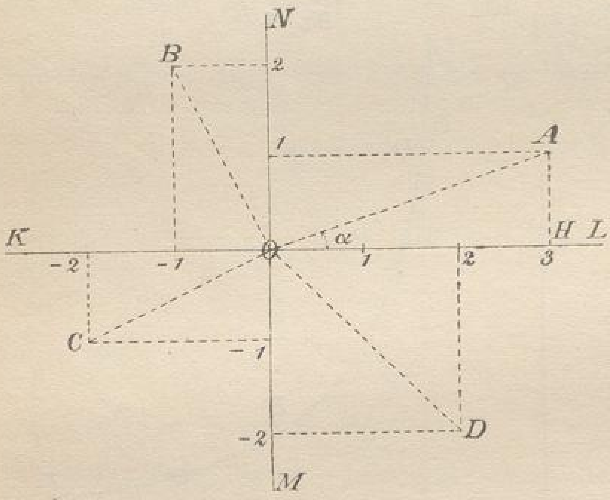
bis ins Unendliche fortgesetzte Diagramm dargestellt und als das Potential für den Punkt A bezeichnet.]

107) Man erkennt, daß sich durch solche Diagramme schwierige Dinge auf einfache Art veranschaulichen lassen. Man bezeichnet den Horizontalabstand vom Anfangspunkte als Abscisse, den Vertikalabstand als Ordinate. Beide tragen noch den gemeinschaftlichen Namen Koordinaten. Um jedoch den mathematischen Verhältnissen noch allgemeiner zu entsprechen, läßt man auch negative Abscissen und Ordinaten zu, und zwar sind die ersteren nach links, die letzteren nach unten gerichtet.

b) Die Koordinaten von Punkten.

108) In Fig. 88 hat der Punkt A die Koordinaten $x = 3$ und $y = 1$; Punkt B hat $x = -1$, $y = 2$; für den Punkt C ist $x = -2$, $y = -1$; für den Punkt D ist $x = 2$, $y = -2$. Diese Punkte liegen der Reihe nach im 1., 2., 3. und 4. Quadranten der Ebene. Den letzteren entsprechen, wie in der Trigonometrie, der Reihe nach die Vorzeichen $++$, $-+$, $--$, $+-$. Die von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade KL heißt die X-Achse, die ebenfalls von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade MN die Y-Achse des Koordinatensystems. O heißt der Nullpunkt des letzteren. Jedem reellen Koordinatenpaare x, y entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Quadrant sich aus den Vorzeichen ergiebt. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Ebene ein reelles Koordinatenpaar.

Fig. 88.



109) Die Koordinaten x und y bezeichnet man als die Cartesischen Koordinaten, nach Descartes oder Cartesius, der sie zuerst

aufgestellt hat. Da man die Lage von A auch durch den Radius $OA = r$ und den Winkel $HOA = \alpha$ darstellen kann, ebenso die Lage von B durch den Radius $OB = r$ und den Winkel $HOB = \alpha$, die des Punktes C durch den Radius $OC = r$ und den überstumpfen Winkel $HOC = \alpha$, und endlich die Lage von D durch den Radius $OD = r$ und den überstumpfen Winkel HOD, so hat man auch r und α als Koordinaten eingeführt, die sogenannten Polarkoordinaten. An jedem der genannten Punkte erkennt man, daß zwischen den Cartesischen und den Polarkoordinaten folgende Beziehungen stattfinden:

$$r = +\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\alpha = \frac{y}{x},\quad \cos\alpha = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\alpha = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\sin\alpha.$$

Das Vorzeichen von r wird stets positiv angenommen, der Wechsel der Vorzeichen wird den goniometrischen Funktionen überlassen, und zwar in derselben Weise, wie in der Trigonometrie.

110) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lauten die Koordinaten des Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie?

Auflösung. $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $y = \frac{b_1 + b_2}{2}$. Warum?

Aufgabe. Die Verbindungslinie derselben Punkte soll von Z_1 aus im Verhältnis 3 : 2 geteilt werden; wie lauten die Koordinaten des Teilpunktes?

Auflösung. $x = a_1 + \frac{3}{5}(a_2 - a_1) = \frac{2a_1 + 3a_2}{5}$;

$$y = b_1 + \frac{3}{5}(b_2 - b_1) = \frac{2b_1 + 3b_2}{5}.$$

Allgemeiner giebt die Teilung im Verhältnis $n_1 : n_2$ die Koordinaten

$$x = \frac{n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 + n_2},\quad y = \frac{n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 + n_2}.$$

Die entsprechende äußere Teilung giebt $x_1 = \frac{-n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 - n_2}$, $y_1 = \frac{-n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 - n_2}$. (Vergl. harmonische Punkte.)

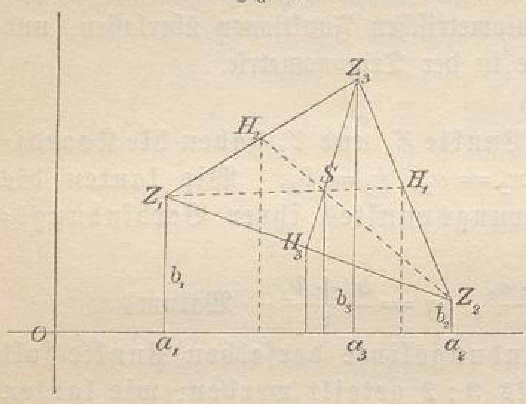
111) **Aufgabe.** Drei Punkte Z_1, Z_2, Z_3 haben die Koordinaten $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Welches sind die Koordinaten des Halbierungspunktes H_1 der Geraden $Z_2 Z_3$; und wie heißen

die Koordinaten des Punktes S, der die Gerade $Z_1 H_1$ im Verhältnis 2 : 1 teilt?

Auflösung. Die Koordinaten von H_1 in Fig. 89 sind $x = \frac{a_2 + a_3}{2}$ und $y = \frac{b_2 + b_3}{2}$. Die Koordinaten von S sind $x = \frac{1 a_1 + 2 \frac{a_2 + a_3}{2}}{2 + 1}$ $= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, $y = \frac{1 b_1 + 2 \frac{b_2 + b_3}{2}}{2 + 1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$.

Bemerkung. Dasselbe Resultat findet man, wenn man $Z_2 H_2$ und ebenso $Z_3 H_3$ im Verhältnis 2 : 1 teilt. Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem Punkte, dem Punkte mittleren Abstandes von den (beliebig gewählten) Koordinatenachsen.

Fig. 89.



Nimmt man einen vierten Punkt Z_4 dazu, und teilt man SZ_4 im Verhältnis 3 : 1, so hat der Teilpunkt die Koordinaten

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$y = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}.$$

Der neue Teilpunkt ist also ebenfalls der Punkt mittleren Abstandes. In ähnlicher Weise kann man fortfahren. Die Reihenfolge der Konstruktion ist dabei vollständig gleichgültig. Man erhält so den Schwerpunkt von 3, 4, 5 . . . gleich schwer zu denkenden Punkten der Ebene, der also der Punkt mittleren Abstandes von beiden Achsen ist.

112) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lang ist ihre Verbindungslinie, und welche Neigung besitzt sie?

Auflösung. $\overline{Z_1 Z_2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$. Die Neigung bestimmt sich aus $\tan \alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

113) **Aufgabe.** Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks $Z_1 Z_2 Z_3$, wenn die Eckpunkte die Abscissen a_1, a_2, a_3 und die Ordinaten b_1, b_2, b_3 haben? (Fig. 90.)

Auflösung.

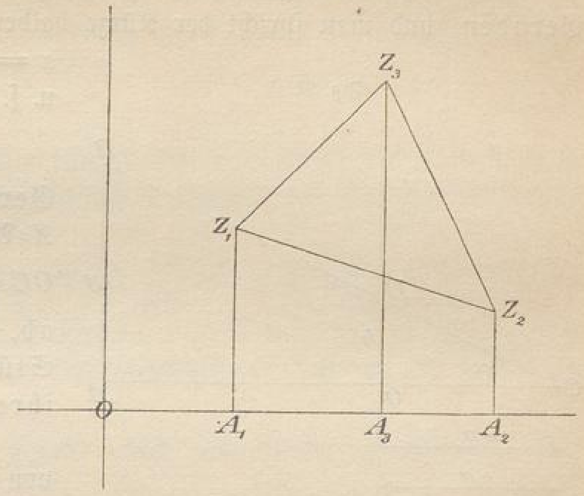


Fig. 90.

$$F = A_1 A_3 Z_3 Z_1 + A_3 A_2 Z_2 Z_3 - A_1 A_2 Z_2 Z_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_3 - a_1)(b_1 + b_3) + \tfrac{1}{2}(a_2 - a_3)(b_2 + b_3) - \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}[(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1)].$$

Bemerkung. Für den Fall, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist die Fläche gleich Null. Die Bedingung dafür, daß die Punkte $Z_1 Z_2 Z_3$ in einer Geraden liegen, ist also durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie.

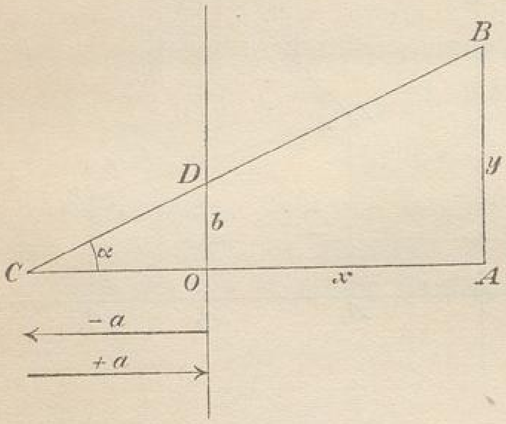
114) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $x = a$ gilt, ist eine Parallele zur Y-Achse in der Entfernung $x = + a$. Symmetrisch dazu liegt die Gerade, für deren sämtliche Punkte die Gleichung $x = - a$ gilt. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche $y = b$ ist, ist eine Parallele zur X-Achse in der Entfernung $y = + b$. Symmetrisch dagegen liegt die Gerade, für deren Punkte die Gleichung $y = - b$ gilt.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 45^0, die also den 3. und 1. Quadranten durchschneidet. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = - x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 135^0 oder $- 45^0$, die also durch den 2. und 4. Quadranten geht.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $\frac{y}{x} = \tan\alpha$ oder $y = x \tan\alpha$ gilt, ist die Gerade durch den Nullpunkt von der Neigung α.

Man nennt die betreffende Gleichung stets **die Gleichung der Geraden**, und man spricht der Kürze halber z. B. von der Geraden $x = a$, $y = b$, $y = x \tan \alpha$ u. s. w.

Fig. 91.



115) **Aufgabe.** Eine Gerade schneide auf der X-Achse das Stück $OC = -a$ (oder $CO = +a$) ab, auf der Y-Achse das Stück $OD = b$. Wie lautet ihre Gleichung? (Fig. 91.)

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkte B der Geraden CD das Lot BA auf die X-Achse und setze $OA = x$ und $AB = y$; dann ist $\triangle CAB \sim \triangle COD$, also $AB : OD = CA : CO$, d. h. $y : b = (a + x) : a$. Daraus folgt

$$y = \frac{b}{a} x + b \quad \text{oder} \quad \frac{x}{(-a)} + \frac{y}{b} = 1$$

als die Gleichung der Geraden, die beiderseitig ins Endlose verlängert zu denken ist.

Bemerkung. Die Gerade, die von der X-Achse $OC_1 = +a$, von der Y-Achse $OD = b$ abschneidet, liegt symmetrisch gegen die vorige in Bezug auf die Y-Achse. Ihre Gleichung ergiebt sich als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Möge nun a und ebenso b positiv oder negativ sein, eine Gleichung der letzten Form stellt stets eine Gerade dar, die von den Koordinatenachsen die Stücke $OC = a$ und $OD = b$ abschneidet.

116) **Aufgabe.** Was stellt die allgemeine Gleichung ersten Grades $ax + by = c$ dar, wo a, b und c reelle Größen sind?

Auflösung. Die Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)} = 1,$$

sie stellt also stets eine Gerade dar, die von der X-Achse das Stück $\frac{c}{a}$, von der Y-Achse das Stück $\frac{c}{b}$ abschneidet. Die einzige Bedingung ist, daß a und b nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, denn sonst würden beide Abschnitte unendlich groß sein und die Gerade ganz in den unendlichen Bereich fallen.

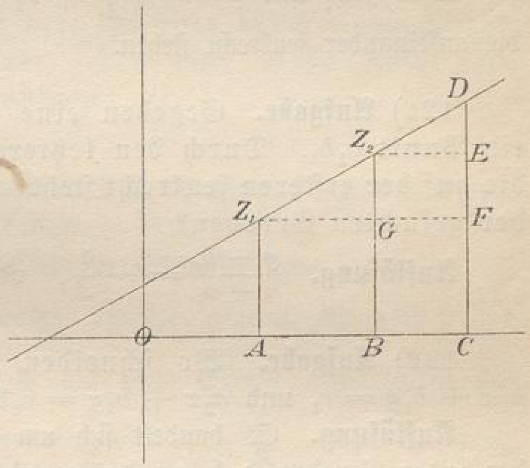
117) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die von der Y-Achse das Stück b abschneidet und die Neigung α hat?

Auflösung. In Fig. 91 ist $\frac{AB}{CA} = \tan\alpha$, also $\frac{y}{a+x} = \tan\alpha$ oder $y = x\tan\alpha + a\tan\alpha$, also, da $a\tan\alpha = b$ ist, $y = x\tan\alpha + b$. Bezeichnet man $\tan\alpha$ als Richtungskonstante mit A, so lautet die Gleichung $y = Ax + b$.

Der Aufgabe, zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, entspricht die folgende:

118) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte Z_1 und Z_2 mit den Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ geht?

Fig. 92.



Auflösung. In Fig. 92 ist $\triangle Z_2ED \sim \triangle Z_1GZ_2$, folglich

$$\frac{ED}{Z_2E} = \frac{GZ_2}{Z_1G},$$

oder

$$\frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1},$$

oder

$$y-b_2 = (x-a_2)\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}.$$

Mit Hülfe anderer ähnlicher Dreiecke findet man ebenso

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{y-b_1}{x-a_1}.$$

119) Der Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade von gegebener Neigung α zu legen, entspricht folgende

Aufgabe. Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Punkt Z mit den Koordinaten a und b, welche die Neigung α hat?

Auflösung. Die entsprechende Figur ergiebt

$$\frac{y-b}{x-a} = \tan\alpha \quad \text{oder} \quad y - b = (x-a)\tan\alpha.$$

120) **Aufgabe.** Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$?

Auflösung. Sie schneiden sich unter einem Winkel γ, der gleich der Differenz ihrer Neigungswinkel ist, also unter $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$, wo sich α_1 aus $A_1 = \tan\alpha_1$ und α_2 aus $A_2 = \tan\alpha_2$ bestimmt. Nun ist aber $\tan\gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$, also bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\tan\gamma = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2}.$$

Die Linien sind parallel, sobald $A_1 = A_2$ ist, was $\tan\gamma = 0$ giebt. Ist dagegen der Nenner des Bruches gleich Null, d. h. $1 + A_1 A_2 = 0$ oder $A_2 = -\frac{1}{A_1}$, so wird $\tan\gamma = \infty$, d. h. $\gamma = 90^0$, und die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Gleichungen von der Form $y = A_1 x + b_1$ und $y = -\frac{x}{A_1} + b_2$ stellen also stets Gerade dar, die aufeinander senkrecht stehen.

121) **Aufgabe.** Gegeben eine Gerade $y = Ax + b$ und ein Punkt $a_1 b_1$. Durch den letzteren eine Gerade zu legen, die auf der ersteren senkrecht steht. Wie lautet die Gleichung der gesuchten Geraden?

Auflösung. $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{1}{A}$, oder $y - b_1 = \frac{a_1 - x}{A}$.

122) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Geraden $a_1 x + b_1 y = c_1$ und $a_2 x + b_2 y = c_2$?

Auflösung. Es handelt sich um den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Geraden, d. h. um das gemeinschaftliche x und y der beiden Gleichungen oder, was dasselbe ist, um die Bestimmung von x und y aus den beiden Gleichungen. Die Lösung ist

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}.$$

Ebenso schneiden sich die Geraden $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$ in dem Punkte

$$x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \quad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Die Geraden $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$ und $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$ schneiden sich ebenso in

$$x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

123) **Bemerkung.** Sind $a_1 x + b_1 y = c_1$ und $a_2 x + b_2 y = c_2$ die Gleichungen zweier Geraden, multipliziert man die erste beiderseits mit einem reellen Faktor m_1 und die zweite mit einem Faktor m_2, und addiert man die linken und ebenso die rechten Seiten, so entsteht eine neue Gleichung von der Form

$$x(m_1 a_1 + m_2 a_2) + y(m_1 b_1 + m_2 b_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Da diese Gleichung durch bloße Umformung aus den beiden ersten entstanden ist, giebt sie mit jeder derselben als Lösung dasselbe x und y, wie jene beiden. Alle drei durch die Gleichungen dargestellten Geraden gehen also durch einen Punkt. Folglich:

Hat man drei Gleichungen ersten Grades, und ist die dritte Gleichung eine bloße Folge der beiden anderen, so gehen die drei durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt.

Gehen umgekehrt die drei Geraden durch einen Punkt, so ist die Gleichung einer jeden eine bloße Folge der Gleichungen der beiden anderen.

124) **Aufgabe.** Zu beweisen, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Auflösung. Die Koordinaten der Eckpunkte seien $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. Die Gleichung der Geraden, die $a_1 b_1$ gegenüberliegt, ist $\frac{y - b_3}{x - a_3} = \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = A$, das von $a_1 b_1$ auf diese Gerade gefällte Lot hat also die Richtungskonstante $A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$. Seine Gleichung ist demnach $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$ oder $x(a_3 - a_2) + y(b_3 - b_2) = a_1 a_3 - a_1 a_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2$. Ebenso sind die Gleichungen der anderen Lote, wie schon die Vertauschung der Indices zeigt,

$$x(a_1 - a_3) + y(b_1 - b_3) = a_2 a_1 - a_2 a_3 + b_2 b_1 - b_2 b_3,$$
$$x(a_2 - a_1) + y(b_2 - b_1) = a_3 a_2 - a_3 a_1 + b_3 b_2 - b_3 b_1.$$

Da man durch Addition aus den beiden ersten Gleichungen die dritte erhält, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

Bemerkung. Ebenso kann man zeigen, daß die Mittelsenkrechten, die Mittellinien und gewisse Ecktransversalen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

125) **Aufgabe.** Durch einen Punkt ab gehen die Geraden $\frac{y-b}{x-a} = A_1 = \tan\alpha_1$ und $\frac{y-b}{x-a} = A_2 = \tan\alpha_2$. Wie lautet die Gleichung der Winkelhalbierenden?

Auflösung. Ihre Neigung ist entweder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (mittlere Neigung) oder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + 90^0$. Die Gleichung also ist $\frac{y-b}{x-a} = \tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, oder $\frac{y-b}{x-a} = -\cot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. [Will man die Neigung mit Hülfe der A ausdrücken, so setze man $\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha_1}{2} + \tan\frac{\alpha_2}{2}}{1-\tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2}}$ und leite aus $\tan\alpha_1 = \frac{2\tan\frac{\alpha_1}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha_1}{2}}$ die Formel $\tan\frac{\alpha_1}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha_1}}{\tan\alpha_1}$ $= \frac{-1\pm\sqrt{1+A_1{}^2}}{A_1}$ ab, u. s. w.]

d) Die Gleichung des Kreises.

126) Ist der Kreis mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt des Koordinatensystems geschlagen, so gilt für jeden Punkt xy des Kreises die Gleichung $x^2 + y^2 = c^2$. (Fig. 93.)

Fig. 93.

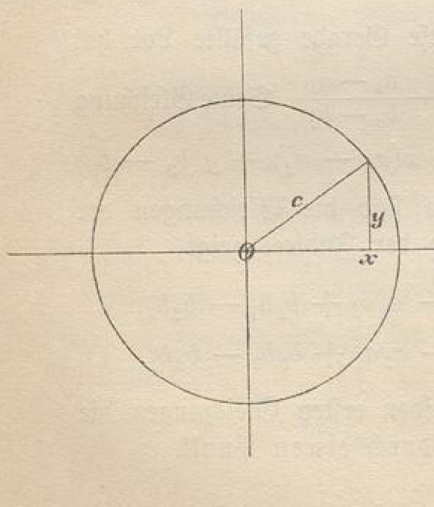
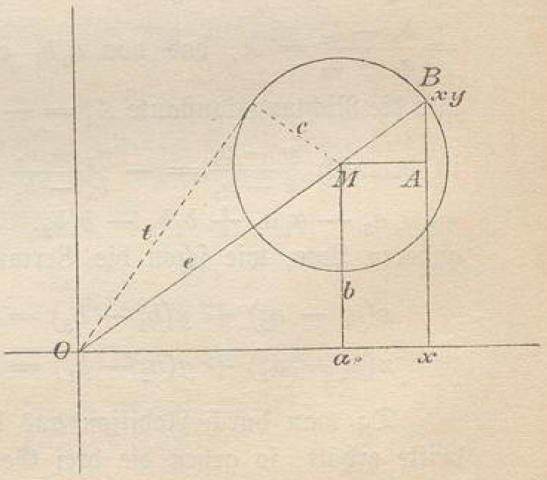


Fig. 94.



127) Ist er dagegen um einen Punkt mit den Koordinaten a, b geschlagen (Fig. 94), so folgt für jeden Punkt xy des Kreises

$$MA^2 + AB^2 = c^2,$$

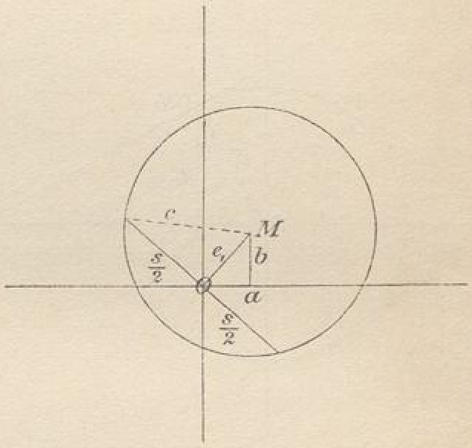
oder
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

so bedeutet der eingeklammerte konstante Ausdruck, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems außerhalb des Kreises liegt, das Quadrat der vom Nullpunkte aus gezogenen Tangente, denn $t^2 = e^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2$. (Fig. 94.) Liegt dagegen O innerhalb des Kreises, wie in Fig. 95, so ist $a^2 + b^2 - c^2 = e_1^2 - c^2 = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$, also gleich dem negativen Quadrat der halben kürzesten Sehne durch O. In beiden Fällen ist $a^2 + b^2 - c^2$ die früher erklärte Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis. (Vgl. Abschnitt 87.) Bezeichnet man sie mit P_0, so kann man die Kreisgleichung auch schreiben

Fig. 95.



$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P_0 = 0.$$

128) **Aufgabe.** Gegeben ein Kreis um den Punkt a, b mit dem Radius c und eine Gerade von der Gleichung $y = Ax + b_1$. Wo schneiden sich beide?

Auflösung. Bestimme x und y aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$

$$y = Ax + b_1.$$

Es ergeben sich zwei Werte, die entweder reell oder imaginär sind. Ausnahmsweise können sie auch in einen zusammenfallen. Dem entsprechen die Fälle des Schneidens, des Nichtschneidens und des Berührens.

129) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Tangente in einem Punkte $x_1 y_1$ des mit Radius c um den Nullpunkt geschlagenen Kreises?

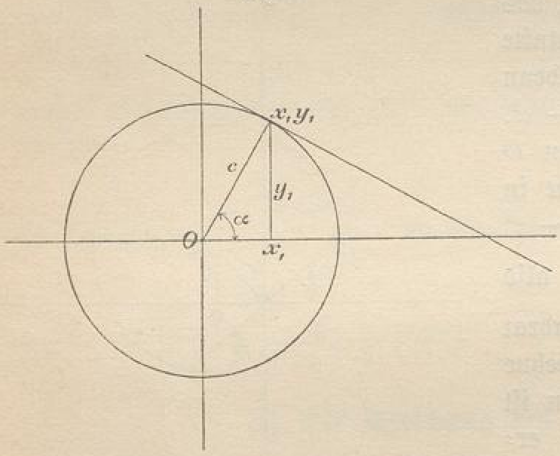
Auflösung. Der zugehörige Radius hat die Richtungskonstante

$$A = \tan\alpha = \frac{y_1}{x_1},$$

die Tangente also die Richtungskonstante

$$A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Fig. 96.



Ihre Gleichung lautet also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1},$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber $x_1^2 + y_1^2 = c^2$ ist, so lautet die Gleichung einfacher $xx_1 + yy_1 = c^2$.

Bemerkung. Die Tangentengleichung läßt sich demnach unmittelbar aus der Kreisgleichung $xx + yy = c^2$ ableiten, indem man einem der Faktoren x und einem der y den Index 1 beilegt.

130) **Aufgabe.** Die vorige Aufgabe für einen um den Punkt $x = a$, $y = b$ geschlagenen Kreis.

Die vorige Methode ergiebt als Tangentengleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

was sich ebenfalls bequem mit der Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

in Beziehung setzen läßt.

131) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare eines innerhalb (oder außerhalb) des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punktes $x_1 y_1$?

Auflösung. Man bilde in Fig. 97 auf dem zu $x_1 y_1$ gehörigen Radius den reciproken Punkt $x_2 y_2$. Hat der erstere von O die Entfernung e_1, so hat der andere die Entfernung $\frac{c^2}{e_1}$. Demnach ist $\frac{OB}{OC} = \frac{e_1}{\left(\frac{c^2}{e_1}\right)} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, und ebenso $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, also $x_2 = \frac{x_1 c^2}{e_1^{\,2}}$, $y_2 = \frac{y_1 c^2}{e_1^{\,2}}$. Der Radius hat die Richtungskonstante $A = \frac{y_1}{x_1}$, die Polare also die Richtungskonstante $-\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}$. Ihre Gleichung ist also

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = -\frac{x_1}{y_1}$$

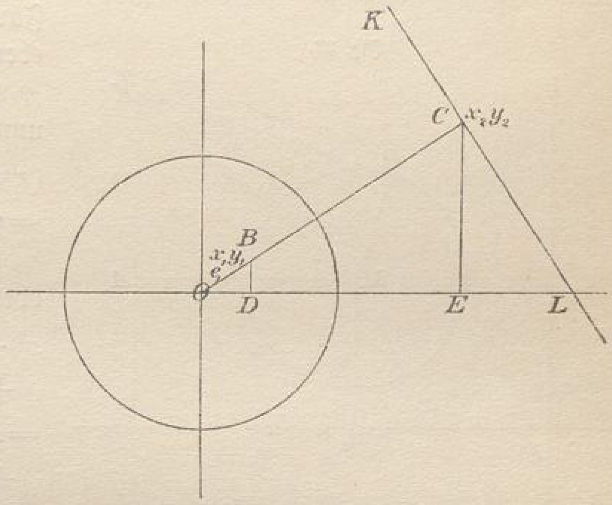
oder

$$yy_1 - y_1 y_2 = -xx_1 + x_1 x_2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Fig. 97.



Setzt man für x_2 und y_2 die oben berechneten Werte ein, so geht die rechte Seite über in $\frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{e_1^{\,2}} c^2$ oder in c^2, und es ergiebt sich wie bei der Tangente, die Gleichung

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

(Für den Fall, daß der Punkt außerhalb liegt, gilt dieselbe Entwickelung. Zur Übung soll unten noch eine andere gegeben werden.)

132) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Kreise $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = c_1^{\,2}$ und $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = c_2^{\,2}$?

Auflösung. Die Gleichungen lassen sich schreiben

1. $$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 = 0,$$

2. $$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 = 0,$$

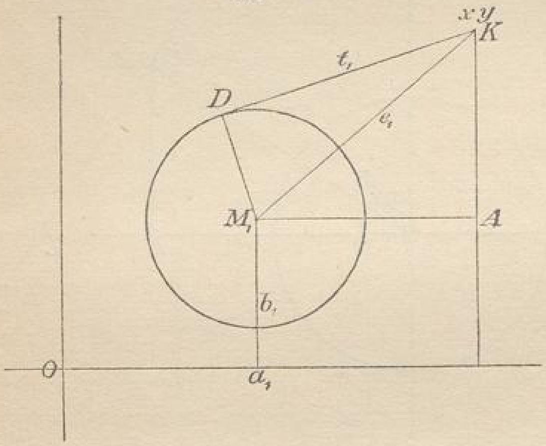
wo $P_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - c_1^{\,2}$ und $P_2 = a_2^{\,2} + b_2^{\,2} - c_2^{\,2}$ ist. Durch Subtraktion erhält man die Gleichung ersten Grades

3. $$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Da sie aber aus den beiden anderen Gleichungen abgeleitet ist, so ist die Gleichung eine durch die Schnittpunkte der Kreise gehende Gerade, d. h. die Gleichung der gemeinschaftlichen Sekante (Potenzlinie). Aus dieser Gleichung und einer der beiden ersteren sind die Koordinaten x und y der beiden Schnittpunkte zu berechnen.

133) Was bedeutet aber Gleichung 3., wenn die Kreise sich nicht schneiden? Vermutlich wiederum die Potenzlinie, d. h. die Linie gleicher Tangenten. Die Gleichung dieser Linie bestimmt sich folgendermaßen: In Fig. 98 ist $t_1^2 = e_1^2 - c_1^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2$. Für den zweiten Kreis wird ebenso $t_2^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2$. Soll nun $t_1 = t_2$ sein, so ist

Fig. 98.



$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + (a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2),$$

oder nach Hebung der gleichen Glieder und bei Einführung der Bezeichnungen P_1 und P_2

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Demnach ist die Gleichung 3. auch im Falle des Nichtschneidens die der Potenzlinie oder der Linie gleicher Tangenten. Also:

Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise stets die Gleichung der Potenzlinie.

134) Daß die Potenzlinien dreier Kreise stets durch einen Punkt, das Potenzcentrum, gehen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Sind a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 die Kreismittelpunkte und c_1, c_2, c_3 die Radien, so sind die Gleichungen der Potenzlinien:

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2,$$
$$2x(a_2 - a_3) + 2y(b_2 - b_3) = P_2 - P_3,$$
$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = P_3 - P_1.$$

Durch Addition erhält man aus den beiden ersten Gleichungen die dritte, folglich gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

135) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Berührungssehne (Polare) zu einem außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punkte $x_1 y_1$? (Vgl. 131.)

Auflösung. Das Quadrat der Tangente ist, wie früher, $t^2 = e^2 - c^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$. Der mit t um $x_1 y_1$ geschlagene Kreis hat also die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = t^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$, oder, wenn man die Klammern ausrechnet und einiges hebt:

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = - c^2 .$$

Der gegebene Kreis war aber

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

durch Subtraktion erhält man die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise, d. h. die der gesuchten Berührungssehne, also $2xx_1 + 2yy_1 = 2c^2$, oder, wie oben

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

136) **Bemerkung.** Sämtliche Punkte der senkrechten Geraden $x_1 = a$ haben, wenn y_n die veränderliche Ordinate bedeutet, in Bezug auf den untersuchten Kreis Polaren von der Gleichung

$$xa + yy_n = c^2 .$$

Setzt man hier $y = 0$, so wird $xa = c^2$ oder $x = \frac{c^2}{a}\cdot$ Folglich: Die Polaren sämtlicher Punkte der Geraden $x_1 = a$ gehen durch den reciproken Punkt $x_2 = \frac{c^2}{a}\cdot$ (Was geometrisch von dieser Geraden gilt, gilt von sämtlichen Geraden.)

137) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare zu einem Punkte $x_1 y_1$ in Bezug auf den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$?

Die nach obiger Methode auszuführende Rechnung führt auf die Gleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

die wieder in einfacher Beziehung zur Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

steht.