Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

III. Beziehungen zwischen den Seiten; Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks.

halbiert wird. Demnach sind die Punkte H, F, S, M harmonische Punkte. Die Gerade HM heißt die Eulersche Gerade.

Der Radius des Um-Kreises ist doppelt so groß, wie der des Feuerbachschen Kreises. S und H sind Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

(**Aufgaben:** $\triangle$ aus $HM = e$, r und a, aus $HM = e$, r und MA_1 u. s. w.)

III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks.*)

16) **Aufgabe.** Die Seiten x, y, z eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2, h_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus $F = \frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $y = \frac{xh_1}{h_2}$, ebenso ist $z = \frac{xh_1}{h_3}$. (Die dritte Gleichung $y = \frac{zh_3}{h_2}$ würde nichts neues geben.) Man setze die Werte von y und z in die Gleichung

$$F = \frac{xh_1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$$

ein, wobei z. B. $x + y + z = x + \frac{xh_1}{h_2} + \frac{xh_1}{h_3} = x\frac{h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1}{h_2h_3}$ wird. Diese geht dann über in

$$\frac{xh_1}{2} =$$

$$\frac{x^2}{4h_2{}^2h_3{}^2}\sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

Nach beiderseitiger Division durch x folgt, wenn man a, b, c für x, y, z setzt:

$$a = \frac{2h_1h_2{}^2h_3{}^2}{N}, \quad b = \frac{2h_2h_3{}^2h_1{}^2}{N}, \quad c = \frac{2h_3h_1{}^2h_2{}^2}{N},$$

wo

$$N =$$

$$\sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

17) **Aufgabe.** Die Seiten eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2 und h_3 zu konstruieren.

Auflösung. Aus $\frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $x : y = h_2 : h_1$ und $x : z = h_3 : h_1$. Demnach ist das Verhältnis der Dreiecksseiten bekannt

---

*) Dieser Abschnitt hat nur Bedeutung für gelegentliche Übungen im Berechnen. Zu den folgenden Kapiteln steht er nicht in Beziehung.

$\left(x:y:z = h_2:h_1:\frac{h_1 h_2}{h_3}\right)$. Man konstruiere ein Dreieck mit beliebiger Seite x' und den Seiten y' und z', die dieser Proportion entsprechen. Ist dann h_1' die Höhe dieses Dreiecks auf x', so ist $x = x'\frac{h_1}{h_1'}$ als Seite des gesuchten Dreiecks leicht zu konstruieren.

Diese Konstruktion ist weit bequemer, als die mit Hülfe der oben berechneten Ausdrücke durchzuführende.

Bemerkung. Die umgekehrte Aufgabe, die Höhen aus den Seiten zu berechnen, ist schon in Teil I. gelöst worden. Sie führte auf

$$h_1 = \frac{2F}{a} = \frac{2}{a}\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

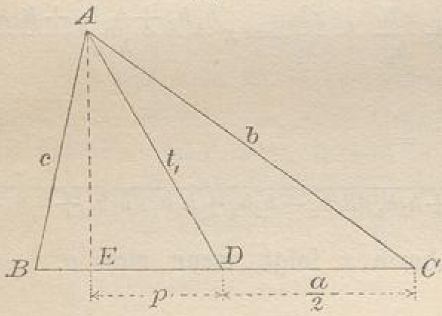
so daß man hat:

$$h_1 = \frac{W}{2a}, \quad h_2 = \frac{W}{2b}, \quad h_3 = \frac{W}{2c},$$

wo $W = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

18) **Aufgabe.** Die Mittellinien t_1, t_2, t_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Fig. 11.



Auflösung. In Fig. 11 ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für das allgemeine Dreieck

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 + 2\frac{a}{2}p$$

und

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 - 2\frac{a}{2}p,$$

also durch Addition

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t_1^2,$$

so daß man hat

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

19) **Aufgabe.** Die Seiten x, y und z eines Dreiecks aus den Mittellinien t_1, t_2, t_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus den letzten Formeln folgt

$$\text{a)}\ 2y^2 + 2z^2 - x^2 = 4t_1^2, \quad \text{b)}\ 2z^2 + 2x^2 - y^2 = 4t_2^2,$$

$$\text{c)}\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 4t_3^2.$$

Durch Subtraktion erhält man daraus

$$x^2 - z^2 = \tfrac{4}{3}(t_3^2 - t_1^2), \quad y^2 - x^2 = \tfrac{4}{3}(t_1^2 - t_2^2).$$

Berechnet man z^2 aus der ersten und y^2 aus der zweiten Gleichung, und setzt man ihre Werte in c) ein, so folgt, wenn man a, b, c statt x, y, z setzt:

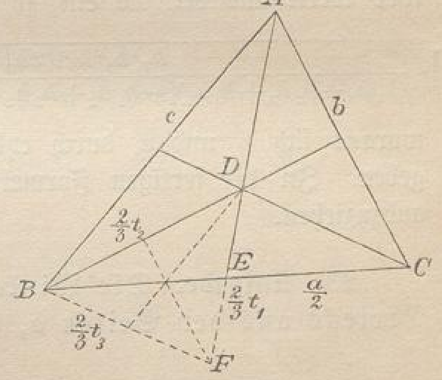
$$\text{d)} \quad a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}, \quad b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_3^2 + 2t_1^2 - t_2^2},$$

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2}.$$

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Mittellinien zu konstruieren.

Die Auflösung mit Hülfe der letzten Formeln ist eine einfache Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Noch einfacher ist die in Teil I Geom. Nr. 123 gegebene Konstruktion. In der betreffenden Figur sind $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$ Mittellinen des Hülfsdreiecks DBF (Fig. 12), dessen Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$ sind, so daß nach 18)

Fig. 12.



$$\frac{a}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\tfrac{2}{3}t_2\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{3}t_3\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}t_1\right)^2}$$

oder

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}.$$

Die formelle Übereinstimmung der Ausdrücke unter Nr. 18 und 19 klärt sich somit einfach geometrisch auf.

Bemerkung. Nun hat $\triangle DBF$ den dritten Teil des Inhalts, wie $\triangle ABC$, folglich ist

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(-\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1 - \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 - \tfrac{2}{3}t_3\right)}$$

oder $\frac{9}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$$= (t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3).$$

21) **Aufgabe.** Die Höhen des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken.

Auflösung. Formel $h_1 = \frac{W}{2a}$ in Nr. 17 geht über in

$$h_1 = \frac{1}{2a}\frac{4}{3}\sqrt{(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)} = \frac{2}{3a}W',$$

also, wenn man auch a durch die Mittellinien ausdrückt:

$$h_1 = \frac{W'}{\sqrt{2t_2^2+2t_3^2-t_1^2}}, \quad h_2 = \frac{W'}{\sqrt{2t_3^2+2t_1^2-t_2^2}},$$

$$h_3 = \frac{W'}{\sqrt{2t_1^2+2t_2^2-t_3^2}},$$

wo

$$W' = \sqrt{(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)}.$$

22) **Aufgabe.** Die Mittellinien des Dreiecks durch die Höhen auszudrücken.

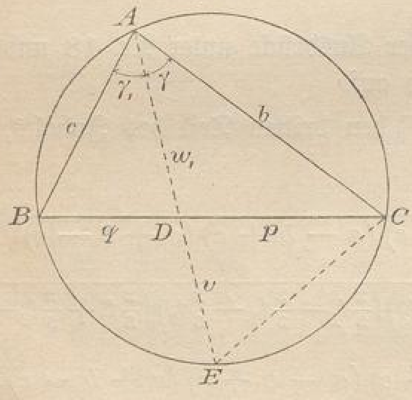
Auflösung. Setzt man in $t_1 = \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ für b, c und a ihre Werte aus Nr. 16 ein, so erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{h_1^2h_2^2h_3^2(2h_3^2h_1^2+2h_1^2h_2^2-h_2^2h_3^2)}{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}},$$

woraus sich t_2 und t_3 durch cyklische Vertauschung des Indices ergeben. In der fertigen Formel ist aus $h_1^2h_2^2h_3^2$ noch die Wurzel auszuziehen.

23) **Aufgabe.** Die Winkelhalbierenden w_1, w_2, w_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Fig. 13.



Auflösung. Nach Teil I Nr. 169 ist in Fig. 13 $p:q = b:c$, also $p = \frac{qb}{c}$ und $a = p + q = \frac{qb}{c} + q = q\frac{b+c}{c}$, also 1) $q = \frac{ac}{b+c}$ und 2) $p = \frac{ab}{c+b}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DCE und DAB folgt $w_1 : q = p : v$, oder $pq = w_1 v = w_1(AE - w_1)$, also 3) $w_1^2 = w_1 \cdot AE - pq$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEC und ABD folgt $AE : b = c : w_1$ oder $AE \cdot w_1 = bc$. Dies in 3) eingesetzt giebt

$$w_1^2 = bc - pq = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$
$$= bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a).$$

Folglich ist

$$w_1 = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{b+c}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a-b+c)}}{b+a},$$
$$w_3 = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Bemerkung. Aus

$$w_1^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \quad \text{folgt} \quad a = (b+c)\sqrt{\frac{bc - w_1^2}{bc}},$$

so daß ein Dreieck aus w_1, b und c konstruiert werden kann, letzteres z. B. mittels der Proportion $\sqrt{bc} : \sqrt{bc - w_1^2} = (b+c) : a$.

Aus derselben Gleichung folgt $bc = \frac{w_1^2}{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$, so daß ein Dreieck auch aus a, w_1 und der Seitensumme $(b+c)$ berechnet und konstruiert werden kann. Aus $b + c = s$ und $bc = k$, wo k der eben berechnete Wert ist, lassen sich b und c bestimmen.

Die Halbierende des Außenwinkels bei A berechnet sich in ähnlicher Weise wie w_1 als

$$w_1' = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{b-c}}.$$

IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben.

24) Aus den früheren Übungen und Bemerkungen ergiebt sich, daß die geforderten Konstruktionen entweder auf *rein geometrischem Wege* oder *mit Hülfe von Berechnungen* ausgeführt werden. Bezeichnet man also das Aufsuchen des zur Lösung führenden Weges als die *Analysis* der Aufgabe, so kann man einerseits von *geometrischer Analysis*, andererseits von *algebraischer Analysis* sprechen. Bei der letzteren handelt es sich nämlich um die Auflösung von Gleichungen niederen Grades, eine Kunst, die man als *Algebra* zu bezeichnen pflegt.