Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93613

Erste Abteilung.

Geometrie

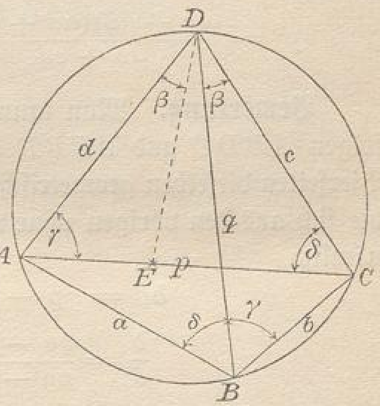
der Geraden und des Kreises.

I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck.

1) **Satz des Ptolemäus.*)** Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Beweis. Die Seiten des Sehnenvierecks $ABCD$ in Fig. 1 seien a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD sollen mit p und q bezeichnet werden. Legt man den Winkel $BDC = \beta$ als ADE an AD an, dann ist $\triangle BCD \sim \triangle AED$ (warum?), also $\frac{AE}{d} = \frac{b}{q}$ und $AE = \frac{bd}{q}$. Außerdem ist $\triangle DEC \sim \triangle DAB$ (warum?), folglich $\frac{EC}{c} = \frac{a}{q}$ und $EC = \frac{ac}{q}$. Folglich ist $AE + EC = p = \frac{ac + bd}{q}$ und $pq = ac + bd$.

Fig. 1.



2) **Folgerungen.** Setzt man das Dreieck ACD umgekehrt auf AC, so daß C und A ihre Stellen vertauschen, so entsteht ein Sehnenviereck $ABCD_1$ mit der Seitenfolge $abdc$. Die Diagonale p

---

*) Der Satz wird an erster Stelle durchgenommen, um gegebenenfalls bei einem Parallelkursus der Trigonometrie sofort Anwendung zu finden.

bleibt, an Stelle von q aber tritt eine neue Diagonale t, und jetzt gilt die Gleichung $pt = ad + bc$. Setzt man in diesem neuen Viereck das Dreieck BCD_1 umgekehrt auf BD_1, so entsteht ein Sehnenviereck ABC_1D_1 mit der Seitenfolge $adbc$ und den Diagonalen t und q, so daß $qt = ab + cd$ wird. Durch Division folgt aus den beiden letzten Gleichungen der Satz

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Auf das ursprüngliche Viereck übertragen lautet er in Worten: Im Sehnenviereck ist der Quotient der Diagonalen gleich dem Quotienten der Summen aus den Produkten je zweier aneinanderstoßenden Seiten. (Die Reihenfolge ist so zu nehmen, daß jeder Diagonale Seitenpaare entsprechen, die mit ihr in denselben Punkten zusammenstoßen.)

[Satz 1) läßt sich auch mit Hülfe der Dreiecksformel*) $F = \frac{abc}{4r}$ beweisen. Nach dieser ist der Inhalt des Sehnenvierecks sowohl $F = \frac{adq}{4r} + \frac{bcq}{4r}$, als auch $F = \frac{abp}{4r} + \frac{cdp}{4r}$, so daß $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ ist, was der obigen Gleichung entspricht.]

Durch Multiplikation und Division erhält man aus den Gleichungen für pq und $\frac{p}{q}$ Formeln zur Berechnung von p und q aus den Seiten, nämlich

$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad q^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Bemerkung. Man kann das Sehnenviereck auch in den Reihenfolgen $ABDC$ und $ACBD$ lesen. Macht man bei diesen gekreuzten Vierseiten dieselben geometrischen Betrachtungen, so findet man Formeln, die sich aus den vorigen ohne weiteres auf arithmetischem Wege ergeben, nämlich

$$bd = qp - ac, \quad ac = pq - bd,$$

$$\frac{b}{d} = \frac{qa - pc}{pa - qc}, \quad \frac{a}{c} = \frac{qb - pd}{pb - qd}.$$

[Aus $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ folgt z. B. $a(pb - qd) = c(qb - pd)$.]

[3) **Aufgabe.** Den Inhalt eines Sehnenvierecks mit den Seiten a, b, c und d zu berechnen.

*) Vergleiche unten Abschnitt 9.

Auflösung. Man denke sich zwei Gegenseiten des Sehnenvierecks, z. B. a und c in Fig. 1, bis zu ihrem Schnittpunkte K verlängert. Mit Hülfe der Gleichung $KB \cdot KA = KC \cdot KD$ läßt sich dann die Ähnlichkeit der Dreiecke KBC und KDA nachweisen. Die Flächen beider Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate von b und d, folglich ist $\triangle KBC = \triangle KDA \cdot \frac{b^2}{d^2}$, also ist Viereck $ABCD = \triangle KDA - \triangle KBC = \triangle KDA\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \triangle KDA \frac{d^2 - b^2}{d^2}$. Setzt man $KA = x$ und $KD = y$, so ist

$$\triangle KDA = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}.$$

Aus $b : d = (x - a) : y$ folgt 1) $dx - by = ad$, aus $b : d = (y - c) : x$ folgt 2) $dy - bx = cd$. Durch Addition folgt aus den Gleichungen 1) und 2) $d(x + y) - b(x + y) = ad + cd$ oder $(x + y)(d - b) = d(a + c)$, durch Subtraktion hingegen $d(x - y) + b(x - y) = ad - cd$ oder $(x - y)(d + b) = d(a - c)$. So ergiebt sich $x + y = \frac{d(a + c)}{d - b}$ und $x - y = \frac{d(a - c)}{d + b}$, also

$$x + y \pm d = \frac{d(a + c)}{d - b} \pm d = \frac{d}{d - b}(a + c \pm d \mp b)$$

und $d \pm (x - y) = d \pm \frac{d(a - c)}{d + b} = \frac{d}{d + b}(d + b \pm a \mp c)$.

Einsetzung in die Gleichung für $\triangle KDA$ giebt

$$\triangle KDA$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{d}{d-b}(a+c+d-b)\frac{d}{d-b}(a+c-d+b)\frac{d}{d+b}(d+b+a-c)\frac{d}{d+b}(d+b-a+c)}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Folglich ist Viereck $ABCD$

$$= \frac{d^2-b^2}{d^2} \cdot \frac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Setzt man $\frac{a+b+c+d}{2} = s$, so ist die vereinfachte Formel:

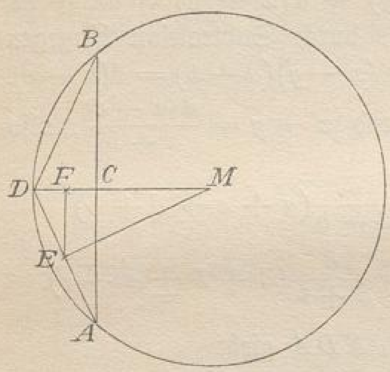
$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Bemerkungen. Ist eine der vier Seiten gleich Null, so handelt es sich um ein Dreieck, dem stets ein Kreis umbeschrieben werden kann. Die Formel geht dann in die Heronische Dreiecksformel über, die demnach als spezieller Fall in der obigen enthalten ist.

Der interessante Satz wird dem indischen Mathematiker Brahmagupta zugeschrieben, der 598 nach Chr. geboren wurde. Das 12. und 18. Kapitel seines Werkes Brâhma-sphuta siddhânta, d. h. das verbesserte System des Brahma, sind der Mathematik gewidmet und enthalten unter anderem die Elemente der Goniometrie nebst Sinustabellen und Regeln für die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten.]

4) **Aufgabe.** Aus dem Radius r eines Kreises und dem Halbmesser ϱ eines einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks den Radius ϱ' des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Fig. 2.



Auflösung. In Fig. 2 sei AB die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, $MC = \varrho$ der Radius des dem letzteren einbeschriebenen Kreises, also D der Halbierungspunkt des Bogens AB, AD die Seite des $2n$-Ecks und $ME = \varrho'$ der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises. Zieht man $EF \parallel AB$, so ist F der Halbierungspunkt von CD, also $MF = \frac{r+\varrho}{2}$. Nach Pythagoras ist aber $ME^2 = MF \cdot MD$, also $\varrho'^2 = \frac{r+\varrho}{2} \cdot r$, folglich $\varrho' = \sqrt{\frac{r(r+\varrho)}{2}}$.

Bemerkung. Ist u der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, so ist der des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks das $\frac{r}{\varrho}$ fache. Berechnet man nun, vom Quadrat oder Sechseck oder Zehneck ausgehend, die ϱ für das entsprechende $2n$-Eck, $4n$-Eck, $8n$-Eck u. s. w., so erhält man die angenäherte Berechnung von π auf bequemere Art, als nach der im ersten Teile benutzten Methode. (Vergl. Nr. 148.) Geht man vom Sechseck aus, so wird nach beiden Berechnungsarten der Reihe nach $\varrho_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varrho_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\varrho_{24} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\varrho_{48} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ u. s. w., so daß bei dem $6 \cdot 2^n$-Eck die Zahl 2 im Ganzen n-mal unter den Wurzeln steht. Dagegen sind die Vieleckssehnen der Reihe nach $s_6 = 1$, $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $s_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $s_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, u. s. w. Die Seiten des umbeschriebenen n-Ecks sind der Reihe nach

$$t_6 = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad t_{12} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}, \quad t_{24} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

$$t_{48} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}, \text{ u. s. w.}$$

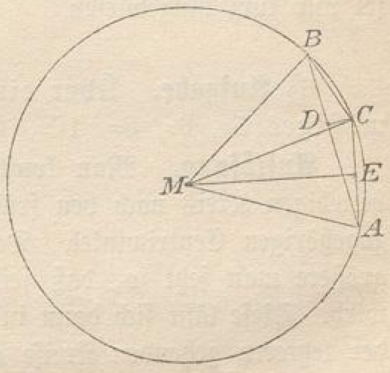
5a) **Aufgabe.** Am regelmäßigen Fünfeck mit Seite a soll bewiesen werden, daß die Diagonale $d = \frac{a}{2}[\sqrt{5}+1]$ ist, daß sie durch eine sie schneidende Diagonale in die Teile a und $b = \frac{a}{2}[\sqrt{5}-1]$, also stetig geteilt wird, daß die Höhe durch die rechtwinklig schneidende Diagonale in die Teile $e = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ und $f = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, also ebenfalls stetig geteilt wird, während sie selbst die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ hat, daß ferner der Um-Kreis den Radius $r = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, der In-Kreis den Radius $\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ hat, so daß die Fläche

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

ist. Am Zehneck lassen sich entsprechende Berechnungen ausführen.

[5b) **Aufgabe.** Die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen Fünfzehnecks zu berechnen.

Fig. 3.



Auflösung. In Figur 3 sei $AB = r$ die Seite des regelmäßigen 6-Ecks, $AC = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ die des regelmäßigen 10-Ecks, also BC die des regelmäßigen 15-Ecks, außerdem sei $ME \perp AC$ und $CD \perp AB$. Dann ist $\triangle BCD \sim \triangle MCE$ (denn $\sphericalangle ABC$

$= \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$), folglich $BD : BC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} : r$, also, wenn $BC = x$ gesetzt wird, $BD = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$. Zugleich ist im Dreieck ABC nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für den spitzen Winkel $AC^2 = x^2 + r^2 - 2r \cdot BD$, also nach Einsetzung des Wertes von BD

$$AC^2 = x^2 + r^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2},$$

oder

$$x^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = AC^2 - r^2.$$

Daraus folgt als Lösung

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4} + AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \frac{AC}{2}\sqrt{3}.$$

Einsetzung des Wertes von AC giebt

$$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \pm \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm (\sqrt{15}-\sqrt{3})\right].$$

Nur das negative Zeichen ist brauchbar, es giebt $x_1 = 0{,}4158236\,r$ als Seite des nach einem Umgange schließenden 15-Ecks. Das positive Zeichen giebt $x_2 = 1{,}48629\,r$, was offenbar zu groß ist, und wozu, wie sich (z. B. goniometrisch) zeigen läßt, der Centriwinkel $96^0 = 60^0 + 36^0$ gehört, so daß jetzt das 15-Eck erst nach viermaligem Umgange schließt.]

Bemerkung. Die Resultate dieses Abschnitts können benutzt werden, die goniometrischen Funktionen der Winkel 12^0, 78^0, 24^0, 56^0, 48^0, 42^0 u. s. w. zu berechnen. — Auf die Möglichkeit, Umfang und Inhalt des regelmäßigen 15-Ecks aus r oder der Seite b zu berechnen und auch die übrig bleibenden Segmentflächen des Kreises zu ermitteln, sei nur kurz hingewiesen.

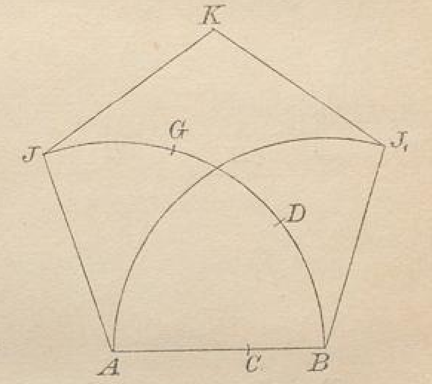
6) **Aufgabe.** Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-Eck u. s. w. zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere die n-Eckseite zunächst für einen beliebigen Kreis nach den früher gelehrten Methoden und zeichne den zugehörigen Centriwinkel. Das erhaltene gleichschenklige Dreieck vergrößere man jetzt so, daß seine Basis gleich der gegebenen Geraden wird. Diese läßt sich dann in dem konzentrischen durch die Endpunkte der letzteren gehenden Kreise n-mal abtragen.

Bemerkungen. In einzelnen Spezialfällen lassen sich kürzere Wege einschlagen. Das regelmäßige Sechseck läßt sich ohne weiteres mit Hülfe des über der Geraden stehenden gleichseitigen Dreiecks zeichnen. Um das regelmäßige Achteck zu erhalten, kann man an die beiden Verlängerungen der Geraden den Winkel 45^0 anlegen. Die Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel schneiden sich dann im Mittelpunkte des gesuchten Achtecks.

Zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks teile man AB nach dem goldnen Schnitt in C, schlage um A mit AB einen Kreis, trage in diesen AC von B aus dreimal als Sehne ein, was D, G und J giebt, wobei $\sphericalangle\, BAJ = 3 \cdot 36^0 = 108^0$ wird, wie es das Fünfeck verlangt. Um B schlage man einen Kreisbogen mit BA, um A einen solchen mit BJ, als Schnitt J_1 erhält man dann einen neuen Fünfeckspunkt. Um J und J_1 sind Bogen mit BA zu schlagen, die den letzten Punkt K geben.

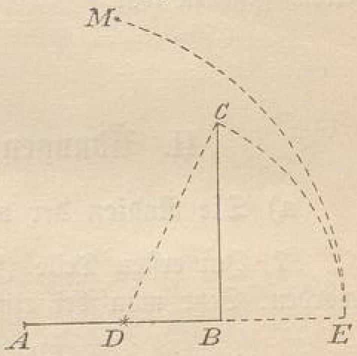
Fig. 4.



Versuche folgende Zehnecks-Konstruktion als richtig nachzuweisen:

Ist AB die gegebene Seite, so mache Lot $BC = AB$, halbiere AB in D, schlage mit DC um D einen Kreisbogen, der auf der Verlängerung von AB den Schnitt E giebt. Um A und B schlage Bogen mit AE, die den Schnitt M geben. M ist Mittelpunkt des gesuchten Zehnecks, welches mit Hülfe des Um-Kreises leicht vollendet wird.

Fig. 5.



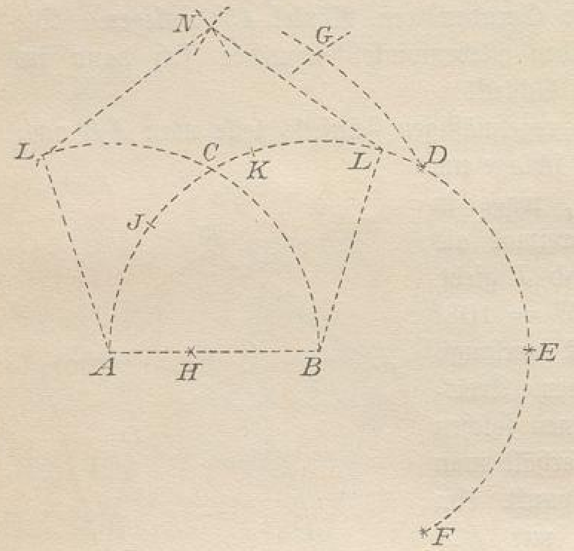
Der Italiener Mascheroni (sprich Maskeroni) hat die Fundamentalkonstruktionen der Planimetrie mit dem Zirkel allein, also ohne Hülfe des Lineals, durchgeführt.

Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks aus zwei Eckpunkten A und B giebt er dabei folgendermaßen:

Schlage um B mit AB einen Kreis (Fig. 6), trage den Radius von A aus 4mal ab, was C, D, E und F giebt. Mit AD schlage Bogen um A und E, die den Schnitt G geben, mit BG

Bogen um D und F, die den Schnitt H geben. Trage von A aus auf dem Kreise 3mal BH ab, was J, K und L giebt, dann ist L ein Punkt des Fünfecks. Bogen um A und B mit AB bezw. AL geben L_1, Bogen um L und L_1 mit AB geben N. Die Punkte $ABLNL_1$ sind die Ecken des gesuchten Fünfecks.

Fig. 6.



Das Zehneck konstruiert man nach ihm folgendermaßen. Wiederhole die vorige Konstruktion bis H und schlage um A und B Bogen mit EH, die den Schnitt M geben. Der Kreis um M mit Radius MA ist der Um-Kreis des leicht zu vollendenden Zehnecks.

Versuche beide Konstruktionen als richtig nachzuweisen.

Der große Geometer Steiner hat versucht, die geometrischen Konstruktionen mit dem Lineal allein auszuführen, also ohne den Zirkel. Bei zahlreichen Konstruktionen ergab sich die Möglichkeit dieser Ausführung nur unter der Bedingung, daß in der Ebene ein fester Kreis gegeben war.

II. Übungen an den Dreieckskreisen.

a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

7) Im ersten Teile (Nr. 120, 149, 182) ist Folgendes gezeigt worden: Setzt man bei einem Dreieck mit den Seiten a, b und c

1. $$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p_1 = \frac{-a+b+c}{2},$$
$$p_2 = \frac{a-b+c}{2}, \quad p_3 = \frac{a+b-c}{2},$$

so bedeuten p_1, p_2 und p_3 die Längen der Tangenten, die von den Eckpunkten aus an die benachbarten Berührungskreise gelegt sind.