Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen bestimmt

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Erste Abteilung. Geometrie der Geraden und des Kreises.

Erste Abteilung.

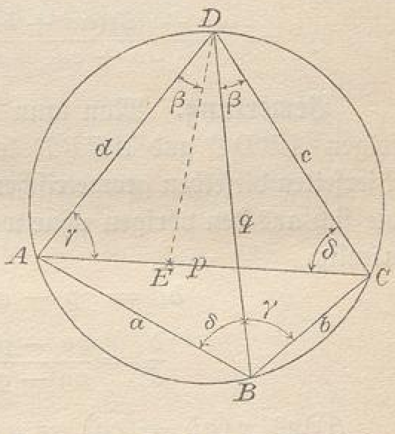
Geometrie
der Geraden und des Kreises.

I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck.

1) **Satz des Ptolemäus.*)** Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Beweis. Die Seiten des Sehnenvierecks $ABCD$ in Fig. 1 seien a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD sollen mit p und q bezeichnet werden. Legt man den Winkel $BDC = \beta$ als ADE an AD an, dann ist $\triangle BCD \sim \triangle AED$ (warum?), also $\frac{AE}{d} = \frac{b}{q}$ und $AE = \frac{bd}{q}$. Außerdem ist $\triangle DEC \sim \triangle DAB$ (warum?), folglich $\frac{EC}{c} = \frac{a}{q}$ und $EC = \frac{ac}{q}$. Folglich ist $AE + EC = p = \frac{ac + bd}{q}$ und $pq = ac + bd$.

Fig. 1.



2) **Folgerungen.** Setzt man das Dreieck ACD umgekehrt auf AC, so daß C und A ihre Stellen vertauschen, so entsteht ein Sehnenviereck $ABCD_1$ mit der Seitenfolge $abdc$. Die Diagonale p

*) Der Satz wird an erster Stelle durchgenommen, um gegebenenfalls bei einem Parallelkursus der Trigonometrie sofort Anwendung zu finden.

bleibt, an Stelle von q aber tritt eine neue Diagonale t, und jetzt gilt die Gleichung $pt = ad + bc$. Setzt man in diesem neuen Viereck das Dreieck BCD_1 umgekehrt auf BD_1, so entsteht ein Sehnenviereck ABC_1D_1 mit der Seitenfolge $adbc$ und den Diagonalen t und q, so daß $qt = ab + cd$ wird. Durch Division folgt aus den beiden letzten Gleichungen der Satz

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Auf das ursprüngliche Viereck übertragen lautet er in Worten: Im Sehnenviereck ist der Quotient der Diagonalen gleich dem Quotienten der Summen aus den Produkten je zweier aneinanderstoßenden Seiten. (Die Reihenfolge ist so zu nehmen, daß jeder Diagonale Seitenpaare entsprechen, die mit ihr in denselben Punkten zusammenstoßen.)

[Satz 1) läßt sich auch mit Hülfe der Dreiecksformel*) $F = \frac{abc}{4r}$ beweisen. Nach dieser ist der Inhalt des Sehnenvierecks sowohl $F = \frac{adq}{4r} + \frac{bcq}{4r}$, als auch $F = \frac{abp}{4r} + \frac{cdp}{4r}$, so daß $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ ist, was der obigen Gleichung entspricht.]

Durch Multiplikation und Division erhält man aus den Gleichungen für pq und $\frac{p}{q}$ Formeln zur Berechnung von p und q aus den Seiten, nämlich

$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad q^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Bemerkung. Man kann das Sehnenviereck auch in den Reihenfolgen $ABDC$ und $ACBD$ lesen. Macht man bei diesen gekreuzten Vierseiten dieselben geometrischen Betrachtungen, so findet man Formeln, die sich aus den vorigen ohne weiteres auf arithmetischem Wege ergeben, nämlich

$$bd = qp - ac, \quad ac = pq - bd,$$

$$\frac{b}{d} = \frac{qa - pc}{pa - qc}, \quad \frac{a}{c} = \frac{qb - pd}{pb - qd}.$$

[Aus $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ folgt z. B. $a(pb - qd) = c(qb - pd)$.]

[3) **Aufgabe.** Den Inhalt eines Sehnenvierecks mit den Seiten a, b, c und d zu berechnen.

*) Vergleiche unten Abschnitt 9.

Auflösung. Man denke sich zwei Gegenseiten des Sehnenvierecks, z. B. a und c in Fig. 1, bis zu ihrem Schnittpunkte K verlängert. Mit Hülfe der Gleichung $KB \cdot KA = KC \cdot KD$ läßt sich dann die Ähnlichkeit der Dreiecke KBC und KDA nachweisen. Die Flächen beider Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate von b und d, folglich ist $\triangle KBC = \triangle KDA \cdot \frac{b^2}{d^2}$, also ist Viereck $ABCD = \triangle KDA - \triangle KBC = \triangle KDA\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \triangle KDA \frac{d^2 - b^2}{d^2}$. Setzt man $KA = x$ und $KD = y$, so ist

$$\triangle KDA = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}.$$

Aus $b : d = (x - a) : y$ folgt 1) $dx - by = ad$, aus $b : d = (y - c) : x$ folgt 2) $dy - bx = cd$. Durch Addition folgt aus den Gleichungen 1) und 2) $d(x + y) - b(x + y) = ad + cd$ oder $(x + y)(d - b) = d(a + c)$, durch Subtraktion hingegen $d(x - y) + b(x - y) = ad - cd$ oder $(x - y)(d + b) = d(a - c)$. So ergiebt sich $x + y = \frac{d(a + c)}{d - b}$ und $x - y = \frac{d(a - c)}{d + b}$, also

$$x + y \pm d = \frac{d(a + c)}{d - b} \pm d = \frac{d}{d - b}(a + c \pm d \mp b)$$

und $d \pm (x - y) = d \pm \frac{d(a - c)}{d + b} = \frac{d}{d + b}(d + b \pm a \mp c)$.

Einsetzung in die Gleichung für $\triangle KDA$ giebt

$$\triangle KDA$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{d}{d-b}(a+c+d-b)\frac{d}{d-b}(a+c-d+b)\frac{d}{d+b}(d+b+a-c)\frac{d}{d+b}(d+b-a+c)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Folglich ist Viereck $ABCD$

$$= \frac{d^2-b^2}{d^2}\cdot\frac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Setzt man $\frac{a + b + c + d}{2} = s$, so ist die vereinfachte Formel:

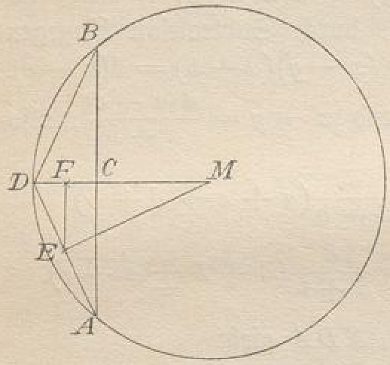
$$F = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Bemerkungen. Ist eine der vier Seiten gleich Null, so handelt es sich um ein Dreieck, dem stets ein Kreis umbeschrieben werden kann. Die Formel geht dann in die Heronische Dreiecksformel über, die demnach als spezieller Fall in der obigen enthalten ist.

Der interessante Satz wird dem indischen Mathematiker Brahmagupta zugeschrieben, der 598 nach Chr. geboren wurde. Das 12. und 18. Kapitel seines Werkes Brâhma-sphuta siddhânta, d. h. das verbesserte System des Brahma, sind der Mathematik gewidmet und enthalten unter anderem die Elemente der Goniometrie nebst Sinustabellen und Regeln für die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten.]

4) **Aufgabe.** Aus dem Radius r eines Kreises und dem Halbmesser ϱ eines einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks den Radius ϱ' des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Fig. 2.



Auflösung. In Fig. 2 sei AB die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, $MC = \varrho$ der Radius des dem letzteren einbeschriebenen Kreises, also D der Halbierungspunkt des Bogens AB, AD die Seite des $2n$-Ecks und $ME = \varrho'$ der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises. Zieht man $EF \parallel AB$, so ist F der Halbierungspunkt von CD, also $MF = \frac{r+\varrho}{2}$. Nach Pythagoras ist aber $ME^2 = MF \cdot MD$, also $\varrho'^2 = \frac{r+\varrho}{2} \cdot r$, folglich $\varrho' = \sqrt{\frac{r(r+\varrho)}{2}}$.

Bemerkung. Ist u der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, so ist der des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks das $\frac{r}{\varrho}$ fache. Berechnet man nun, vom Quadrat oder Sechseck oder Zehneck ausgehend, die ϱ für das entsprechende $2n$-Eck, $4n$-Eck, $8n$-Eck u. s. w., so erhält man die angenäherte Berechnung von π auf bequemere Art, als nach der im ersten Teile benutzten Methode. (Vergl. Nr. 148.) Geht man vom Sechseck aus, so wird nach beiden Berechnungsarten der Reihe nach $\varrho_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varrho_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

$$\varrho_{24} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \quad \varrho_{48} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

u. s. w., so daß bei dem $6 \cdot 2^n$-Eck die Zahl 2 im Ganzen n-mal unter den Wurzeln steht. Dagegen sind die Vielecksſehnen der Reihe nach $s_6 = 1$, $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$, u. ſ. w. Die Seiten des umbeſchriebenen n-Ecks sind der Reihe nach

$$t_6 = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad t_{12} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}, \quad t_{24} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

$$t_{48} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}, \text{ u. ſ. w.}$$

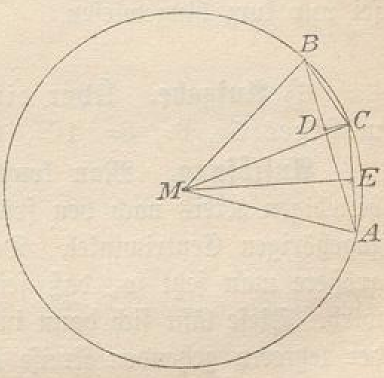
5a) **Aufgabe.** Am regelmäßigen Fünfeck mit Seite a ſoll bewieſen werden, daß die Diagonale $d = \frac{a}{2}[\sqrt{5} + 1]$ iſt, daß ſie durch eine ſie ſchneidende Diagonale in die Teile a und $b = \frac{a}{2}[\sqrt{5} - 1]$, alſo ſtetig geteilt wird, daß die Höhe durch die rechtwinklig ſchneidende Diagonale in die Teile $e = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ und $f = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, alſo ebenfalls ſtetig geteilt wird, während ſie ſelbſt die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ hat, daß ferner der Um-Kreis den Radius $r = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, der In-Kreis den Radius $\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ hat, ſo daß die Fläche

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

iſt. Am Zehneck laſſen ſich entſprechende Berechnungen ausführen.

[5b) **Aufgabe.** Die Seite des dem Kreiſe mit Radius r einbeſchriebenen Fünfzehnecks zu berechnen.

Fig. 3.



Auflöſung. In Figur 3 ſei $AB = r$ die Seite des regelmäßigen 6-Ecks, $AC = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ die des regelmäßigen 10-Ecks, alſo BC die des regelmäßigen 15-Ecks, außerdem ſei $ME \perp AC$ und $CD \perp AB$. Dann iſt $\triangle BCD \sim \triangle MCE$ (denn $\sphericalangle ABC$

$= \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$), folglich $BD : BC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} : r$, also, wenn $BC = x$ gesetzt wird, $BD = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$. Zugleich ist im Dreieck ABC nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für den spitzen Winkel $AC^2 = x^2 + r^2 - 2r \cdot BD$, also nach Einsetzung des Wertes von BD

$$AC^2 = x^2 + r^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2},$$

oder

$$x^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = AC^2 - r^2.$$

Daraus folgt als Lösung

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4} + AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \frac{AC}{2}\sqrt{3}.$$

Einsetzung des Wertes von AC giebt

$$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \pm \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm (\sqrt{15}-\sqrt{3})\right].$$

Nur das negative Zeichen ist brauchbar, es giebt $x_1 = 0{,}4158236\,r$ als Seite des nach einem Umgange schließenden 15-Ecks. Das positive Zeichen giebt $x_2 = 1{,}48629\,r$, was offenbar zu groß ist, und wozu, wie sich (z. B. goniometrisch) zeigen läßt, der Centriwinkel $96^0 = 60^0 + 36^0$ gehört, so daß jetzt das 15-Eck erst nach viermaligem Umgange schließt.]

Bemerkung. Die Resultate dieses Abschnitts können benutzt werden, die goniometrischen Funktionen der Winkel 12^0, 78^0, 24^0, 56^0, 48^0, 42^0 u. s. w. zu berechnen. — Auf die Möglichkeit, Umfang und Inhalt des regelmäßigen 15-Ecks aus r oder der Seite b zu berechnen und auch die übrig bleibenden Segmentflächen des Kreises zu ermitteln, sei nur kurz hingewiesen.

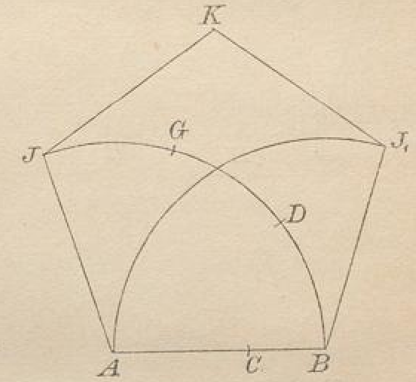
6) **Aufgabe.** Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-Eck u. s. w. zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere die n-Eckseite zunächst für einen beliebigen Kreis nach den früher gelehrten Methoden und zeichne den zugehörigen Centriwinkel. Das erhaltene gleichschenklige Dreieck vergrößere man jetzt so, daß seine Basis gleich der gegebenen Geraden wird. Diese läßt sich dann in dem konzentrischen durch die Endpunkte der letzteren gehenden Kreise n-mal abtragen.

Bemerkungen. In einzelnen Spezialfällen lassen sich kürzere Wege einschlagen. Das regelmäßige Sechseck läßt sich ohne weiteres mit Hülfe des über der Geraden stehenden gleichseitigen Dreiecks zeichnen. Um das regelmäßige Achteck zu erhalten, kann man an die beiden Verlängerungen der Geraden den Winkel 45^0 anlegen. Die Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel schneiden sich dann im Mittelpunkte des gesuchten Achtecks.

Zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks teile man AB nach dem goldnen Schnitt in C, schlage um A mit AB einen Kreis, trage in diesen AC von B aus dreimal als Sehne ein, was D, G und J giebt, wobei $\sphericalangle\, BAJ = 3 \cdot 36^0 = 108^0$ wird, wie es das Fünfeck verlangt. Um B schlage man einen Kreisbogen mit BA, um A einen solchen mit BJ, als Schnitt J_1 erhält man dann einen neuen Fünfeckspunkt. Um J und J_1 sind Bogen mit BA zu schlagen, die den letzten Punkt K geben.

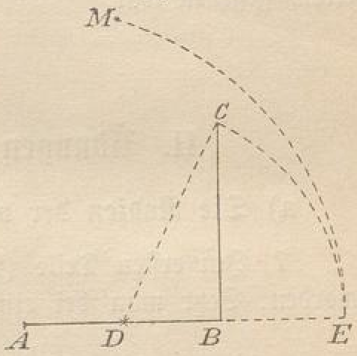
Fig. 4.



Versuche folgende Zehnecks-Konstruktion als richtig nachzuweisen:

Ist AB die gegebene Seite, so mache Lot $BC = AB$, halbiere AB in D, schlage mit DC um D einen Kreisbogen, der auf der Verlängerung von AB den Schnitt E giebt. Um A und B schlage Bogen mit AE, die den Schnitt M geben. M ist Mittelpunkt des gesuchten Zehnecks, welches mit Hülfe des Um-Kreises leicht vollendet wird.

Fig. 5.



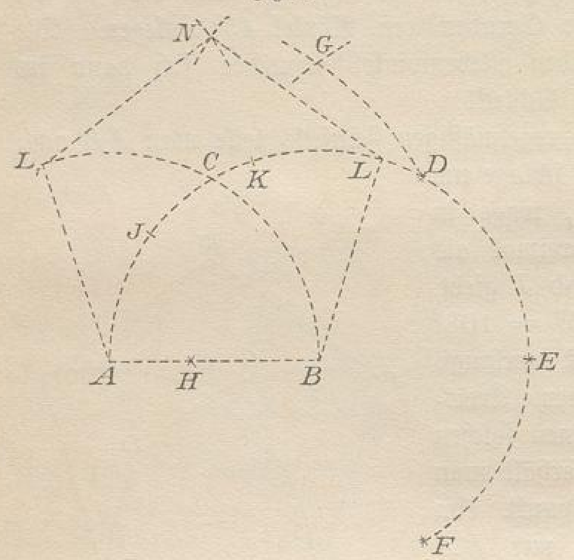
Der Italiener Mascheroni (sprich Maskeroni) hat die Fundamentalkonstruktionen der Planimetrie mit dem Zirkel allein, also ohne Hülfe des Lineals, durchgeführt.

Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks aus zwei Eckpunkten A und B giebt er dabei folgendermaßen:

Schlage um B mit AB einen Kreis (Fig. 6), trage den Radius von A aus 4mal ab, was C, D, E und F giebt. Mit AD schlage Bogen um A und E, die den Schnitt G geben, mit BG

Bogen um D und F, die den Schnitt H geben. Trage von A aus auf dem Kreise 3mal BH ab, was J, K und L giebt, dann ist L ein Punkt des Fünfecks. Bogen um A und B mit AB bezw. AL geben L_1, Bogen um L und L_1 mit AB geben N. Die Punkte $ABLNL_1$ sind die Ecken des gesuchten Fünfecks.

Fig. 6.



Das **Zehneck** konstruiert man nach ihm folgendermaßen. Wiederhole die vorige Konstruktion bis H und schlage um A und B Bogen mit EH, die den Schnitt M geben. Der Kreis um M mit Radius MA ist der Um-Kreis des leicht zu vollendenden Zehnecks.

Versuche beide Konstruktionen als richtig nachzuweisen.

Der große Geometer **Steiner** hat versucht, die geometrischen Konstruktionen mit dem Lineal allein auszuführen, also ohne den Zirkel. Bei zahlreichen Konstruktionen ergab sich die Möglichkeit dieser Ausführung nur unter der Bedingung, daß in der Ebene ein fester Kreis gegeben war.

II. Übungen an den Dreieckskreisen.

a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

7) Im ersten Teile (Nr. 120, 149, 182) ist Folgendes gezeigt worden: Setzt man bei einem Dreieck mit den Seiten a, b und c

$$1. \qquad p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p_1 = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$p_2 = \frac{a-b+c}{2}, \quad p_3 = \frac{a+b-c}{2},$$

so bedeuten p_1, p_2 und p_3 die Längen der Tangenten, die von den Eckpunkten aus an die benachbarten Berührungskreise gelegt sind.

Zugleich ist $p_1 + p_2 + p_3 = p$; die Radien der Berührungskreise berechnen sich aus

$$2.\quad \varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}},\quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}},\quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}},\quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}};$$

dagegen ist der Inhalt des Dreiecks

$$3.\quad F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Aufgabe. Leite daraus durch Rechnung folgende Beziehungen ab:

$$4.\quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}.$$

(Setze für ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die obigen Werte ein, mache die Brüche gleichnamig und forme ihre Summe so um, daß der Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ entsteht.)

$$5.\quad \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = p p_1 p_2 p_3,\quad \text{also auch}\quad F = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}.$$

$$6.\quad \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = p_1p_2 + pp_3 = ab,\quad \varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = p_2p_3 + pp_1 = bc,$$
$$\varrho\varrho_2 + \varrho_3\varrho_1 = p_3p_1 + pp_2 = ca.\text{*)}$$

(Die Formel ist leicht als Rechtecksſatz in Worten auszudrücken. Zu ihrer Ableitung zeige, daß $\varrho\varrho_3 = p_1p_2 = \frac{c-(a-b)}{2}\cdot\frac{c+(a-b)}{2}$ $= \frac{c^2-(a-b)^2}{4}$ ist, bilde ebenso $\varrho_1\varrho_2 = pp_3 = \frac{(a+b)^2-c^2}{4}$, und bilde die Summe, die ab giebt.)

$$7.\quad \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{2}{h_1},\quad \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_2},$$
$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}.$$

(Denn es ist z. B. nach Obigem

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{p_1}{F} + \frac{p_2}{F} = \frac{p_1+p_2}{F} = \frac{c}{F} = \frac{2c}{ch_3} = \frac{2}{h_3}\ \text{u. s. w.)}$$

Die Formel läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$7.^*\quad h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1-\varrho} = \frac{2\varrho_2\varrho_3}{\varrho_2+\varrho_3},\qquad h_2 = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho_2-\varrho} = \frac{2\varrho_3\varrho_1}{\varrho_3+\varrho_1},$$
$$h_3 = \frac{2\varrho\varrho_3}{\varrho_3-\varrho} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}.$$

---

*) Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices 1, 2 und 3. Die zweite Formel folgt so aus der ersten, daß 2 statt 1, 3 statt 2, 1 statt 3 geschrieben wird. Ebenso folgt die dritte aus der zweiten. Man erspart dadurch alle Rechnungswiederholungen.

$$8.\quad a = F\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right),\quad b = F\left(\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_1}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right),$$
$$c = F\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_3}\right).$$

(In der vorigen Beweisführung kam die Gleichung $\frac{p_1+p_2}{F} = \frac{c}{F}$ vor, also ist $\frac{c}{F} = \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ u. s. w.) Setzt man in 8. für F seinen Wert $\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$ ein, so wird $a = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}\,\frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_2\varrho_3} = (\varrho_2+\varrho_3)\sqrt{\frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_2\varrho_3}}$. Ebenso folgt $a = (\varrho_1-\varrho)\sqrt{\frac{\varrho_2\varrho_3}{\varrho\varrho_1}}$. Aus beiden Gleichungen erhält man durch Multiplikation eine einfachere. Das neue System von Gleichungen ist:

$$9.\quad a^2 = (\varrho_1-\varrho)(\varrho_2+\varrho_3),\quad b^2 = (\varrho_2-\varrho)(\varrho_3+\varrho_1),$$
$$c^2 = (\varrho_3-\varrho)(\varrho_1+\varrho_2).$$

Das Quadrat über jeder Dreiecksseite ist also gleich dem Rechteck aus der Differenz und der Summe je zweier der Radien, die Dreiecksseite selbst ist die mittlere Proportionale zur genannten Summe und Differenz.

Solcher Beziehungen lassen sich noch beliebig viele aufstellen, die zum Teil von weiter gehendem Interesse sind. So kann man z. B. in der Gruppe 2. die p und ϱ einfach vertauschen, also $p = \sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho}}$ u. s. w.

8) **Konstruktive Bemerkungen.**

α) Aus Formel 4. erkennt man, daß jeder der vier Radien bestimmt ist, wenn die drei anderen gegeben sind. Um z. B. ϱ aus den übrigen Radien zu konstruieren, kann man mehrere Wege einschlagen.

Aus 4. folgt $\varrho = \frac{\varrho_1(\varrho_2\varrho_3)}{(\varrho_1\varrho_2)+(\varrho_2\varrho_3)+(\varrho_3\varrho_1)}$, wo die Klammern Rechtecke sind, die man in Quadrate verwandeln kann. Die des Nenners lassen sich nach Pythagoras addieren, so daß man hat $\varrho = \frac{\varrho_1 m^2}{n^2} = \left(\frac{\varrho_1 m}{n}\right)\frac{m}{n} = \frac{xm}{n}$. Hier bestimmt sich x aus der Proportion $n : m = \varrho_1 : x$, darauf ϱ aus der Proportion $n : x = m : \varrho$ als vierte Proportionale.

Einfacher und übersichtlicher ist folgender Weg: Man nehme, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gegeben sind, eine beliebige Länge als Einheit an, am bequemsten einen der Radien, z. B. $\varrho_3 = 1$, so daß auch $\frac{1}{\varrho_3} = 1$

ist. Dann findet man $x = \frac{1}{\varrho_1}$ mit Hülfe der Proportion $\varrho_1 : 1 = 1 : x$, $y = \frac{1}{\varrho_2}$ aus $\varrho_2 : 1 = 1 : y$. Jetzt ist $\frac{1}{\varrho}$ durch die Summe $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$ bestimmt, und ϱ ergiebt sich aus $\varrho : 1 = 1 : \frac{1}{\varrho}$. Durch die dem letzteren entsprechende Konstruktion ist der Einfluß der willkürlich gewählten Einheit wieder aufgehoben.

Man kann jetzt annehmen, daß, wenn drei der Radien gegeben sind, der vierte mit gegeben ist.

β) Aus 9. ergiebt sich, wie man das Dreieck konstruiert, wenn drei der Radien gegeben sind. Man hat nach der Konstruktion des vierten nur drei mittlere Proportionalen zu gewissen Summen und Differenzen zu konstruieren, um die Seiten zu erhalten.

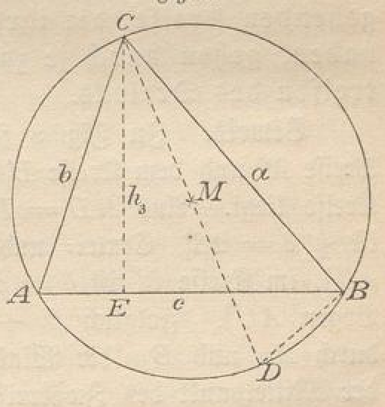
γ) Demnach lassen sich z. B. Dreiecke konstruieren aus $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$; $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; ϱ, ϱ_1, F; ϱ_1, ϱ_2, F; a, ϱ, ϱ_1; a, ϱ, ϱ_2; a, ϱ_1, ϱ_2; a, ϱ_2, ϱ_3; h_1, ϱ, ϱ_2; h_1, ϱ, ϱ_3; $h_1, \varrho_1, \varrho_2$; $h_1, \varrho_1, \varrho_3$.

δ) Dagegen läßt sich kein Dreieck konstruieren aus h_1, ϱ, ϱ_1; $h_1, \varrho_2, \varrho_3$; h_2, ϱ, ϱ_2; $h_2, \varrho_3, \varrho_1$; h_3, ϱ, ϱ_3; $h_3, \varrho_1, \varrho_2$; denn diese Größen sind nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichungen 7. mit einander verbunden. Ist z. B. ϱ und ϱ_1 gegeben, so darf h_1 nicht gegeben werden, sondern man hat es aus $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$ zu berechnen, oder mittels $(\varrho_1 - \varrho) : 2\varrho = \varrho_1 : h_1$ als vierte Proportionale zu konstruieren.

b) Der Radius des Um-Kreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks.

9) **Aufgabe.** Den Radius r aus den Seiten a, b und c zu berechnen.

Fig. 7.



Auflösung. In Fig. 7 sei CD ein Durchmesser $2r$ und CE die Höhe h_3. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEC und DBC folgt $a : 2r = h_3 : b$, also ist

$$r = \frac{ab}{2h_3} = \frac{abc}{2h_3 c} = \frac{abc}{4F}.$$

Daraus ergiebt sich

$$10. \quad r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{pp_1p_2p_3}} = \frac{abc}{4\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}} = \frac{abc}{4p\varrho} = \frac{abc}{4p_1\varrho_1} \text{ u. s. w.}$$

10) **Aufgabe.** Den Radius r aus den Radien der Berührungskreise zu berechnen.

Auflösung.

Oben war unter 7. $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}$, folglich $\varrho_3 - \varrho = \frac{2\varrho\varrho_3}{h_3} = \frac{2p_1p_2}{h_3}$;

" " " $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_3}$, " $\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{h_3} = \frac{2pp_3}{h_3}$.

Durch Addition folgt aus den Gleichungen (mit Hülfe des Systems 6)

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = \frac{2}{h_3}(p_1p_2 + pp_3) = \frac{2ab}{h_3} = \frac{2abc}{h_3 c} = \frac{abc}{F} = 4r.$$

$$11.\quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

(Faßt man den Radius ϱ als negative Größe auf, so ist r das arithmetische Mittel aus den vier anderen Radien.) Sind von den 5 Radien 3 bekannt, so lassen sich die beiden anderen konstruieren und berechnen. In jeder der früheren Aufgaben läßt sich demnach eins der ϱ durch r ersetzen. Aus 11. und 9. ergeben sich z. B. Formeln, die mit den Formeln 7. zusammen zur Konstruktion des Dreiecks aus r und den Radien zweier Berührungskreise dienen:

$$12.\quad \begin{cases} a^2 = (\varrho_1 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_1) = (\varrho_2 + \varrho_3)(4r - \varrho_2 - \varrho_3) \\ b^2 = (\varrho_2 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_2) = (\varrho_3 + \varrho_1)(4r - \varrho_3 - \varrho_1) \\ c^2 = (\varrho_3 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_3) = (\varrho_1 + \varrho_2)(4r - \varrho_1 - \varrho_2). \end{cases}$$

Einige der Konstruktionen vereinfachen sich noch durch den folgenden Satz:

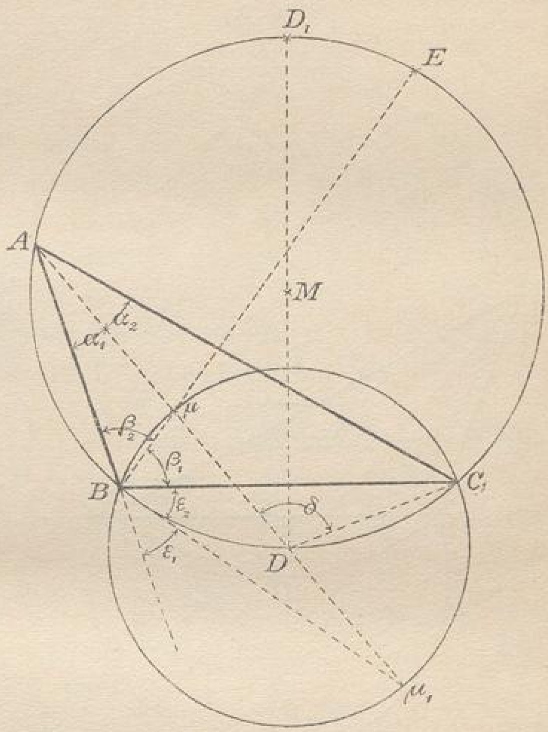
11) **Satz.** Die beiden durch zwei Ecken eines Dreiecks gehenden Kreise, die ihre Mittelpunkte auf dem Um-Kreise haben, gehen durch je zwei Mittelpunkte von Berührungskreisen des Dreiecks.

Beweis. In Fig. 8 sei ABC das Dreieck mit seinem Um-Kreise M und dem Kreise D durch B und C, wobei D auf dem Um-Kreise liegt. Aus $BD = DC$ folgt $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2$. Im Kreise D ist $\sphericalangle \delta = 2\beta_1$ (Centri- und Peripheriewinkel auf demselben Bogen μC), im Kreise M ist $\delta = \beta_1 + \beta_2$ (Peripheriewinkel auf demselben Bogen AC). Folglich $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_1$, also $\beta_1 = \beta_2$. Da aber durch $A\mu$ und $B\mu$ die Winkel bei A und B halbiert sind, so ist μ der Mittelpunkt des In-Kreises.

Aus $\sphericalangle\ \mu B \mu_1 = 90^0$ folgt, daß auch der Außenwinkel bei B halbiert, μ_1 also Mittelpunkt des Berührungskreises mit Radius ϱ_1 ist.

Entsprechend wird der Beweis für den Kreis geführt, der um den Gegenpunkt D_1 durch B und C geschlagen wird, nur treten dabei mehrfach Supplementwinkel statt gleicher Winkel auf. Der neue Kreis wird durch AD_1 in μ_2 und μ_3 geschnitten, wobei die Gerade $\mu_2\mu_3$ als Durchmesser in D_1 halbiert ist.

Fig. 8.



[Ist E der Halbierungspunkt des Bogens AC, so geht der um E durch A und C geschlagene Kreis durch μ und μ_2, so daß der Durchmesser $\mu\mu_2$ (die Verlängerung von $B\mu$) in E halbiert ist.

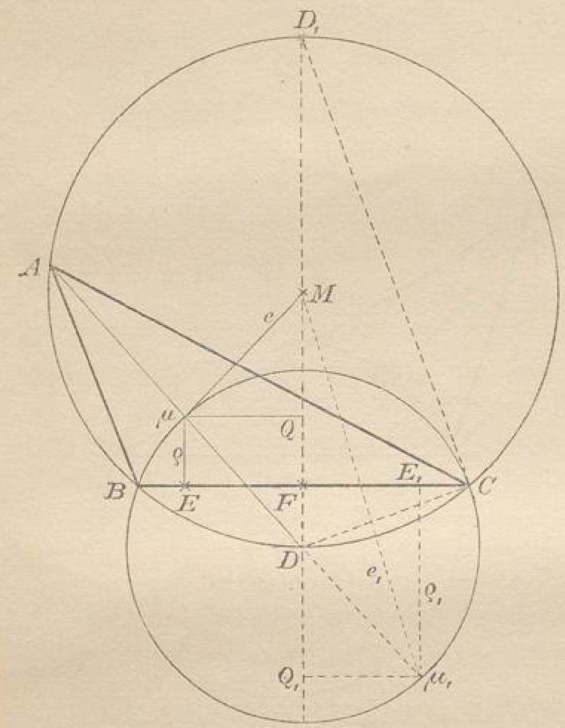
Das Dreieck ABC ist dann das Höhenfußpunktdreieck von $\mu_1\mu_2\mu_3$ (zugleich auch von $\mu\mu_1\mu_2$, $\mu\mu_1\mu_3$ und $\mu\mu_2\mu_3$), und die fertige Zeichnung giebt den Satz: Der Kreis durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks halbiert die Dreiecksseiten und die oberen Abschnitte der Höhen. Er wird der Kreis der neun Punkte oder nach seinem hervorragendsten Bearbeiter der Feuerbachsche Kreis genannt.]

Alle Peripheriewinkel über BC im Kreise M geben Dreiecke, bei denen die Mittelpunkte der Berührungskreise auf den Kreisen D und D_1 liegen; dasselbe gilt auch von den Peripheriewinkeln unter BC. Wandert also A von B über D_1 nach C, so wandert μ auf derselben Seite der Geraden BC auf dem Kreise D von B nach C; wandert A von C über D nach B, so wandert μ auf derselben Seite der Geraden BC auf dem Kreise D_1 von C nach B.

12) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus r, a und ϱ zu konstruieren.

Auflösung. a) Trage in den mit Radius r geschlagenen Kreis die Sehne a als BC ein, halbiere den kleineren Bogen BC in D, schlage um D durch B (und C) den jenseits BC liegenden Kreisbogen BC, ziehe dort eine Parallele zu BC im Abstande ϱ. Schneidet diese den Bogen des Kreises D in μ, so giebt $D\mu$ verlängert den Schnittpunkt A auf dem gegebenen Kreise, und ABC ist das gesuchte Dreieck. (Vgl. Fig. 8.)

Fig. 9.



b) Statt den kleineren Bogen in D zu halbieren, kann man auch den größeren Bogen in D_1 halbieren und die Konstruktion auf der anderen Seite der Geraden BC durchführen. Der Winkel bei A wird jetzt das Supplement des vorigen.

Bemerkung. Ebenso geschieht die Konstruktion eines Dreiecks aus r, a und ϱ_1, nur wird dabei jedesmal auf zwei verschiedenen Seiten von BC gearbeitet.

13) **Aufgabe.** Wie weit ist der Mittelpunkt des Um-Kreises von denen der Berührungskreise entfernt?

Auflösung. In Figur 9 ist

$$e^2 = \overline{M\mu}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{\mu Q}^2 = (MD - QD)^2 + (\mu D^2 - QD^2)$$
$$= MD^2 - 2MD \cdot QD + \mu D^2 = MD^2 - 2MD \cdot QD + DC^2$$
$$= MD^2 - 2MD \cdot QD + DF \cdot DD_1,$$

oder $e^2 = r^2 - 2r \cdot QD + 2r \cdot DF = r^2 - 2r(QD - DF)$
$= r^2 - 2r \cdot QF = r^2 - 2r \cdot \mu E,$ d. h. $e^2 = r^2 - 2r\varrho$.

Bemerkung. Setzt man $M\mu_1 = e_1$, so beweist man ebenso, daß $e_1{}^2 = r^2 + 2r\varrho_1$ ist.

Im Ganzen bestehen also für die Entfernungen von M nach μ, μ_1, μ_2 und μ_3 folgende Beziehungen:

13ª. $e^2 = r^2 - 2r\varrho, \quad e_1{}^2 = r^2 + 2r\varrho_1, \quad e_2{}^2 = r^2 + 2r\varrho_2,$
$e_3{}^2 = r^2 + 2r\varrho_3;$

oder

13[b]. $e = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$, $e_1 = \sqrt{r(r + 2\varrho_1)}$, $e_2 = \sqrt{r(r + 2\varrho_2)}$,

$$e_3 = \sqrt{r(r + 2\varrho_3)},$$

oder

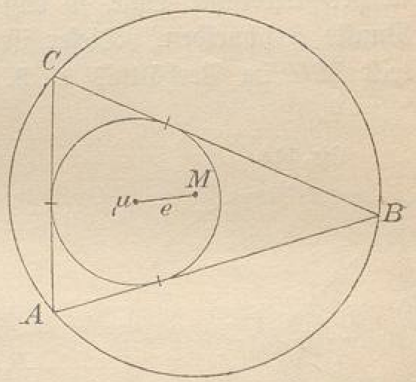
13[c]. $$e^2 = (r + \varrho)^2 - \varrho^2, \quad e_1^2 = (r + \varrho_1)^2 - \varrho_1^2,$$
$$e_2^2 = (r + \varrho_2)^2 - \varrho_2^2, \quad e_3^2 = (r + \varrho_3)^2 - \varrho_3^2.$$

Nach den Formeln 13[b] werden die gesuchten Entfernungen als mittlere Proportionalen zwischen den beiden Faktoren unter den Wurzeln konstruiert, nach den Formeln 13[c] geschieht die Konstruktion nach Pythagoras. Die Dreieckskonstruktionen geschehen von jetzt ab so, daß man um die Endpunkte der so gefundenen Geraden e bezw. e_1, e_2, e_3 Kreise mit den betreffenden Radien schlägt.

Damit sind folgende Konstruktionen ermöglicht: Ein Dreieck zu konstruieren aus: r, ϱ, a; r, ϱ_1, a; r, ϱ_2, a; r, ϱ, α; r, ϱ_1, α; r, ϱ_2, α; a, α, ϱ; a, α, ϱ_1; a, α, ϱ_2; auch können rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke mit je zwei solchen Radien verlangt werden. (Die Tangente von M aus führt auf den rechten Winkel, die Linie $M\mu$ auf symmetrische Dreiecke.)

14) **Bemerkung.** Ist $e = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$ konstruiert, und hat man um die Endpunkte von e Kreise mit r und ϱ geschlagen, so sind unendlich viele Dreiecke möglich, denn das dritte Stück ist noch nicht gegeben.

Fig. 10.



Legt man also von einem beliebigen Punkte A des Kreises M aus an den Kreis μ eine Tangente, die bis zum Schnittpunkte B mit dem Kreise M zu verlängern ist, zieht man ebenso von B aus eine zweite Tangente BC und ebenso von C aus eine dritte Tangente, so trifft diese nach A. Mit anderen Worten: Führt die Konstruktion von drei solchen Tangenten nach dem Ausgangspunkte A in einem Falle zurück, so schließt die Reihe der Tangenten stets, wo man auch beginne*). Daraus ergeben sich neue Konstruktionen

*) Dies ist eins der berühmten Poncelet-Steinerschen Schließungsprobleme, welches durch Projektion auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Für höhere Teile der Mathematik ist es sehr wichtig geworden.

für das Dreieck aus r, ϱ, α; r, ϱ, a u. s. w. Die entsprechenden Bemerkungen für r und ϱ_1 bieten keine Schwierigkeit.

15) **Bemerkung.** Die Pfeilhöhe $FD = d_1$ des Bogens BC in Fig. 9 ist, da $\mu\mu_1$ in D halbiert und daher $DQ = \frac{\varrho_1 + \varrho}{2}$ ist, $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$. Man hat also nach Formel 11 die Gleichungen

$$d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_2 + \varrho_3)}{2}, \quad d_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_3 + \varrho_1)}{2},$$
$$d_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_1 + \varrho_2)}{2}.$$

Soll demnach ein Dreieck aus r, ϱ und ϱ_1 konstruiert werden, so bilde man $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$ und lege in den Kreis mit Radius r die entsprechende Sehne a. In der Entfernung $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$ ziehe man jenseits d_1 eine Parallele zu a, die den gesuchten Punkt C bestimmt. Damit ist gezeigt, wie man aus r und den Radien zweier beliebigen Berührungskreise das Dreieck konstruieren kann.

15b) Bemerkungen zum Feuerbachschen Kreise.

In Fig. 10a ist H der Schnittpunkt der Höhen, M der Mittelpunkt des Um-Kreises. Die Dreiecke AHC und A_1MC_1 sind ähnlich in perspektivischer Lage, so daß AA_1, CC_1 und HM sich in einem Punkte S schneiden. Dieser ist der Schwerpunkt des Dreiecks und teilt MH im Verhältnis 1 : 2. (Warum?)

Fig. 10a.

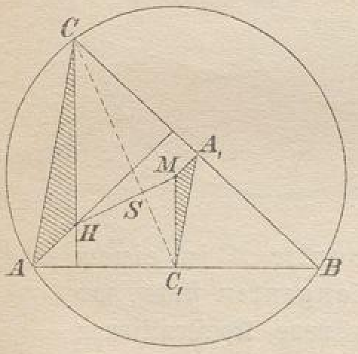
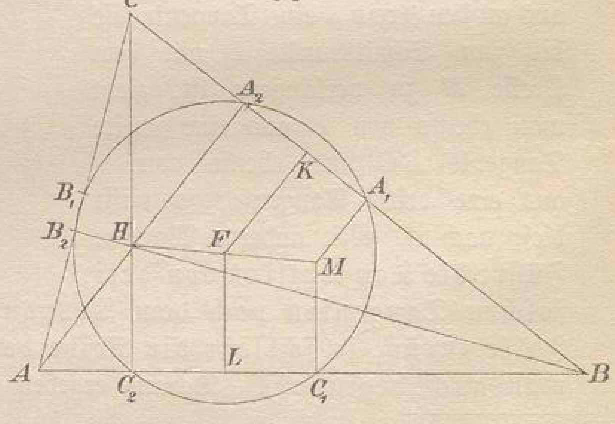


Fig. 10b.



In Fig. 10b gehen die Mittelsenkrechten von A_1A_2 und C_1C_2 durch den Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises, so daß HM

halbiert wird. Demnach sind die Punkte H, F, S, M harmonische Punkte. Die Gerade HM heißt die Eulersche Gerade.

Der Radius des Um-Kreises ist doppelt so groß, wie der des Feuerbachschen Kreises. S und H sind Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

(**Aufgaben:** $\triangle$ aus $HM = e$, r und a, aus $HM = e$, r und MA_1 u. s. w.)

III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks.*)

16) **Aufgabe.** Die Seiten x, y, z eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2, h_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus $F = \frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $y = \frac{xh_1}{h_2}$, ebenso ist $z = \frac{xh_1}{h_3}$. (Die dritte Gleichung $y = \frac{zh_3}{h_2}$ würde nichts neues geben.) Man setze die Werte von y und z in die Gleichung

$$F = \frac{xh_1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$$

ein, wobei z. B. $x + y + z = x + \frac{xh_1}{h_2} + \frac{xh_1}{h_3} = x\frac{h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1}{h_2h_3}$ wird. Diese geht dann über in

$$\frac{xh_1}{2} =$$

$$\frac{x^2}{4h_2{}^2h_3{}^2}\sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

Nach beiderseitiger Division durch x folgt, wenn man a, b, c für x, y, z setzt:

$$a = \frac{2h_1h_2{}^2h_3{}^2}{N}, \quad b = \frac{2h_2h_3{}^2h_1{}^2}{N}, \quad c = \frac{2h_3h_1{}^2h_2{}^2}{N},$$

wo

$$N =$$

$$\sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

17) **Aufgabe.** Die Seiten eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2 und h_3 zu konstruieren.

Auflösung. Aus $\frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $x : y = h_2 : h_1$ und $x : z = h_3 : h_1$. Demnach ist das Verhältnis der Dreiecksseiten bekannt

*) Dieser Abschnitt hat nur Bedeutung für gelegentliche Übungen im Berechnen. Zu den folgenden Kapiteln steht er nicht in Beziehung.

$\left(x:y:z = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}\right)$. Man konstruiere ein Dreieck mit beliebiger Seite x' und den Seiten y' und z', die dieser Proportion entsprechen. Ist dann h_1' die Höhe dieses Dreiecks auf x', so ist $x = x'\frac{h_1}{h_1'}$ als Seite des gesuchten Dreiecks leicht zu konstruieren.

Diese Konstruktion ist weit bequemer, als die mit Hülfe der oben berechneten Ausdrücke durchzuführende.

Bemerkung. Die umgekehrte Aufgabe, die Höhen aus den Seiten zu berechnen, ist schon in Teil I. gelöst worden. Sie führte auf

$$h_1 = \frac{2F}{a} = \frac{2}{a}\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

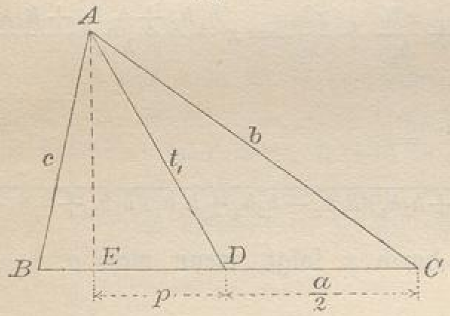
so daß man hat:

$$h_1 = \frac{W}{2a}, \quad h_2 = \frac{W}{2b}, \quad h_3 = \frac{W}{2c},$$

wo $W = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

18) **Aufgabe.** Die Mittellinien t_1, t_2, t_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Fig. 11.



Auflösung. In Fig. 11 ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für das allgemeine Dreieck

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 + 2\frac{a}{2}p$$

und

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 - 2\frac{a}{2}p,$$

also durch Addition

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t_1^2,$$

so daß man hat

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

19) **Aufgabe.** Die Seiten x, y und z eines Dreiecks aus den Mittellinien t_1, t_2, t_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus den letzten Formeln folgt

$$\text{a)}\ 2y^2 + 2z^2 - x^2 = 4t_1^2, \quad \text{b)}\ 2z^2 + 2x^2 - y^2 = 4t_2^2,$$

$$\text{c)}\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 4t_3^2.$$

Durch Subtraktion erhält man daraus

$$x^2 - z^2 = \tfrac{4}{3}(t_3^2 - t_1^2), \quad y^2 - x^2 = \tfrac{4}{3}(t_1^2 - t_2^2).$$

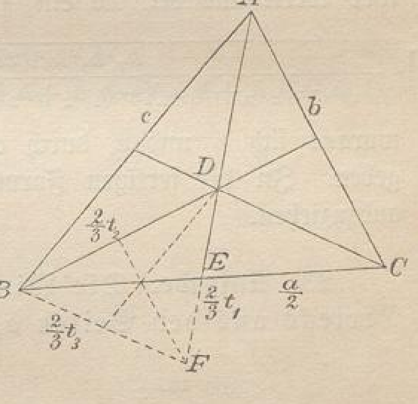
Berechnet man z^2 aus der ersten und y^2 aus der zweiten Gleichung, und setzt man ihre Werte in c) ein, so folgt, wenn man a, b, c statt x, y, z setzt:

d) $$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}, \quad b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_3^2 + 2t_1^2 - t_2^2},$$
$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2}.$$

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Mittellinien zu konstruieren.

Die Auflösung mit Hülfe der letzten Formeln ist eine einfache Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Noch einfacher ist die in Teil I Geom. Nr. 123 gegebene Konstruktion. In der betreffenden Figur sind $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$ Mittellinen des Hülfsdreiecks DBF (Fig. 12), dessen Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$ sind, so daß nach 18)

Fig. 12.



$$\frac{a}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\tfrac{2}{3}t_2\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{3}t_3\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}t_1\right)^2}$$

oder

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}.$$

Die formelle Übereinstimmung der Ausdrücke unter Nr. 18 und 19 klärt sich somit einfach geometrisch auf.

Bemerkung. Nun hat $\triangle DBF$ den dritten Teil des Inhalts, wie $\triangle ABC$, folglich ist

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(-\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1 - \tfrac{2}{3}t_2 + \tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{2}{3}t_2 - \tfrac{2}{3}t_3\right)}$$

oder $$\tfrac{9}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$= (t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3).$$

21) **Aufgabe.** Die Höhen des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken.

Auflösung. Formel $h_1 = \frac{W}{2a}$ in Nr. 17 geht über in

$$h_1 = \frac{1}{2a}\frac{4}{3}\sqrt{(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)} = \frac{2}{3a}W',$$

also, wenn man auch a durch die Mittellinien ausdrückt:

$$h_1 = \frac{W'}{\sqrt{2t_2{}^2 + 2t_3{}^2 - t_1{}^2}},\quad h_2 = \frac{W'}{\sqrt{2t_3{}^2 + 2t_1{}^2 - t_2{}^2}},$$

$$h_3 = \frac{W'}{\sqrt{2t_1{}^2 + 2t_2{}^2 - t_3{}^2}},$$

wo

$$W' = \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3)}.$$

22) **Aufgabe.** Die Mittellinien des Dreiecks durch die Höhen auszudrücken.

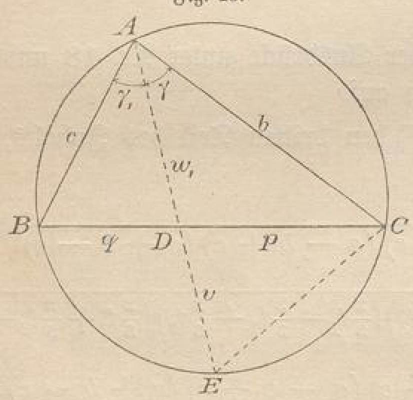
Auflösung. Setzt man in $t_1 = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ für b, c und a ihre Werte aus Nr. 16 ein, so erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{h_1{}^2h_2{}^2h_3{}^2(2h_3{}^2h_1{}^2 + 2h_1{}^2h_2{}^2 - h_2{}^2h_3{}^2)}{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_3+h_2h_3-h_3h_1)}},$$

woraus sich t_2 und t_3 durch cyklische Vertauschung des Indices ergeben. In der fertigen Formel ist aus $h_1{}^2h_2{}^2h_3{}^2$ noch die Wurzel auszuziehen.

23) **Aufgabe.** Die Winkelhalbierenden w_1, w_2, w_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Fig. 13.



Auflösung. Nach Teil I Nr. 169 ist in Fig. 13 $p : q = b : c$, also $p = \frac{qb}{c}$ und $a = p + q = \frac{qb}{c} + q = q\frac{b+c}{c}$, also 1) $q = \frac{ac}{b+c}$ und 2) $p = \frac{ab}{c+b}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DCE und DAB folgt $w_1 : q = p : v$, oder $pq = w_1 v = w_1(AE - w_1)$, also 3) $w_1{}^2 = w_1 \cdot AE - pq$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEC und ABD folgt $AE : b = c : w_1$ oder $AE \cdot w_1 = bc$. Dies in 3) eingesetzt giebt

$$w_1^2 = bc - pq = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

$$= bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a).$$

Folglich ist

$$w_1 = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{b+c}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a-b+c)}}{b+a},$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Bemerkung. Aus

$$w_1^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \quad \text{folgt} \quad a = (b+c)\sqrt{\frac{bc - w_1^2}{bc}},$$

so daß ein Dreieck aus w_1, b und c konstruiert werden kann, letzteres z. B. mittels der Proportion $\sqrt{bc} : \sqrt{bc - w_1^2} = (b+c) : a$.

Aus derselben Gleichung folgt $bc = \dfrac{w_1^2}{1 - \left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2}$, so daß ein Dreieck auch aus a, w_1 und der Seitensumme $(b+c)$ berechnet und konstruiert werden kann. Aus $b + c = s$ und $bc = k$, wo k der eben berechnete Wert ist, lassen sich b und c bestimmen.

Die Halbierende des Außenwinkels bei A berechnet sich in ähnlicher Weise wie w_1 als

$$w_1' = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{b-c}}.$$

IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben.

24) Aus den früheren Übungen und Bemerkungen ergiebt sich, daß die geforderten Konstruktionen entweder auf rein geometrischem Wege oder mit Hülfe von Berechnungen ausgeführt werden. Bezeichnet man also das Aufsuchen des zur Lösung führenden Weges als die Analysis der Aufgabe, so kann man einerseits von geometrischer Analysis, andererseits von algebraischer Analysis sprechen. Bei der letzteren handelt es sich nämlich um die Auflösung von Gleichungen niederen Grades, eine Kunst, die man als Algebra zu bezeichnen pflegt.

25) Die geometrische Analysis sucht entweder Sätze auf aus denen sich die Lösung ohne weiteres ergiebt, oder sie wendet gewisse Methoden an, mit deren Hülfe die Konstruktion ermöglicht wird.

Im ersteren Falle handelt es sich nur selten um eine planmäßige Untersuchung, die mit zwingender Notwendigkeit zum Ziele führt, sondern in der Regel darum, aus der großen Menge der vorher bearbeiteten Sätze mit geschicktem Griffe diejenigen herauszufinden, die sich im gegebenen Falle als brauchbare Werkzeuge bewähren. Auf den weniger Geübten machen daher solche Lösungen häufig den Eindruck, als habe es sich mehr um einen Kunstgriff oder ein geistreiches Kombinieren gehandelt, als um das Ergebnis einer planmäßigen Überlegung.

Man erkennt z. B. leicht, daß die Aufgabe: „einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt", mit Hülfe des Satzes gelöst wird, „daß das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte ist". Dagegen staunt man bisweilen die von Geometern wie Steiner gegebenen Lösungen als Leistungen eines außergewöhnlichen Scharfsinnes an. Ein Beispiel dieser Art sei angegeben:

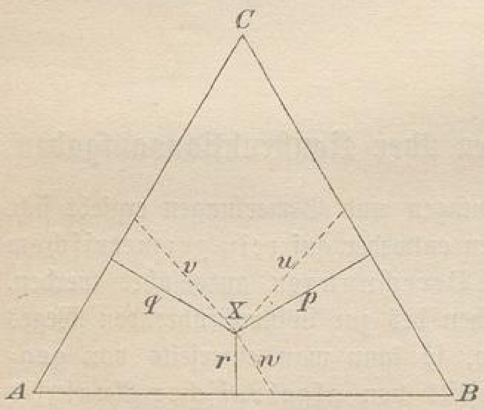
26) **Aufgabe.** In einem gegebenen Dreieck den Punkt aufzufinden, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Wert hat.

Analysis. Im gleichseitigen Dreieck ist die Summe der von einem beliebigen Punkte aus auf die drei Seiten gefällten Lote stets gleich der Höhe, also $p + q + r = h$, was rein geometrisch abgeleitet werden kann, aber auch aus der Inhaltsformel

$$F = h\frac{a}{2} = (p + q + r)\frac{a}{2}$$

folgt. Zieht man dagegen von dem Punkte X aus beliebig gerichtete Gerade nach den drei Seiten, so ist ihre Summe $u + v + w > p + q + r$, also auch größer als h.

Fig. 14.

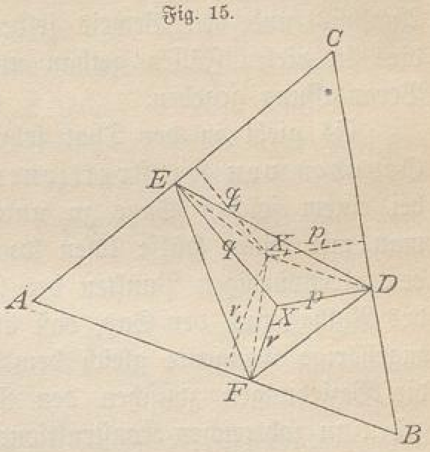


Die Lote aber bilden miteinander stets Winkel von je 120^0.

Ist nun DEF ein beliebiges Dreieck, und denkt man sich, X

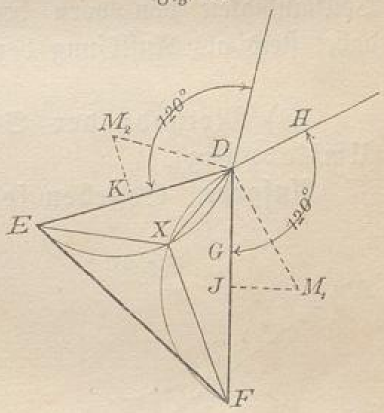
sei der Punkt, dessen Ecktransversalen unter Winkeln von je 120^0 zusammenstoßen, so erkennt man, daß die in den Eckpunkten auf den Transversalen errichteten Lote ein gleichseitiges Dreieck ABC bilden. Fällt man von einem anderen Punkte X_1 aus auf die Seiten von ABC Lote p_1, q_1, r_1, so ist $p_1 + q_1 + r_1 = p + q + r$. Verbindet man aber X_1 mit D, E und F, so ist $X_1D + X_1E + X_1F > p_1 + q_1 + r_1$, also auch größer als $p + q + r$. Da dies von jedem beliebigen Punkte X_1 gilt, so folgt, daß der Punkt X, in dem die Ecktransversalen sich unter 120^0 treffen, derjenige ist, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Wert hat.

Fig. 15.



Die Konstruktion des gesuchten Punktes ist einfach. Schlage um D einen Bogen und trage auf ihm von DF aus zweimal den Radius ab, was den Punkt H giebt. Errichte in D auf HD und ebenso im Halbierungspunkte J auf DF Lote. Um den Schnittpunkt M_1 der letzteren schlage einen durch D (und F) gehenden Kreis. Wiederhole diese Konstruktion an der Seite DE, was den Punkt M_2 als Mittelpunkt eines Kreises DE giebt. Beide Kreise schneiden sich in dem gesuchten Punkte X.

Fig. 16.



Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion bleibe dem Schüler überlassen, ebenso die Untersuchung, wie es wird, wenn X außerhalb des Dreiecks fällt.

27) An solchen und ähnlichen Lösungen erkennt man, daß beanlagte und geübte Geometer Brücken zu schlagen verstehen, wo weniger geübte die Möglichkeit einer Verbindung gar nicht erkennen. In vielen Fällen steht zu vermuten, daß die Lösung auch nicht auf analytischem Wege gefunden ist, sondern auf Grund des umgekehrten Verfahrens. Der Geometer fand auf synthetischem Wege einen

gewissen Zusammenhang und erkannte, daß durch denselben eine gewisse Gruppe von Aufgaben lösbar wird. Er konnte z. B. die Konstruktion veröffentlichen und es den Mathematikern überlassen, die Analysis und den Beweis selber aufzufinden. Steiner z. B. hat dies in vielen Fällen gethan und damit zu zahlreichen Forschungen Veranlassung gegeben.

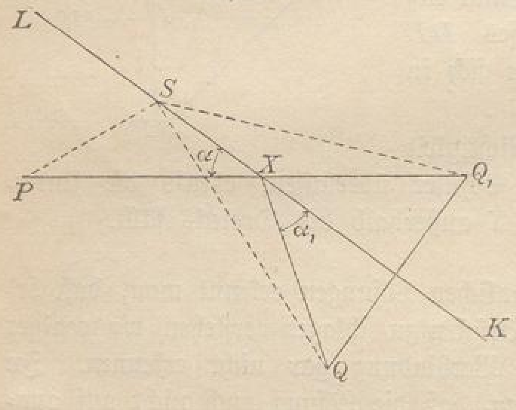
Es giebt in der That sehr ergiebige Quellensätze für größere Gruppen von Konstruktionen, und es ist eine nützliche Aufgabe, bei einem solchen Satze zu untersuchen, welche Art von Problemen man mit seiner Hülfe lösen kann. Solche Sätze sind z. B. die von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks handelnden, ferner der Satz des Pythagoras, der Satz, daß die Sekante stetig geteilt ist, wenn die zugehörige Tangente gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Auch die Beziehungen zwischen den Radien der Hauptkreise des Dreiecks geben zu zahlreichen Konstruktionen Anlaß. Sätze von hervorragender Wichtigkeit, wie der Satz vom vollständigen Viereck, die Sätze von Pascal und Brianchon werden noch zur Sprache kommen.

Kommt man mit Lehrsätzen nicht zum Ziele, so versucht man die Lösung der Aufgabe mit Hülfe gewisser Methoden. Einige davon sollen durch Beispiele erläutert werden, wobei auf systematische Vollständigkeit von vorn herein verzichtet wird. Die Analysis sei dabei stets als Auflösung bezeichnet.

28) Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder (Umklappung).

Aufgabe. Gegeben sei eine Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von KL. Der kürzeste Weg von P zur Geraden und nach Q soll gefunden werden.

Fig. 17.



Auflösung. Bildet man das Spiegelbild Q_1 von Q und ist S ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist jedesmal $PS + SQ = PS + SQ_1$. Statt also zu untersuchen, wann $PS + SQ$ ein Minimum (kleinster Wert) ist, kann man untersuchen, wann $PS + SQ_1$ ein solches ist. Dies geschieht aber, wenn PQ_1 als Gerade gezogen wird, was den Schnitt X giebt.

Folglich ist $PX + XQ$ der gesuchte kürzeste Weg. (Dabei ist $\alpha = \alpha_1$; vergl. Reflexion der Lichtstrahlen. Die Aufgabe kommt bei der Ellipse zu wichtiger Anwendung. Sie kann dahin verallgemeinert werden, daß man nach dem kürzesten Wege von einem Punkte P nach einer Geraden KL, nach einer zweiten Geraden K_1L_1, nach einer dritten K_2L_2 und nach einem Punkte Q sucht.)

Liegen P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden, so handelt es sich um die Aufsuchung der größten möglichen Differenz $PS - SQ$, wobei ebenfalls $\alpha = \alpha_1$ wird. (Die Aufgabe ist wichtig für die Hyperbel.)

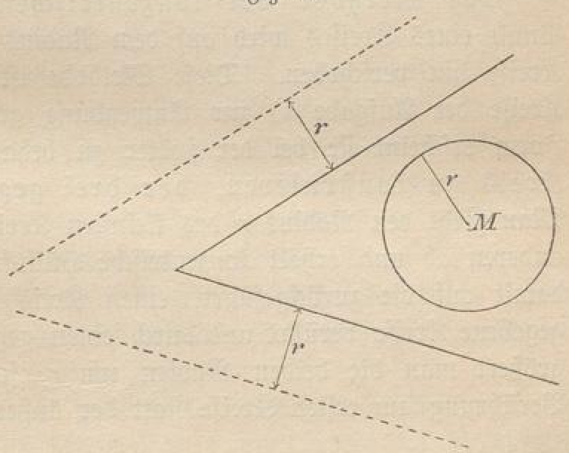
An Stelle von Q kann man einen um Q geschlagenen Kreis treten lassen und z. B. den Weg eines Lichtstrahles suchen, der von P zur Geraden geht, dort unter demselben Winkel zurückgeworfen wird und den Kreis um Q berührt.

Häufig ist an der Aufgabe ohne weiteres die Symmetrie der fertigen Zeichnung gegen irgend eine Gerade zu erkennen, woraus sich sofort neue Elemente für die Konstruktion ergeben. Soll z. B. ein Kreis gezeichnet werden, der zwei Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, so findet Symmetrie gegen die Halbierungslinie des Winkels statt, was sofort einen zweiten Punkt giebt. Darauf beruht eine der verschiedenen Konstruktionen.

28) Methode der Parallelverschiebungen.

Aufgabe. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Gerade berührt.

Fig. 18.



Auflösung. Man verschiebt jede der Geraden parallel zu sich selbst um r. Gelingt es dann, den Kreis zu zeichnen, der die Hülfslinien berührt und durch M geht, so hat man den Mittelpunkt des wirklich gesuchten Kreises gefunden.

Verschiebt man beide Geraden in entgegengesetzter Richtung, wie in der Figur, so erhält man die innere Berührung an Stelle der äußeren.

Bisweilen kann man die Figur durch parallele Verschiebung einzelner Geraden in günstiger Weise umgestalten. Dies geschah z. B. bei der Konstruktion des Dreiecks aus den drei Mittellinien. (Vergl. Teil I, Nr. 123.)

Aufgabe b) Gegeben seien zwei auseinanderliegende Kreise. Von der Peripherie des einen soll zu der des anderen eine Gerade von gegebener Richtung und Länge gelegt werden.

Auflösung. Man verschiebe den einen der Kreise um die entsprechende „Strecke". Die beiden Schnittpunkte sind die Ausgangspunkte der gesuchten Geraden.

Auch Parallelverschiebung mehrerer Punkte führt bisweilen zum Ziele, z. B. bei folgender

Aufgabe c) Gegeben seien zwei Gerade und ein zwischen ihnen liegender Punkt. Durch den Punkt von der einen Geraden zur anderen eine Gerade zu legen, die durch den Punkt in gegebenem Verhältnis geteilt ist.

Auflösung. Angenommen, eine durch den Punkt von Linie zu Linie gelegte Gerade sei in dem verlangten Verhältnis geteilt. Legt man dann durch den Punkt eine Parallele zu der einen der gegebenen Geraden, so ist der Abschnitt der anderen ebenfalls im gegebenen Verhältnis geteilt. (Handelt es sich z. B. um das Verhältnis 3 : 5, so ist der Abschnitt in 8 gleiche Teile zerlegt, und die Parallele schneidet 3 von den Teilen ab.) Aus dieser Bemerkung folgt die Konstruktion.

29) Methode der konzentrischen Verschiebung. Jeder Punkt eines Kreises wird auf dem Radius nach einem konzentrischen Kreise hin verschoben. Diese Methode ist eigentlich schon bei dem Kreise der Aufgabe a) zur Anwendung gekommen. In allgemeiner Form erscheint sie bei der später zu behandelnden Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Man zieht den Radius r des kleinsten Kreises von denen der beiden anderen ab und erhält konzentrische Hülfskreise. Die Aufgabe wird damit auf die zurückgeführt, einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Vergrößert man die beiden Radien um r, so erhält man die innere Berührung am ersten Kreise statt der äußeren.

30) Methode der Ähnlichkeit. Man konstruiert statt des verlangten Gebildes zunächst ein ihm ähnliches. So kann z. B. die Konstruktion eines regelmäßigen Polygons über einer gegebenen Ge=

raden erfolgen, indem man ein solches zunächst in einen beliebigen Kreis einzeichnet und dann die Figur auf den richtigen Maßstab bringt.

Aufgabe a) Jn ein gleichschenkliges Dreieck ein Quadrat einzuzeichnen. Man zeichnet erst ein beliebiges Quadrat (auf der Grundlinie) mit der Höhe als Symmetrieachse und projiziert die Ecken von A aus auf die Schenkel. (Fig. 19.)

Fig. 19.

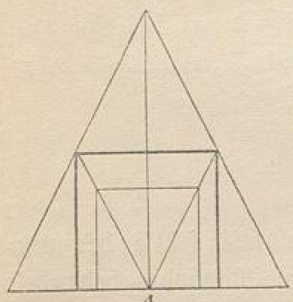
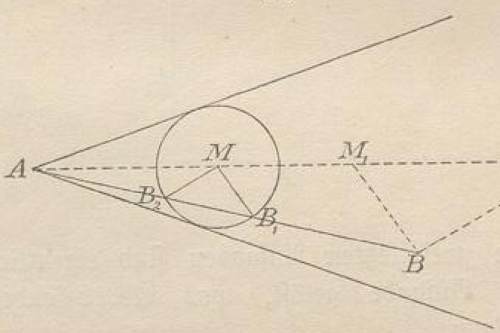


Fig. 20.



Aufgabe b) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt B geht.

Auflösung. Man zeichne zunächst einen beliebigen Berührungskreis. Die Gerade AB giebt Schnittpunkte B_1 und B_2 und Radien $B_1 M$ und $B_2 M$. Jetzt hat man die der gesuchten ähnliche Zeichnung. Die Parallelen BM_1 und BM_2 zu jenen beiden Radien sind die gesuchten Radien. (An dieser Aufgabe erkennt man die Wichtigkeit der perspektivischen Lage.)

Aufgabe c) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken in drei gegebenen Parallelen AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ liegen.

Auflösung. Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck DEF (Fig. 22) von beliebiger Größe und teile DE im Verhältnis $h_1 : h_2$, wo h_1 und h_2 die zu den gegebenen Parallelen gehörigen Abstände sind. Zieht man durch D und E Parallele zur Teilungstransversale FG, so hat man die zur gesuchten ähnliche Zeichnung. Eintragung des Winkels α in die gegebene Figur 21 genügt zur Vollendung der Aufgabe. (Später andere Konstruktion.)

Auf entsprechende Weise gelingt die Lösung der Aufgabe, ein gegebenes gleichseitiges Dreieck mit den Ecken in drei von einem Punkte ausgehende Strahlen zu legen. Es ist nur nötig, über zwei Seiten des Dreiecks Kreisbogen zu schlagen, die den von den Strahlen gebildeten Winkeln entsprechen. Die in diesem Falle kongruente Figur ist dann in die richtige Lage zu bringen. (Auch dafür folgt später eine andere Lösung.)

Fig. 21.

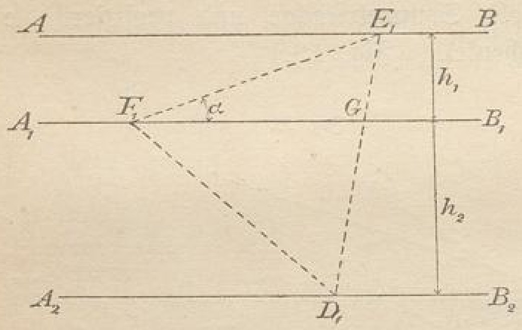
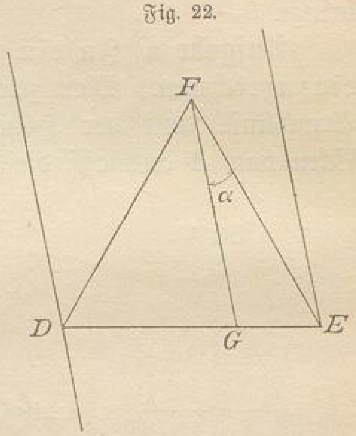


Fig. 22.



Die zwei letzten Aufgaben sind eigentlich mit Hülfe der umgekehrten Aufgabe gelöst, was als besondere Methode behandelt werden kann.

Aufgabe d) Durch einen der Schnittpunkte zweier sich schneidenden Kreise eine Sekante zu legen, die in gegebenem Verhältnis geteilt ist.

Auflösung. Jede Sekante AB, die durch den Schnittpunkt P der Kreise geht, giebt mit dem anderen Kreisschnitte Q ein Dreieck. Alle diese Dreiecke sind ähnlich wegen der übereinstimmenden Peripheriewinkel α und β über PQ. Man zeichne ein beliebiges Dreieck $A_1 B_1 Q_1$ mit den Winkeln α und β, teile $A_1 B_1$ in dem gegebenen Verhältnis, was den Punkt P_1 giebt und ziehe $P_1 Q_1$. Der Winkel $P_1 Q_1 A_1$ ist an PQ anzutragen und giebt die Lösung.

31) Methode der Umkehrung der Aufgabe.

Aufgabe a) Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck von derselben Fläche zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandelt zunächst ein gleichseitiges Dreieck von beliebiger Größe in ein Rechteck und dieses in ein Quadrat. Jetzt hat man das Verhältnis zwischen Quadrat- und Dreiecksseite für den Fall der Flächengleichheit. Die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks kann daher als vierte Proportionale konstruiert werden.

Entsprechend läßt sich jedes Quadrat in ein Vieleck verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich ist; also jedes Vieleck in ein flächengleiches, welches einem beliebigen anderen Vieleck ähnlich ist.

Aufgabe b) Eine gegebene Gerade so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei die erstere der kleinere (bezw. größere) Teil sein soll.

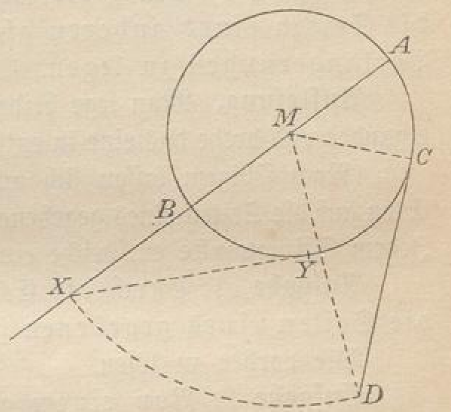
Auflösung. Man teile eine beliebige Gerade nach dem goldenen Schnitt und konstruiere das fehlende Stück der gegebenen als vierte Proportionale.

Die Lösungen mit Hülfe der Umkehrung der Aufgabe sind in der Regel nicht als elegant zu bezeichnen.

32) Methode der Drehung.

Die vorige Aufgabe, eine gegebene Gerade AB so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei sie selbst der größere Teil sein soll, kann folgendermaßen gelöst werden: Man schlage über AB als Durchmesser einen Kreis, lege an einen beliebigen Punkt C eine Tangente $CD = AB$, und schlage um M mit MD einen Kreis, der die Verlängerung von AB in dem gesuchten Punkte X schneidet. (Die Tangente CD ist dabei in die Lage YX gedreht worden, was der früheren Konstruktion des goldenen Schnittes entspricht.)

Fig. 23.

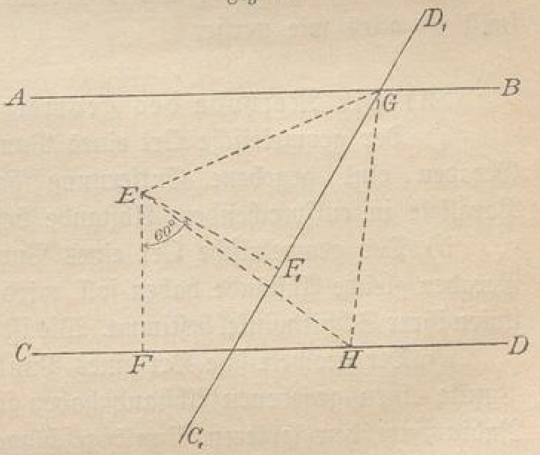


Aufgabe a) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, welches mit den Ecken auf zwei gegebenen Parallelen AB und CD und einem gegebenen Punkte E liegt.

Auflösung. Man ziehe das Lot EF, drehe EF um 60^0 in die Lage EF_1, errichte in F_1 auf EF_1 ein Lot, welches AB in G schneidet. EG ist Basis des gesuchten Dreiecks.

Dreht man nämlich die Gerade C_1D_1 um E in die ursprüngliche Lage zurück, so fällt G nach H, und $\sphericalangle GEH$ ist gleich 60^0.

Fig. 24.



Dieselbe Lösung gilt für zwei beliebige Gerade und einen Punkt E. (Vergleiche Abschnitt 30.)

Aufgabe b) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf einem gegebenen Kreise, einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte E liegen.

Auflösung. Man drehe die Gerade um E, und zwar um 60^0. Die Schnittpunkte K und K_1 mit dem Kreise geben die Grundlinien EK und EK_1 für zwei verschiedene Dreiecke der gesuchten Art. — Man kann auch den Kreis um den Punkt E drehen (ebenfalls um 60^0).

Aufgabe c) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf zwei gegebenen Kreisen und einem Punkte liegen. (Ebenfalls zwei Lösungen nach derselben Art.)

Aufgabe d) Ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken auf die Seiten eines anderen gleichseitigen Dreiecks oder deren Verlängerungen zu legen.

Auflösung. Man lege beide Dreiecke mit den Mittelpunkten aufeinander und drehe das eine in entsprechender Weise um den Mittelpunkt.

(Nach Obigem lassen sich unzählige gleichseitige Dreiecke mit den Ecken auf die Seiten eines gegebenen Dreiecks von beliebiger Gestalt legen. Jedem Seitenpunkte entspricht ein bestimmtes gleichseitiges Dreieck.)

Aufgabe e) Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks die Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks zu legen.

Wie vorher zu lösen.

Aufgabe f) Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade (oder an zwei gegebene Kreise, oder an zwei gegebene Gerade) zwei gleichlange Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel (z. B. von 30^0) einschließen.

Statt der Drehung um 60^0 wird eine um 30^0 vorgenommen, sonst ist alles wie vorher.

33) Die Methode des geometrischen Ortes.

a) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben soll, wird durch zwei Parallele in entsprechendem Abstande bestimmt.

b) Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Geraden gleiche Abstände haben soll, wird durch die beiden Halbierungslinien ihrer Schnittwinkel bestimmt. Wie ist es im Falle des Parallelismus?

c) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben soll, ist ein mit entsprechendem Radius um den letzteren Punkt geschlagener Kreis.

d) Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben soll, ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

e) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Kreise einen gegebenen Abstand haben soll, ist durch zwei konzentrische Kreise von entsprechendem Radius bestimmt.

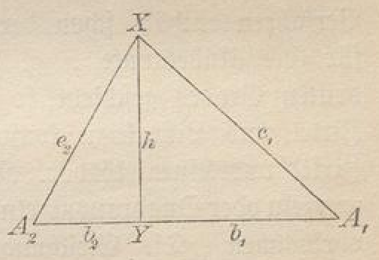
f) Der geometrische Ort für die Scheitel gleicher Winkel, deren Schenkel Tangenten eines gegebenen Kreises sind, ist ein konzentrischer Kreis.

g) Der geometrische Ort für die Scheitel gleicher Winkel über einer gegebenen Geraden ist ein Kreisbogen durch ihre Endpunkte.

h) Der geometrische Ort eines Punktes, für den die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten einen gegebenen Wert haben soll, ist ein gewisses Lot auf ihre Verbindungslinie.

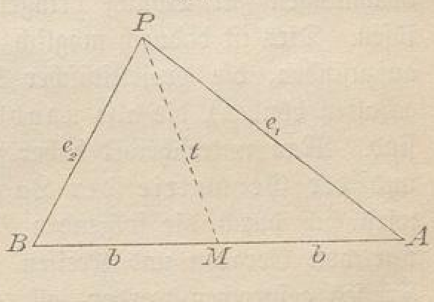
(Denn $e_1^2 - e_2^2 = (b_1^2 + h^2) - (b_2^2 + h^2) = b_1^2 - b_2^2$, wie hoch auch der Punkt X liegen mag. Also ist das Lot der geometrische Ort.) Der Fußpunkt des Lotes bestimmt sich mit Hülfe der Gleichungen $b_1 + b_2 = a$, $b_1^2 - b_2^2 = d^2$, also durch $b_1 = \frac{a^2 + d^2}{2a}$. (Fig. 25.)

Fig. 25.



i) Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus die Tangenten an zwei gegebene Kreise gleich lang sein sollen, steht senkrecht auf der Centrale. Schneiden sich die Kreise, so handelt es sich um die gemeinschaftliche Sekante; liegen sie auseinander, so handelt es sich um das Lot, welches vom Halbierungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente aus auf die Centrale gefällt ist. Wird der eine vom anderen umschlossen, so findet man das Lot folgendermaßen. Man zieht von dem kleineren Kreise aus eine Tangente, die über den größeren hinausragt; eine gleich große Tangente lege man an den größeren Kreis. Die Endpunkte beider Tangenten drehe man um den Mittelpunkt des zu jeder gehörigen Kreises. Wo sich die beiden Hülfskreise schneiden, dort ist der Punkt, von dem aus das Lot auf die Centrale zu fällen ist.

Fig. 26.



k) Der geometrische Ort eines Punktes P, für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist, ist ein Kreis um den Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie.

(In Fig. 26 ist M der Halbierungspunkt von AB, also $e_1^2 = t^2 + b^2 + 2pt$ und $e_2^2 = t^2 + b^2 - 2pt$, wo p die Projektion von t auf AB ist. Folglich ist $e_1^2 + e_2^2 = 2t^2 + 2b^2$ und $t = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 - 2b^2}{2}}$, d. h. t eine konstante Länge.)

Bemerkung. In der Elementargeometrie handelt es sich nur um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Der geometrische Ort für einen zu konstruierenden Punkt ist also stets eine Gerade oder ein Kreis. Wir werden noch einige andere Fälle kennen lernen, wo beide als geometrischer Ort auftreten. Die obigen Fälle genügen zur Lösung zahlreicher Aufgaben.

34) Führen die angegebenen geometrischen Wege nicht zum Ziele, so versucht man es mit der oben besprochenen Methode der algebraischen Analysis, d. h. man betrachtet ein geeignetes Stück als Unbekannte x, versucht eine Gleichung aufzustellen, welche die Unbekannte enthält und löst die Gleichung auf. (Beispiele zu diesem Verfahren enthält schon der erste Teil.) Enthält nun der Ausdruck für die Unbekannte x z. B. Kubikwurzeln, was bei Gleichungen dritten Grades geschieht, so ist es im allgemeinen unmöglich, ihn mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, d. h. die Aufgabe ist nicht mit Zirkel und Lineal lösbar. Dagegen ist sie lösbar, wenn nur Quadratwurzeln oder Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln oder gar keine Wurzeln vorkommen. Die Gleichungen dürfen allerdings nicht transcendente sein. Über die zu konstruierenden Ausdrücke ist das Nötige im ersten Teil gesagt. —

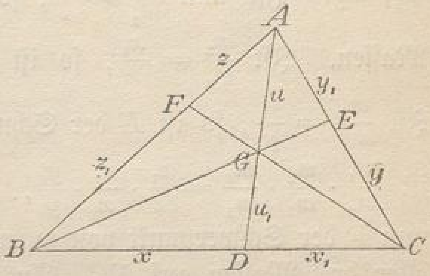
Der neueren Geometrie ist es gelungen, eine große Anzahl von Aufgaben, die man früher gar nicht oder nur mit Hülfe komplizierter Rechnungen zur Lösung bringen konnte, in sehr einfacher Weise zu lösen. Dies ist dadurch möglich geworden, daß es gelang, Beziehungen aufzufinden, die projektivischer Natur sind (d. h. bei jeder Projektion erhalten bleiben), die also unabhängig von den Maßbeziehungen sind. Man unterscheidet daher zwischen der Geometrie des Maßes und der Geometrie der Lage. Der Unterschied zwischen beiden wird sich durch die folgenden Abschnitte aufklären, obwohl vorläufig nur von Geraden und Kreisen, nicht aber von den Projektionen des Kreises gesprochen werden soll. —

Bemerkung. Hat man eine Aufgabe grundsätzlich (im Prinzip) gelöst, so gebe man sich nicht ohne weiteres zufrieden, sondern suche jetzt erst eine möglichst kurze (elegante) Lösung. In diesem Sinne unterschied Steiner zwischen der Lösung mit dem Munde und der Lösung mit der Hand.

V. Übergang zur neueren Geometrie.*)

35) **Satz des Ceva.** Die von den Ecken eines Dreiecks aus durch einen Punkt gezogenen Transversalen**) teilen die Gegenseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind.

Fig. 27.



Beweis. In Fig. 27 verhalten sich die Inhalte der auf derselben Grundlinie AG stehenden Dreiecke AGB und AGC wie die zugehörigen Höhen. Die letzteren, d. h. die von B und C aus auf AG gefällten Lote, verhalten sich aber wie x und x_1. (Warum?) Demnach bestehen im ganzen folgende Beziehungen:

$$\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} = \frac{x}{x_1}, \quad \frac{\triangle BGC}{\triangle BGA} = \frac{y}{y_1}, \quad \frac{\triangle CGA}{\triangle CGB} = \frac{z}{z_1}.$$

Multipliziert man die linken und ebenso die rechten Seiten dieser Gleichungen mit einander, so entsteht eine Gleichung, auf deren linker Seite sich alles hebt, also

$$1 = \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1}, \quad \text{oder} \quad xyz = x_1 y_1 z_1.$$

(Der Punkt G darf auch außerhalb des Dreiecks liegen.)

36) **Umkehrung.** Teilt man die Dreiecksseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Stücken einander gleich sind, so gehen die Verbindungslinien der Teilpunkte mit den Gegenecken durch **einen** Punkt.

(Der Beweis wird indirekt geführt. Man nimmt an, die dritte Transversale CF' ginge nicht durch G, obwohl $xyz = x_1 y_1 z_1$ ist.

---

*) Dieses Übergangskapitel ist aus historischen Gründen eingeschaltet. Die späteren Betrachtungen sind unabhängig davon.

**) Eine Transversale ist eine Gerade, die willkürlich quer durch ein System gegebener Geraden gelegt wird.

Man zieht dann CGF, wobei $xyz' = x_1y_1z'_1$ wird. Durch Division folgt aus beiden Gleichungen $\frac{z}{z'} = \frac{z_1}{z_1'}$ oder $\frac{z}{z_1} = \frac{z'}{z_1'}$. Da aber die innere Teilung von AB im Verhältnis $\frac{z}{z_1}$ und im Sinne der Fig. 27 nur einen einzigen Teilpunkt giebt, so müssen F und F' zusammenfallen, und auch CF' muß durch G gehen.)

37) [Beweis auf Grund der Schwerpunktslehre (barycentrischer Beweis). Man denke sich in A, B und C willkürliche Massen m_1, m_2, m_3. Ist nun $\frac{m_1}{m_2} = \frac{z_1}{z}$, so ist F der Schwerpunkt der beiden Massen. Ist $\frac{m_2}{m_3} = \frac{x_1}{x}$, so ist D der Schwerpunkt dieser Massen. Ist $\frac{m_3}{m_1} = \frac{y_1}{y}$, so ist E der Schwerpunkt der letzteren Massen. Dabei ist $\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_3} \cdot \frac{m_3}{m_1} = \frac{z_1}{z} \cdot \frac{x_1}{x} \cdot \frac{y_1}{y}$, oder $1 = \frac{x_1 y_1 z_1}{xyz}$, wie oben. Weil nun F der Schwerpunkt von m_1 und m_2 ist, so liegt der Schwerpunkt G aller drei Massen auf FC. Aus demselben Grunde liegt er auch auf DA und auf EB. Da es aber nur einen einzigen gemeinschaftlichen Schwerpunkt giebt, müssen sich die drei Geraden in einem einzigen Punkte schneiden. Aus $x_1y_1z_1 = xyz$ folgt also das Schneiden der drei Geraden in demselben Punkte. — Statt der Massen in A, B und C kann man sich auch parallele Kräfte denken. Ist eine davon zu den beiden anderen entgegengesetzt gerichtet, so erhält man einen von den Fällen, wo G außerhalb des Dreiecks liegt.

Zugleich ist nach dem Schwerpunktsgesetze $\frac{AG}{DG} = \frac{m_2 + m_3}{m_1}$ $= \frac{z}{z_1} + \frac{y_1}{y} = \frac{yz + y_1z_1}{yz_1}$.

Setzt man $AG = u$, $DG = u_1$ und entsprechend die Abschnitte der anderen Transversalen gleich v, v_1, w, w_1, so hat man mit Hülfe cyklischer Vertauschung die Gleichungen:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{yz + y_1z_1}{yz_1}, \quad \frac{v}{v_1} = \frac{zx + z_1x_1}{zx_1}, \quad \frac{w}{w_1} = \frac{xy + x_1y_1}{xy_1}.$$

Aus $xyz = x_1y_1z_1$ folgt $y = \frac{x_1y_1z_1}{xz}$. Dies, in die erste der Gleichungen eingesetzt, verwandelt sie in $\frac{u}{u_1} = \frac{(x + x_1)z}{x_1z_1}$, oder in $x_1uz_1 = (x + x_1)u_1z$. So ergiebt sich für das von der Transversale FC geschnittene Dreieck ABD eine neue Beziehung: der nachstehend geometrisch bewiesene Satz des Menelaos.]

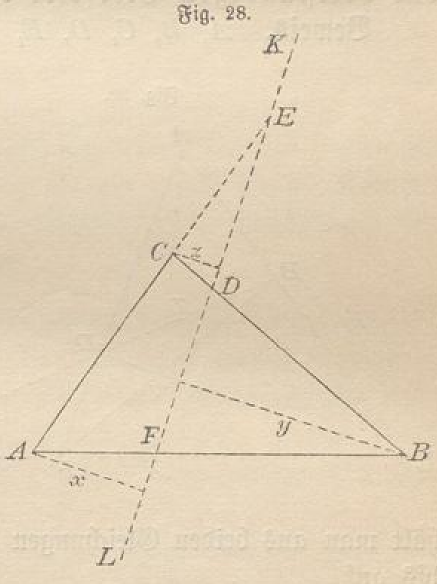
38) **Bemerkungen.** Sind die Dreiecksseiten halbiert, so erhält man aus dem Satze des Ceva die Sätze von den Mittellinien und dem gewöhnlichen Dreiecksschwerpunkte. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des In-Kreises mit den Gegenecken des Dreiecks müssen sich ebenfalls nach Ceva in einem Punkte schneiden, da je zwei Tangenten gleich sind. Entsprechendes gilt von den An-Kreisen. Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, denn aus der Ähnlichkeit gewisser Dreiecke folgen in obiger Bezeichnung die Gleichungen $xy = y_1 z_1$, $yz = z_1 x_1$, $zx = x_1 y_1$, aus denen man durch Multiplikation u. s. w. $x_1 y_1 z_1 = xyz$ erhält. —

Durch Parallel- oder Centralprojektion geht die Fig. 27 in eine andere über, von der wiederum der Satz des Ceva gilt. Die durch den letzteren ausgesprochene Eigenschaft des Dreiecks bleibt also bei jeder Projektion des Dreiecks erhalten. Man nennt solche Eigenschaften der Figuren projektivische Eigenschaften.

39) **Satz des Menelaos.** Werden die Seiten eines Dreiecks (oder ihre Verlängerungen) durch eine Transversale geschnitten, so sind die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich. (Vgl. 37.)

Beweis. In Fig. 28 sei KL die das Dreieck ABC schneidende Transversale. Die Schnittpunkte mit den Seiten seien D, E und F. Die Entfernungen der Ecken von der Transversale seien x, y, z. Aus der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke folgt

Fig. 28.



$$\frac{AF}{BF} = \frac{x}{y}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{y}{z}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{z}{x},$$

durch Multiplikation wird demnach

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{BF \cdot CD \cdot AE} = \frac{xyz}{yzx} = 1,$$

oder

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

40) **Umkehrung.** Wählt man auf den Seiten eines Dreiecks (bzw. den Verlängerungen der einen oder aller drei Seiten) Teilpunkte so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind, so liegen die Teilpunkte auf einer Geraden.

Der Beweis ist indirekt in derselben Weise zu geben, wie bei der Umkehrung des Satzes von Ceva.

41) **Bemerkungen.** Aus dem Satze des Menelaos folgt der des Ceva. Betrachtet man nämlich in Fig. 27 das Dreieck ABD als von FC geschnitten und das Dreieck ACD als von BE geschnitten, so ergeben sich nach Menelaos zwei Gleichungen, aus denen durch Division die des Ceva folgt.

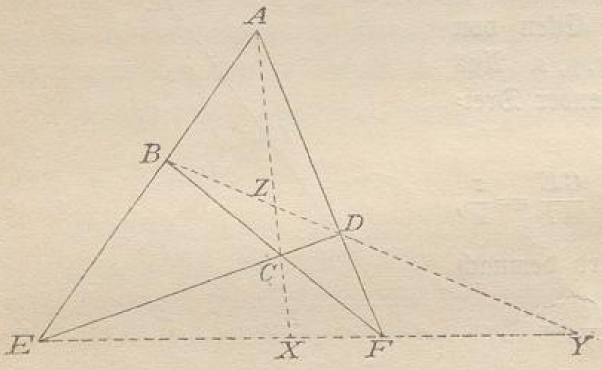
Auch der Satz des Menelaos ist eine Eigenschaft, die bei beliebigen Projektionen der zugehörigen Figur erhalten bleibt.

Unter vollständigem Vierseit versteht man vier Gerade mit ihren sechs Schnittpunkten, so daß es hier drei Diagonalen giebt. (Unter vollständigem Viereck versteht man vier Punkte mit ihren sechs Verbindungslinien, so daß es hier drei Schnittpunkte von Gegenseiten giebt.) Aus den Sätzen des Menelaos und Ceva ergiebt sich über das vollständige Vierseit der folgende wichtige (projektivische) Satz, von dem später ein von aller Rechnung unabhängiger Beweis gegeben werden soll:

42) **Satz vom vollständigen Vierseit.** Die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits teilen einander harmonisch.

Beweis. A, B, C, D, E, F seien die Ecken des vollständigen Vierseits, X, Y, Z die Schnittpunkte der Diagonalen. Nach Ceva ist im Dreieck AEF

Fig. 29.



$$1.\ \frac{AB \cdot EX \cdot FD}{BE \cdot XF \cdot DA} = 1.$$

Nach Menelaos ist in demselben durch BY geschnittenen Dreieck

$$2.\ \frac{AB \cdot EY \cdot FD}{BE \cdot FY \cdot DA} = 1.$$

Durch Division erhält man aus beiden Gleichungen eine neue, in der sich alles weghebt, bis auf

$$3.\qquad \frac{EX}{XF} = \frac{EY}{FY}.$$

Demnach ist zunächst die Diagonale EF in X und Y harmonisch geteilt. (E und F, ebenso X und Y sind nach Teil I Nr. 168 zugeordnete Punkte.)

Wird nun Fig. 29 in irgend einer Weise auf eine andere Ebene projiziert, so bleiben nach 38 und 41 die Gleichungen 1. und 2. bestehen, folglich auch Gleichung 3. Ist also eine Gerade harmonisch geteilt, so ist auch ihre Projektion durch die projizierten Teilpunkte harmonisch geteilt. Die harmonische Teilung ist demnach eine projektivische Eigenschaft. Zieht man nun in Fig. 29 AY, so sind die Punkte $EFXY$ von A aus auf BY projiziert, folglich sind $BDZY$ harmonische Punkte. Zieht man noch EZ, so sind die Punkte $BDZY$ von E aus auf AX projiziert, folglich sind auch $ACZX$ harmonische Punkte.

Aufgabe. Zu drei Punkten E, F, X (oder E, F, Y), von denen E und F zugeordnet sind, mit dem Lineal allein den vierten harmonischen zu konstruieren.

Die Lösung erfolgt durch Wiederherstellung der Fig. 29 aus E, F und X unter beliebiger Annahme von A u. s. w.

Bemerkung. Gerade der Umstand, daß auch dieser Satz von Maßbeziehungen unabhängig ist und die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ohne den Zirkel gestattet, läßt vermuten, daß noch eine andere Art von Beweisführung möglich ist, die aus dem Bereiche der (Euklidischen) Geometrie des Maßes ganz herausgeht. Die wichtigen Folgerungen dieses Satzes bleiben daher bis zum späteren Beweise vorbehalten. (Vom vollständigen Viereck gilt der entsprechende Satz: Verbindet man die drei Schnittpunkte der Gegenseiten des vollständigen Vierecks mit einander, so entstehen drei Gruppen harmonischer Strahlen. Dies folgt sofort aus Fig. 29.)

Aus dem Satze des Menelaos läßt sich der nachstehende Pascalsche Satz vom Sehnensechseck ableiten, der als ein grundlegender Satz der neueren Geometrie zu betrachten ist. Später soll er unabhängig von den ersteren Sätzen bewiesen werden.

43) **Satz des Pascal.** Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

Beweis. In Fig. 30 sei $ABCDEF$ das Sehnensechseck, P, Q und R seien die Schnittpunkte der Gegenseiten, X, Y und Z die Schnittpunkte der nicht zusammenstoßenden (alternierenden) Seiten BC, DE und FA.

Das Dreieck XYZ wird von drei Transversalen AB, CD und EF geschnitten. Nach Menelaos gelten also für jede derselben folgende Gleichungen:

$$AX \cdot BY \cdot PZ = AZ \cdot BX \cdot PY$$
$$CY \cdot DZ \cdot QX = CX \cdot DY \cdot QZ$$
$$EZ \cdot FX \cdot RY = EY \cdot FZ \cdot RX;$$

durch Multiplikation folgt

$$1. \quad \underline{AX} \cdot \underline{BY} \cdot PZ \cdot \underline{CY} \cdot \underline{DZ} \cdot QX \cdot \underline{EZ} \cdot \underline{FX} \cdot RY$$
$$= \underline{AZ} \cdot \underline{BX} \cdot PY \cdot \underline{CX} \cdot \underline{DY} \cdot QZ \cdot \underline{EY} \cdot \underline{FZ} \cdot RX.$$

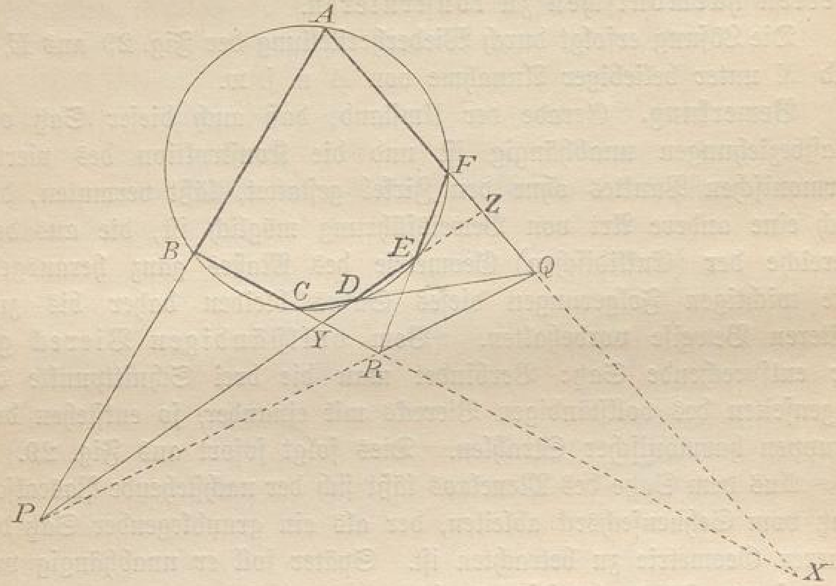
Außerdem ist nach dem Sekantensatze:

$$XA \cdot XF = XB \cdot XC, \quad YB \cdot YC = YD \cdot YE, \quad ZD \cdot ZE = ZA \cdot ZF,$$

also durch Multiplikation

$$2. \quad XA \cdot XF \cdot YB \cdot YC \cdot ZD \cdot ZE = XB \cdot XC \cdot YD \cdot YE \cdot ZA \cdot ZF.$$

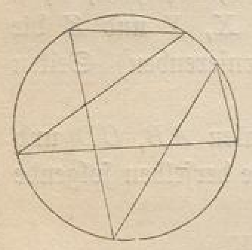
Fig. 30.



Aus 1. und 2. folgt durch Division (und Hebung der unterstrichenen Faktoren) $PZ \cdot QX \cdot RY = PY \cdot QZ \cdot RX$.

Dies entspricht wiederum dem Satze des Menelaos. Folglich liegen P, Q und R auf einer Geraden, der sogenannten **Pascalschen Linie** des Sehnensechsecks.

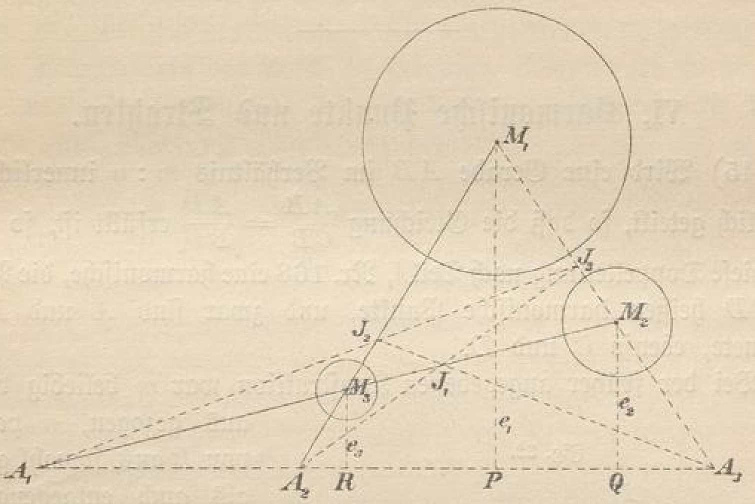
Fig. 30 a.



Bemerkung. Die Seiten des Sehnensechsecks dürfen sich auch gegenseitig schneiden, wie in Fig. 30 a, nur muß die Figur eine geschlossene sein. Auch die wichtigen Folgerungen dieses Satzes werden auf später verschoben. Dasselbe soll mit folgendem Satze über die Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen (vgl. Teil I. Nr. 166) geschehen.

44) **Satz.** Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier geraden Linien.

Fig. 31.



Beweis. Es ist nach Teil I. Nr. 166 und 168 (äußere Teilung von $M_1 M_2$ u. s. w. im Verhältnis der Radien)

$$\frac{M_1 A_3}{M_2 A_3} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3 A_2}{M_1 A_2} = \frac{r_3}{r_1},$$

folglich durch Multiplikation

$$\frac{M_1 A_3 \cdot M_2 A_1 \cdot M_3 A_2}{M_2 A_3 \cdot M_3 A_1 \cdot M_1 A_2} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2 r_3 r_1} = 1,$$

was dem Satze des Menelaos entspricht, so daß A_1, A_2, A_3 auf gerader Linie liegen müssen.

In derselben Weise wird bewiesen, daß $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_3 J_1$ und $A_3 J_1 J_2$ auf gerader Linie liegen. Die vier Geraden heißen Ähnlichkeitsachsen.

Bemerkung. Nach Art des Satzes des Menelaos läßt sich der Beweis direkt folgendermaßen führen:

Man fälle von M_1, M_2 und M_3 aus Lote e_1, e_2, e_3 auf die Gerade $A_3 A_2$. Weil $A_2 A_3$ durch den Ähnlichkeitspunkt A_3 geht, so folgt aus $\frac{e_1}{e_2} = \frac{M_1 A_3}{M_2 A_3}$, daß $\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Ebenso folgt, weil $A_2 A_3$ durch A_2 geht, $\frac{e_3}{e_1} = \frac{r_3}{r_1}$. Folglich erhält man durch Multiplikation $\frac{e_3}{e_2} = \frac{r_3}{r_2}$. Weil aber die von M_3 und M_2 ausgehenden Parallelen e_3 und e_2 sich wie die Radien der Kreise M_3 und M_2, also auch wie $M_3 A_1$ zu $M_2 A_1$ verhalten, so muß die Verbindungslinie der Endpunkte von e_3 und e_2

durch den Ähnlichkeitspunkt A_1 gehen. Diese Verbindungslinie fällt aber mit $A_2 A_3$ zusammen, also liegen A_1, A_2 und A_3 auf einer Geraden.

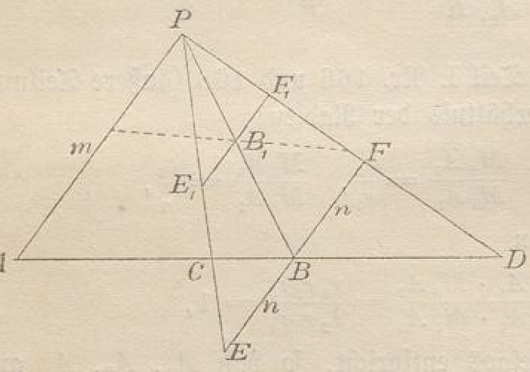
Ebenso ist der Beweis für die anderen Gruppen.

VI. Harmonische Punkte und Strahlen.

45) Wird eine Gerade AB im Verhältnis $m : n$ innerlich und äußerlich geteilt, so daß die Gleichung $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{BD}$ erfüllt ist, so nennt man diese Doppelteilung nach Teil I, Nr. 168 eine harmonische, die Punkte $ABCD$ heißen harmonische Punkte, und zwar sind A und B zugeordnete, ebenso C und D.

Bei der früher angegebenen Konstruktion war m beliebig von A aus gezogen, n parallel von B aus, sowohl gleich-, als auch entgegengesetztgerichtet, worauf die Endpunkte von m mit denen der beiden n verbunden wurden, was auf die Schnittpunkte C und D führte.

Fig. 32.



Ist $m = n$, so ist AB durch C halbiert, und D liegt in unendlicher Entfernung. Ist $m > n$, so liegt D rechts von AB, ist $m < n$, so liegt D links von AB. Wandert C von dem Halbierungspunkte der Geraden AB aus nach B, so wandert der Punkt D rechts von AB aus unendlicher Entfernung nach B. Wandert C von der Mitte nach A, so wandert D links von AB aus unendlicher Entfernung nach A. Für jede Lage von C existiert also eine und nur eine bestimmte Lage von D.

Aus $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{BD}$ folgt $\frac{DB}{BC} = \frac{DA}{CA}$, so daß die Teilung auch von rechts nach links gelesen eine harmonische ist, selbstverständlich aber mit einem anderen Teilungsverhältnis der Linie DC. Die zugeordneten Punkte C und D sind also gleichberechtigt mit A und B.

46) Legt man in Figur 32 durch einen beliebigen Punkt B_1 der Geraden PB (oder ihrer beiderseitigen Verlängerungen) eine

Parallele E_1F_1, so sind auf ihr aus Gründen der Ähnlichkeit ebenfalls gleiche Stücke E_1B_1 und B_1F_1 abgeschnitten. Jeder Strahl durch B_1 ist durch die Strahlen $P(ABCD)$, d. h. durch die Strahlen von P nach A, B, C und D harmonisch geteilt, denn die neue Figur entspricht ganz der Konstruktionsfigur für den vierten harmonischen Punkt. Durch Herumdrehen des durch B_1 gehenden Strahles um diesen Punkt kann man die Reihenfolge der neuen harmonischen Punkte beliebig ändern, nur bleibt die Zuordnung erhalten.

47) Das Gesagte gilt aber nicht nur für die von P aus nach den harmonischen Punkten A, B, C, D gehenden Strahlen, sondern auch für Strahlen, die von einem beliebigen Punkte P_1 der Ebene nach $ABCD$ gezogen werden. Bezeichnet man nämlich in der neuen Figur P_1A mit m_1 und zieht dazu eine Parallele E_2F_2 durch B, so muß $E_2B = BF_2 = n_1$ sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man zu A, B und C einen anderen vierten harmonischen Punkt D_1 konstruieren, indem man $BF_3 = n_1$ macht und P_1F_3 zieht. Dann wäre aber D gar nicht der vierte harmonische Punkt gewesen.

Strahlen, die von einem beliebigen Punkte aus nach vier harmonischen Punkten gezogen werden, nennt man harmonische Strahlen. Von ihnen gilt also, wie auch durch Rechnung gezeigt werden kann, Folgendes:

Zieht man zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele, so halbiert der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen zugeordneten liegende Stück der Parallelen.

(**Aufgabe.** Zu drei harmonischen Strahlen den vierten zu konstruieren. Die Auflösung ergiebt sich durch Halbierung bezw. Verdoppelung einer Parallelen.)

Jede Gerade wird durch harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten.

Parallel- und Centralprojektion harmonischer Punkte und Strahlen giebt stets wieder harmonische Punkte bezw. Strahlen.

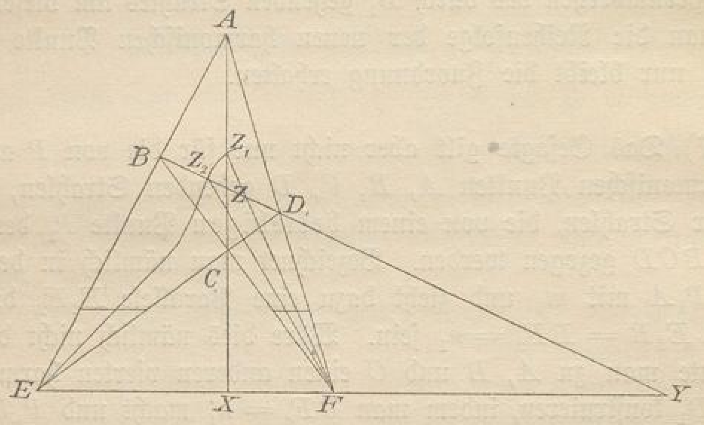
Daß durch Halbierung eines Winkels und seines Nebenwinkels harmonische Strahlen entstehen, folgt aus Nr. 169 in Teil I.

48) Satz vom vollständigen Vierseit: Die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind harmonisch geteilt.

Zweiter Beweis. $ABCDEF$ sei das vollständige Vierseit mit den Diagonalen AC, BD, EF, deren Schnittpunkte X, Y, Z sind.

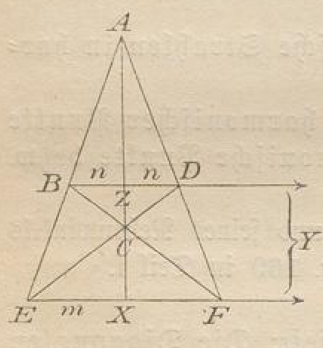
Man denke sich in E den vierten harmonischen Strahl konstruiert, der EF zugeordnet ist (z. B. durch Halbierung der Parallelen zu EF). Angenommen, dieser Strahl ginge nicht durch Z, sondern er schnitte die Diagonalen AC und BD in Z_1 bezw. Z_2, dann würden ACZ_1X

Fig. 33.



harmonische Punkte und $F(ACZ_1X)$ harmonische Strahlen sein, und zwar würde FZ_1 die Parallele zu EF halbieren. Aber auch BDZ_2Y würden harmonische Punkte und $F(BDZ_2Y)$ harmonische Strahlen sein, und auch FZ_2 würde die Parallele zu EF halbieren. Diese Parallele würde also in zwei getrennten Punkten halbiert sein. Da dies nicht möglich ist, müssen Z_1 und Z_2 zusammenfallen, d. h. $ACZX$ und $BDZY$ sind harmonische Punkte. Dasselbe gilt von $EFXY$, denn diese Punkte sind als Projektionen der Punkte $BDZY$ von A aus zu betrachten.

Fig. 34.

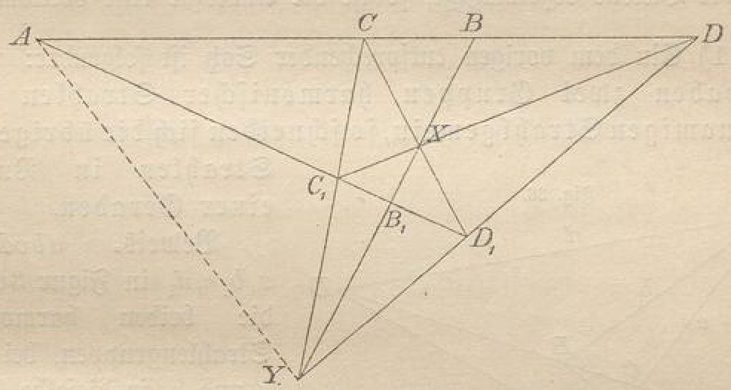


[49) **Dritter Beweis.** In Figur 34 ist $ABCDEF$ ein vollständiges Vierseit, welches symmetrisch gegen die Achse AX ist. BD und EX sind parallel und durch die Symmetrieachse halbiert. Bezeichnet man den unendlich fernen Schnittpunkt der Parallelen mit Y, so sind $BDZY$ und $EFXY$ nach Nr. 45 harmonische Punkte. Dasselbe gilt von $XZCA$, denn wenn $EX = m$, $BZ = ZD = n$ gesetzt wird, so ist die Gerade XZ in C und A innerlich und äußerlich im Verhältnis $m : n$ geteilt.

Durch Parallel- oder Centralprojektion kann man diese Figur auf eine beliebige Ebene übertragen, wobei die Symmetrie des vollständigen Vierseits im allgemeinen aufhört. Bei der letzteren Projektionsart hört auch der Parallelismus von BD und EF auf, so daß der Schnittpunkt Y ins Endliche fällt. Dann entsteht eine Figur nach Art von Figur 33. Bei der Projektion sind aber die drei harmonischen Punktgruppen harmonische Punkte geblieben. Demnach teilen sich die Diagonalen des vollständigen Vierseits harmonisch.]

50) **Satz.** Gehen von einem Punkte A zwei Gruppen harmonischer Punkte $ABCD$ und $AB_1C_1D_1$ aus, und verbindet man die gleichnamigen, so schneiden sich die Verbindungslinien in **einem** Punkte Y. Verbindet man die zugeordneten Punkte über Kreuz, so schneiden sich diese Verbindungslinien mit der dritten ebenfalls in **einem** Punkte X. Ist das Teilungsverhältnis bei der ersten Gruppe $m_1 : m_2$, bei der zweiten Gruppe $m_1 : m_3$, so ist die Verbindungslinie BB_1 im Verhältnis $m_2 : m_3$ harmonisch geteilt.

Fig. 35.



Beweis. In Figur 35 sind $ABCD$ und $AB_1C_1D_1$ die beiden von A ausgehenden harmonischen Punktgruppen. Die Verbindungslinien BB_1 und CC_1 schneiden sich in Y. Zieht man YD_1, so muß diese Gerade durch D gehen, weil sonst durch Projektion auf AD ein anderer harmonischer Punkt als D entstehen würde, was unmöglich ist. Also geht DD_1 auch durch Y.

Ebenso wird der Beweis mit CD_1, BB_1 und C_1D geführt.

Es handelt sich also in Figur 35 um ein vollständiges Vierseit $ACXC_1DD_1$, dessen Diagonale CC_1 durch AX und AY harmonisch geteilt ist, so daß auch BB_1 in X und Y harmonisch geteilt sein muß.

Um das Verhältnis der Teilung von BB_1 zu finden, fälle man von A, B und B_1 Lote e_1, e_2 und e_3 auf DY. Dann ist $\frac{AD}{BD} = \frac{e_1}{e_2}$ und $\frac{AD_1}{B_1 D_1} = \frac{e_1}{e_3}$, oder nach obiger Annahme der Verhältnisse $\frac{m_1}{m_2} = \frac{e_1}{e_2}$, $\frac{m_1}{m_3} = \frac{e_1}{e_3}$. Daraus folgt aber durch Division $\frac{m_3}{m_2} = \frac{e_3}{e_2}$. Da aber $\frac{BY}{B_1 Y} = \frac{e_2}{e_3}$ ist, so ist das Teilungsverhältnis von BB_1, wie behauptet war, $m_2 : m_3$.

[**Bemerkung.** Schlägt man um A, B und B_1 Kreise, deren Radien in folgenden Verhältnissen stehen:

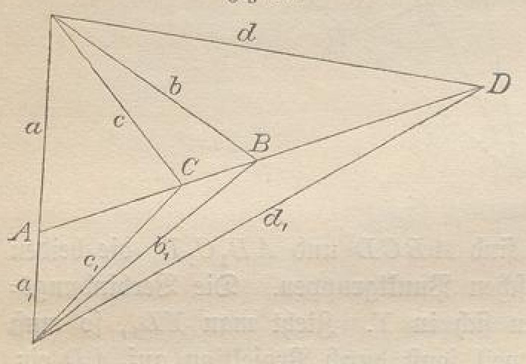
$$r_1 : r_2 = AC : CB = AD : BD; \; r_1 : r_3 = AC_1 : C_1 B_1 = AD_1 : B_1 D_1$$

so sind C und D, X und Y, C_1 und D_1 die Ähnlichkeitspunkte je zweier dieser Kreise. Der Satz, daß die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise in Gruppen zu dreien auf einer Geraden liegen, ist also eine unmittelbare Folge des Satzes vom vollständigen Vierseit. (Vgl. Fig. 31.) Statt der Kreise kann man auch ähnliche und ähnlich liegende Polygone, z. B. Dreiecke nehmen und ihre Ähnlichkeitspunkte untersuchen. Sind die Vielecke regelmäßige, so ist die Analogie eine vollkommene.]

51) Ein dem vorigen entsprechender Satz ist folgender:

Haben zwei Gruppen harmonischer Strahlen einen gleichnamigen Strahl gemein, so schneiden sich die übrigen drei Strahlen in Punkten einer Geraden.

Fig. 36.



Beweis. $abcd$ und $a_1 b_1 c_1 d_1$ in Figur 36 seien die beiden harmonischen Strahlengruppen, bei denen a und a_1 in dieselbe Gerade fallen, während b und b_1 sich in B, c und c_1 sich in C schneiden. Zieht man BC, was den Schnitt A giebt, so müssen sich die vierten Strahlen d und d_1 in einem Punkte D dieser Geraden schneiden, denn sonst würde der vierte harmonische Punkt zu A, B und C doppelt vorhanden sein.

Wie ist es mit dem Schnitte von c und d_1 und mit dem von c_1 und d?

52) Beide Sätze sind spezielle Fälle von folgenden allgemeineren, die in entsprechender Weise bewiesen werden:

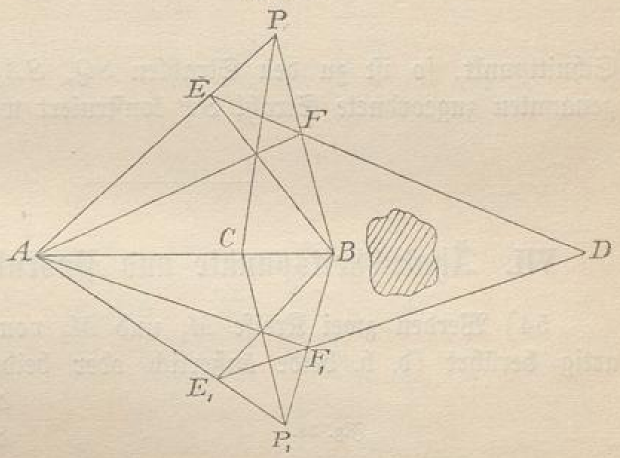
Gehen bei zwei Gruppen harmonischer Punkte die Verbindungslinien von drei gleichnamigen Paaren durch einen Punkt, so geht die vierte Verbindungslinie durch denselben Punkt.

Schneiden sich bei zwei Gruppen harmonischer Strahlen drei gleichnamige Paare in Punkten einer Geraden, so schneiden sich die vierten Strahlen in einem Punkte derselben Geraden.

53) **Aufgabe** a) Eine gegebene Gerade mit dem Lineal allein über ein Hindernis hinaus zu verlängern.

Auflösung. In Figur 37 sei AB die gegebene Gerade. Die schattierte Fläche sei das unübersteigliche Hindernis. Man nehme auf AB rechts von der Mitte einen beliebigen Punkt C an. Mit Hülfe des Lineals allein läßt sich über und unter der Linie die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ausführen, denn die Geraden EF und E_1F_1 schneiden sich in diesem. D ist demnach ein Punkt der gesuchten Verlängerung. Wiederholt man die Konstruktion mit einem zweiten Punkte C_1 auf AB, so findet man einen zweiten Punkt D_1, u. s. w. Die Konstruktion läßt sich noch vereinfachen. Inwiefern?

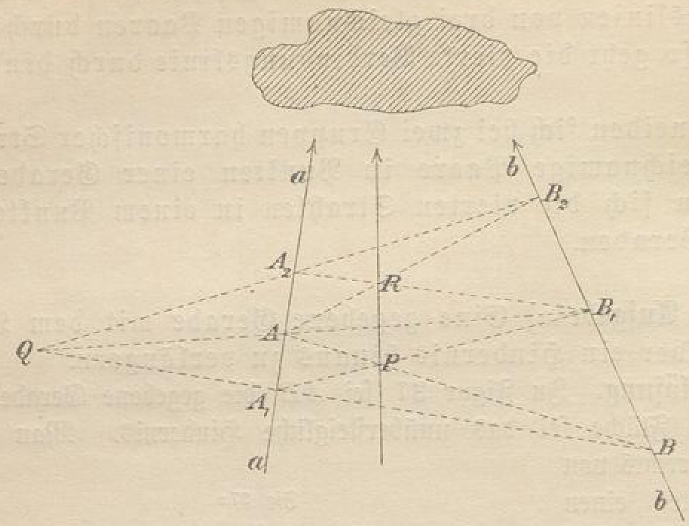
Fig. 37a.



Aufgabe b) Gegeben seien zwei Gerade a und b, deren Schnittpunkt jenseits eines unübersteiglichen Hindernisses liegt. Durch einen gegebenen Punkt P soll eine Gerade gelegt werden, die durch jenen unerreichbaren Schnittpunkt geht.

Auflösung. Zwei beliebige Strahlen durch P, z. B. AB und A_1B_1, geben durch die Verbindungslinien AB_1 und A_1B einen dem Punkte P entsprechenden Schnittpunkt Q. Die beliebige Gerade QA_2B_2 giebt mit Hülfe der Geraden A_2B_1 und AB_2 einen Schnittpunkt R. Jetzt ist PR die gesuchte Gerade. Ist nämlich S der unerreichbare

Fig. 37b.

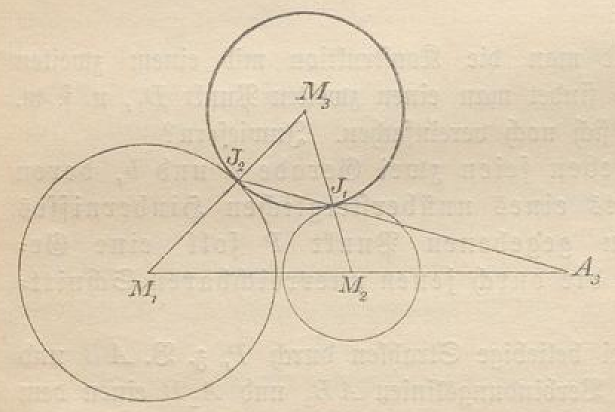


Schnittpunkt, so ist zu den Strahlen SQ, SA_1, SB der zum erstgenannten zugeordnete Strahl SP konstruiert worden.

VII. Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Lehrsatz.

54) Werden zwei Kreise M_1 und M_2 von einem dritten gleichartig berührt (d. h. beide äußerlich oder beide innerlich), so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt von M_1 und M_2. Bei ungleichartiger Berührung dagegen geht die Verbindungslinie durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Die Berührungspunkte sind nämlich bei äußerlicher Berührung innere, bei innerlicher Berührung äußere Ähnlichkeitspunkte, bilden also jedesmal mit A_3 bezw. J_3 eine gerade Linie.

Fig. 38.

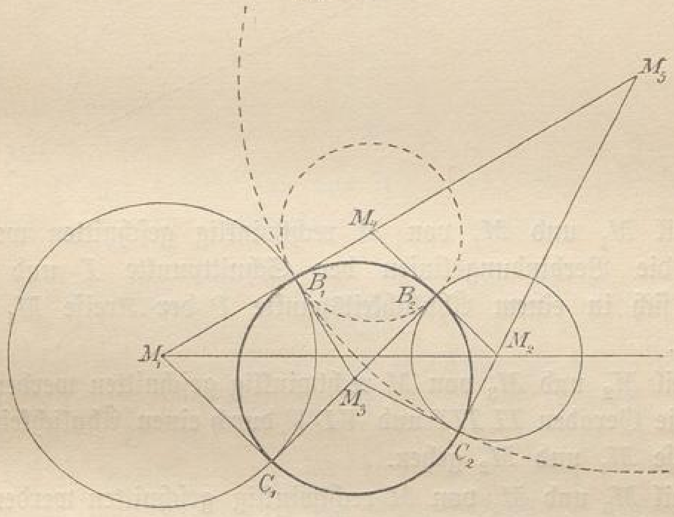


Aufgabe. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise gleichartig (bezw. ungleichartig) berührt, und zwar einen davon in einem gegebenen Punkte. (Auflösung einfach.)

55) **Satz.** Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig geschnitten, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte des ersten Kreises mit denen des zweiten durch die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

Beweis. In Figur 39 werden die Kreise M_1 und M_2 von dem Kreise M_3 in B_1, B_2, C_1, C_2 rechtwinklig geschnitten, so daß M_1B_1 und M_2B_2 Tangenten an M_3 sind, die sich in M_4 schneiden, wobei zugleich M_4B_1 und M_4B_2 als Tangenten an M_3 einander gleich sind. M_4 ist also Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 in B_1 und B_2 gleichartig berührt, so daß B_1B_2 durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A von M_1 und M_2 gehen muß.

Fig. 39.



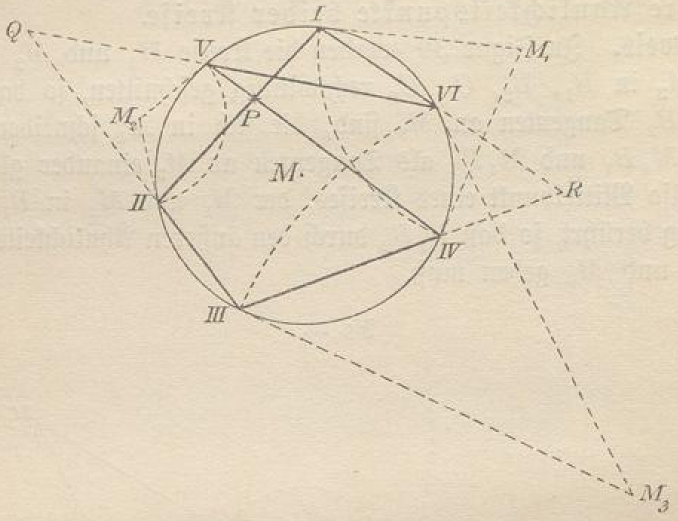
Ebenso schneiden sich M_1B_1 und M_2C_2 in M_5, letzterer Punkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 ungleichartig berührt, so daß die Gerade B_1C_2 durch J, den inneren Ähnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 gehen muß.

Ebenso geht C_1C_2 durch A und C_1B_2 durch J. — Die Berührungskreise entscheiden darüber, ob der Schnittpunkt der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt ist.

56) **Pascalscher Satz.** Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

Zweiter Beweis.*) In Figur 40 sei M der Kreis mit dem Sehnensechseck $I\,II\,III\,IV\,V\,VI$. Die Tangenten in den Gegenpunkten I und IV, II und V, III und VI geben die Mittelpunkte von Kreisen M_1, M_2 und M_3, die den Kreis M rechtwinklig schneiden.

Fig. 40.



Weil M_1 und M_2 von M rechtwinklig geschnitten werden, so müssen die Verbindungslinien der Schnittpunkte I und II, IV und V sich in einem Ähnlichkeitspunkte P der Kreise M_1 und M_2 schneiden.

Weil M_2 und M_3 von M rechtwinklig geschnitten werden, müssen ebenso die Geraden $II\,III$ und $VI\,V$ durch einen Ähnlichkeitspunkt Q der Kreise M_1 und M_2 gehen.

Weil M_3 und M_1 von M rechtwinklig geschnitten werden, müssen ebenso $I\,VI$ und $III\,IV$ durch einen Ähnlichkeitspunkt R der Kreise M_3 und M_1 gehen. Untersucht man die Ähnlichkeitspunkte P, Q, R nach Art der Fig. 39 mit Hülfe von Berührungskreisen, so ergiebt sich, daß es solche sind, die auf einer Geraden liegen.

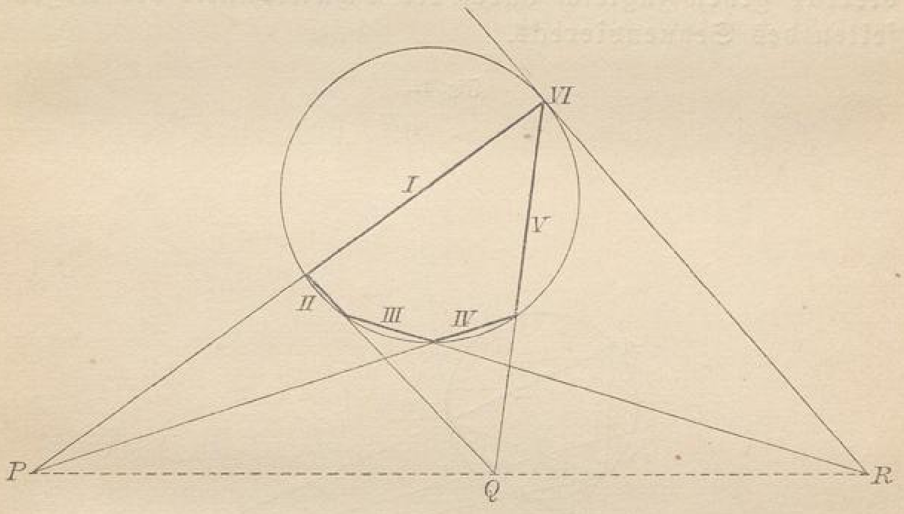
57) **Folgerung.** Nennt man die Seiten des Sehnenfünfecks I, II, III, IV, V, so kann man es als ein Sechseck mit unendlich kleiner Seite VI betrachten, deren Verlängerung eine Tangente des Kreises geben muß. Demnach schneiden sich die Fünfecksseiten I und IV,

*) Der erste Beweis findet sich auf S. 37.

II und *V* und außerdem die Seite *III* und die Tangente *VI* in Punkten *P*, *Q*, *R* einer Geraden. (Fig. 41.)

Aufgabe. Die Tangenten in den Ecken eines gegebenen Kreissehnenfünfecks mit dem Lineal allein zu konstruieren.

Fig. 41.



Die Auflösung ergiebt sich aus Figur 41. Bemerkenswert ist, daß der Kreis gar nicht vorhanden zu sein braucht.

58) **Folgerung.** In ähnlicher Art läßt sich das Sehnenviereck im Kreise als Sechseck betrachten, jedoch in mehrfacher Weise. In Figur 42 sei *ABCD* das Kreissehnenviereck. Betrachtet man *A* und *C* als Doppelpunkte, so ist es ein Sechseck, und die Seiten *AB* und *CD*, *BC* und *AD* und die Tangenten in *A* und *C* schneiden sich in Punkten *P*, *Q* und *R* einer Geraden.

Betrachtet man *B* und *D* als Doppelpunkte, so schneiden sich *AB* und *CD*, *BC* und *AD* und die Tangenten in *B* und *D* in Punkten *P*, *Q* und *S* einer Geraden.

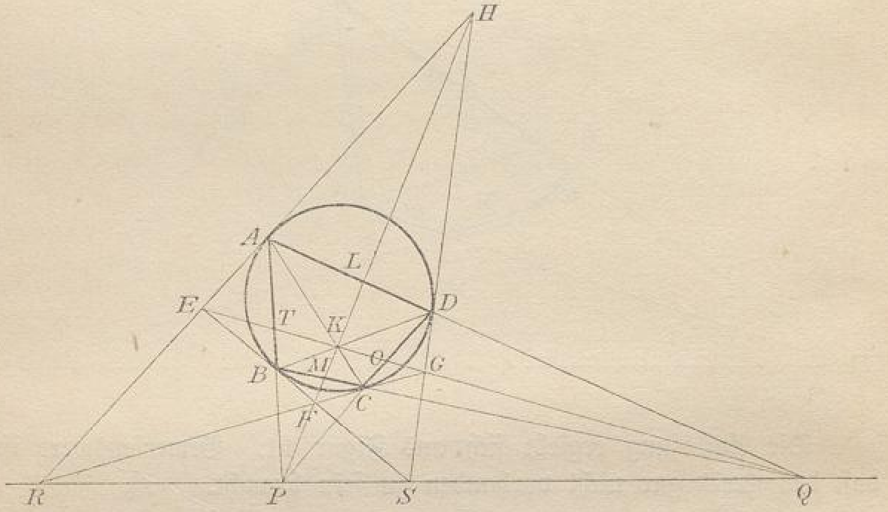
Denkt man sich das Viereck übers Kreuz gezeichnet, z. B. als *ACBD*, und betrachtet man *A* und *B* als Doppelpunkte, so schneiden sich die in *A* und *B* gezogenen Tangenten, die Geraden *AC* und *BD*, und die Geraden *AD* und *BC* in Punkten *EKQ* einer Geraden.

In demselben Viereck betrachte man *C* und *D* als Doppelpunkte, dann findet man ebenso, daß *KGQ* auf einer Geraden liegen.

Dieselbe Betrachtung am gekreuzten Viereck *ABDC* führt darauf, daß die Punkte *HKFP* einer Geraden angehören. Also gilt folgender Satz:

Satz. Die gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks im Kreise und des durch seine Ecken gelegten Tangentenvierecks schneiden sich paarweise in vier Punkten, die auf einer Geraden liegen. Die Diagonalen beider Vierecke schneiden sich sämtlich in einem Punkte, die des Tangentenvierecks gehen zugleich durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sehnenvierecks.

Fig. 42.



Bemerkung. Betrachtet man in Figur 42 $EFGH$ als vollständiges Vierseit mit den Ergänzungsecken R und S, so ergeben sich P, Q, R, S, ebenso E, G, K, Q und H, F, K, P als harmonische Punktgruppen. Durch Projektion von H bezw. F aus liegen auch auf AQ und BQ harmonische Punktgruppen. Entsprechende Betrachtungen für das Viereck $ABCD$ geben auch auf DP und AP harmonische Punkte. Demnach sind auch die Diagonalen beider Vierecke harmonische Strahlen.

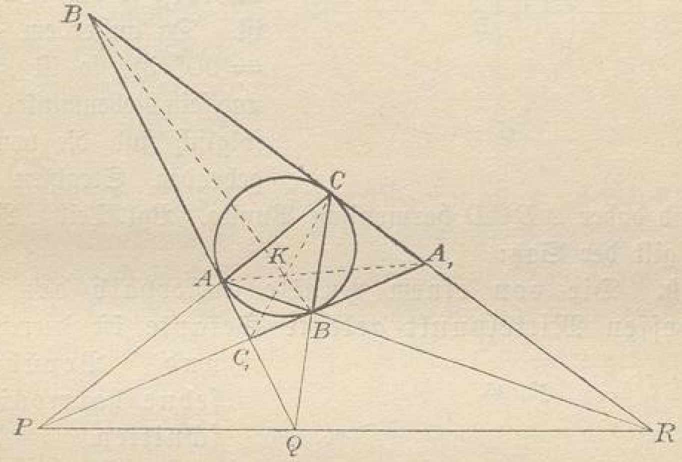
[Steht AC senkrecht auf BD, so ist das äußere Viereck ein bicentrisches, d. h. ein Tangentensehnenviereck. Hieraus ergeben sich für bicentrische Vierecke zahlreiche interessante Eigenschaften. Der Fall der Symmetrie ist besonders leicht zu behandeln.]

59) **Folgerung.** Betrachtet man die Ecken des Sehnendreiecks (Fig. 43) als Doppelpunkte, so schneidet sich nach dem Sechsecksatze jede Seite mit der Tangente des Gegenpunktes so, daß die Schnittpunkte P, Q, R auf einer Geraden liegen.

Da auch die Berührungstransversalen AA_1, BB_1 und CC_1 sich nach Nr. 38 in einem Punkte K schneiden, so ergiebt sich durch Projektion der Figur unter Weglassung des Kreises eine entsprechende, bei der jedoch nicht mehr der Um-Kreis von ABC zugleich der In-Kreis von A_1B_1C ist. Aus der neuen Figur aber erkennt man den

Satz: Zieht man in einem Dreieck von den Ecken aus Gerade durch einen Punkt bis zu den Gegenseiten, und verbindet man die Schnittpunkte auf den Gegenseiten mit einander, so schneiden die Seiten des neuen Dreiecks die entsprechenden des ursprünglichen in Punkten P, Q, R, die auf einer Geraden liegen.

Fig. 43.



Bemerkung. Der Beweis ergiebt sich ohne Projektion aus Folgendem: Betrachtet man $AKBC_1$ als vollständiges Vierseit, so sind B_1, A_1, C, R harmonische Punkte. Ebenso giebt das Vierseit A_1CKB die harmonischen Punkte B_1, C_1, A, Q. Von B_1 gehen also zwei Gruppen harmonischer Punkte aus, so daß die Geraden CA, A_1C_1 und RQ sich in demselben Punkte P schneiden müssen.

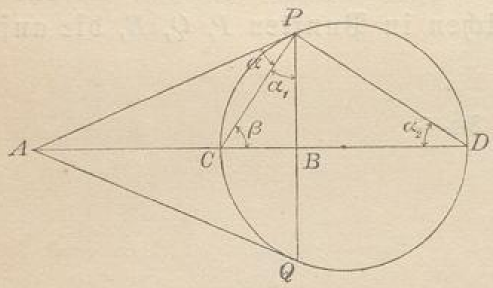
60) **Bemerkung.** Bezeichnet man jede Parallel- und Centralprojektion des Kreises als einen Kegelschnitt, so geht die Pascalsche Figur am Kreise durch die Projektion in die entsprechende Pascalsche Figur am Kegelschnitte über. Da die Geraden dabei Gerade bleiben, so gilt der Pascalsche Satz mit seinen Folgerungen von jedem Kegelschnitte.

VIII. Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise.

(Pol und Polare.)

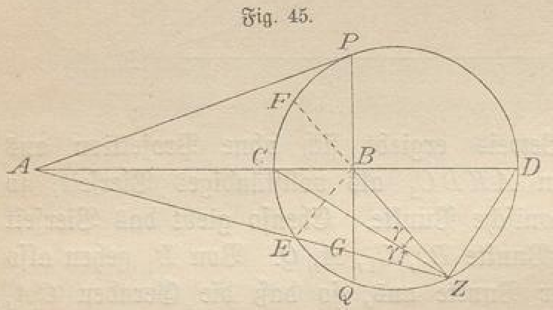
61) In Fig. 44 sind von A aus Tangenten AP und AQ an einen Kreis gezogen, so daß die Berührungssehne PQ senkrecht auf der durch den Mittelpunkt gelegten Sekante AD steht. Dabei ist, wenn man noch PC und PD zieht, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_2$ und $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_1$ (warum beides?), so daß $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ ist. Da außerdem $\sphericalangle CPD = 90^0$ ist, so ist $\sphericalangle APB$ und sein Nebenwinkel halbiert, folglich sind die von P ausgehenden Strahlen harmonische, und daher $ABCD$ harmonische Punkte. (Vgl. Teil I. Nr. 169.) Folglich gilt der Satz:

Fig. 44.



Satz. Die von einem Punkte außerhalb des Kreises durch dessen Mittelpunkt gelegte Sekante ist durch Kreis und Berührungssehne harmonisch geschnitten.

Fig. 45.



62) Verbindet man nun einen beliebigen Punkt Z der Peripherie mit den besprochenen Punkten $ABCD$, so sind $Z(ABCD)$ harmonische Strahlen. Weil aber die zugeordneten Strahlen CZ und DZ auf einander senkrecht stehen, so ist $\sphericalangle AZB$ halbiert, folglich $\frac{AZ}{BZ} = \frac{AC}{BC}$. Wo also auch der Punkt Z auf der Peripherie liege, stets ist das Verhältnis $\frac{AZ}{BZ}$ dasselbe. Bezeichnet man AZ jedesmal mit p, BZ mit q und das konstante Verhältnis mit c, so kann man abgekürzt sagen:

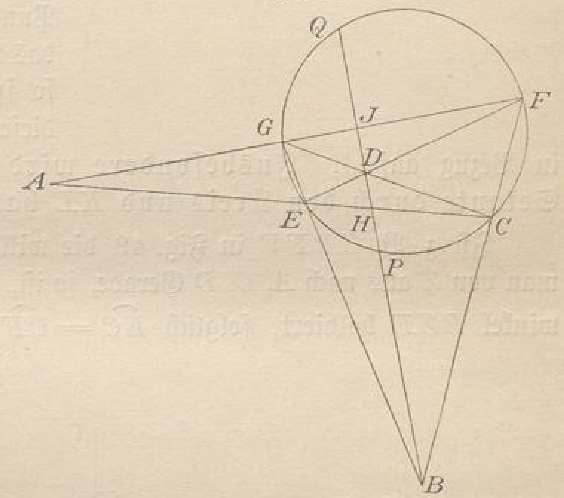
Der Kreis ist die Kurve konstanten Verhältnisses oder die Kurve $\frac{p}{q} = c$.

63) Aus $\gamma = \gamma_1$ folgt ferner $\widehat{EC} = \widehat{CF}$ (gleiche Peripheriewinkel, gleiche Bogen), also ist aus Gründen der Symmetrie gegen den Durchmesser $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CBE$. Da ferner $PQ \perp CD$, so sind die von B ausgehenden Strahlen harmonische, also $AGEZ$ harmonische Punkte. Folglich:

Satz. Jede durch A gehende Sekante wird durch die zu A gehörige Berührungssehne harmonisch geteilt.

64) Zieht man von A aus beliebige Sekanten AF und AC, die den Kreis in G und E schneiden, und verbindet man die Schnittpunkte auf alle Arten, so entsteht ein vollständiges Vierseit $BCDEFG$, dessen Diagonalen harmonisch geteilt sind. Demnach sind $AJGF$ und $AHEC$ harmonische Punkte. Folglich muß die Berührungssehne von A durch H und J gehen, d. h. BD ist zugleich die Berührungssehne PQ. Demnach gilt der

Fig. 46.



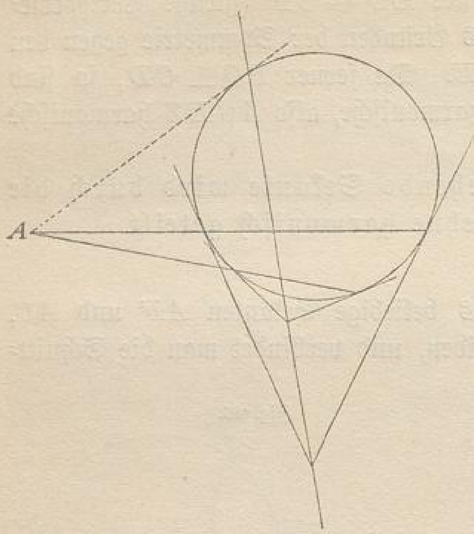
Satz. Zieht man von einem Punkte A außerhalb des Kreises zwei Sekanten, so schneiden sich die Verbindungslinien der Kreisschnittpunkte paarweise auf der Berührungssehne von A.

65) Legt man beide Sekanten unendlich nahe aneinander, so giebt das eine Paar von Verbindungslinien unendlich kurze Sehnen, deren Verlängerungen Tangenten sind. Auch diese müssen sich auf der Berührungssehne schneiden. Folglich:

Satz. Zieht man von einem Punkte A außerhalb des Kreises beliebig viele Sekanten, so liegen die Schnittpunkte aller zugehörigen Tangentenpaare auf einer geraden Linie, der Berührungssehne von A. (Fig. 47.)

Aufgabe. Von einem Punkte A außerhalb des Kreises an diesen mit dem Lineal allein Tangenten zu konstruieren.

Fig. 47.



Auflösung. Man ziehe zwei Sekanten AGF und AEC (Fig. 46). GC und EF geben einen Schnittpunkt D, GE und FC einen Schnittpunkt B. BD schneidet den Kreis in P und Q. AP und AQ sind die gesuchten Tangenten.

66) Sind in Fig. 48 $ABCD$ dieselben harmonischen Punkte wie vorher, und ist KL das Lot im Punkte A auf AD, so spielt KL in Bezug auf B dieselbe Rolle, wie vorher PQ in Bezug auf A. Insbesondere wird jede durch B gelegte Sekante durch den Kreis und KL harmonisch geteilt.

Ist z. B. $ZBFV$ in Fig. 49 die willkürliche Sekante, und zieht man von Z aus nach A, C, D Gerade, so ist, wie vorher, der Peripheriewinkel BZE halbiert, folglich $\widehat{EC} = \widehat{CF}$, folglich, wenn man AF

Fig. 48.

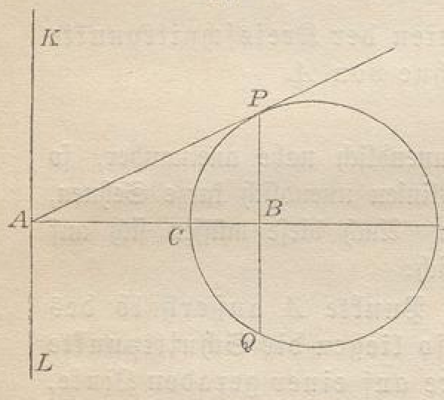
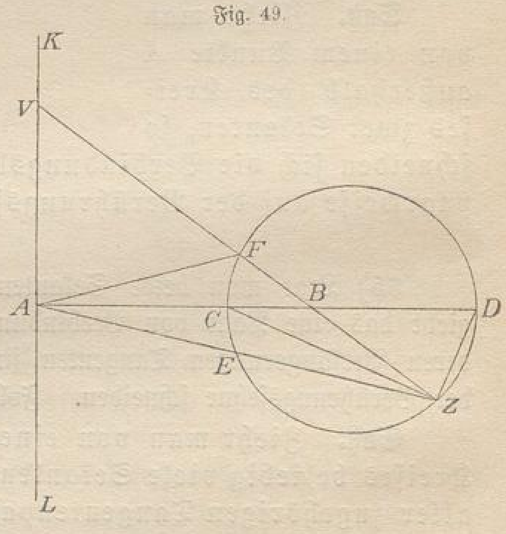


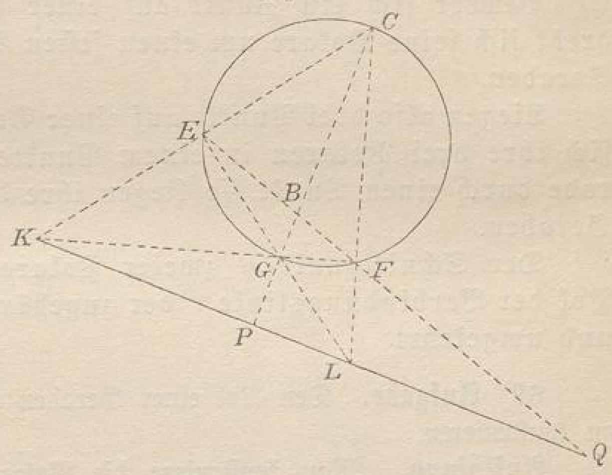
Fig. 49.



zieht, $\sphericalangle FAE$ aus Symmetriegründen halbiert. Da außerdem $KL \perp AD$, so sind die von A ausgehenden Strahlen harmonische, folglich auch $VBFZ$ harmonische Punkte.

67) Zieht man durch einen innerhalb des Kreises liegenden Punkt B zwei beliebige Sehnen, und verbindet man ihre Kreisschnittpunkte auf alle Arten, so erhält man Schnittpunkte K und L außerhalb des Kreises. Im vollständigen Vierseit $CEGFKL$ ist die Diagonale GC harmonisch geteilt, ebenso EF. Weil aber $CGBP$ und $EFBQ$ harmonische Punkte sind, so muß KL die Linie sein, die man erhält, wenn man auf dem durch B gelegten Durchmesser im vierten harmonischen Punkte A ein Lot errichtet.

Fig. 50.



Legt man die Sekanten durch B unendlich nahe aneinander, so erhält man, wie oben, in den Endpunkten Tangenten, die sich auf KL schneiden.

68) Nennt man nun einen Punkt P, mag derselbe innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, einen **Pol**, und bezeichnet man das auf dem durch P gehenden Durchmesser im zugeordneten harmonischen Punkte errichtete Lot als **Polare**, so kann man die obigen beiden Gruppen von Sätzen und Aufgaben einheitlich in folgende zusammenfassen:

Jede durch den Pol gehende Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

Zieht man durch den Pol zwei Sekanten, und verbindet man ihre Kreisschnittpunkte auf alle Arten, so schneiden sich die Verbindungslinien paarweise auf der Polare.

Darauf beruht die Konstruktion der Polare zu einem gegebenen Pol mit dem Lineal allein.

Zieht man durch den Pol beliebige Sekanten, so liegen die Schnittpunkte zusammengehöriger Tangenten auf der Polare.

Nun ist aber der Schnittpunkt jedes Tangentenpaares der Pol zur Berührungssehne desselben Paares, die nun als Polare zu betrachten ist. Folglich:

Dreht sich die Polare um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare des festen Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden.

Liegen also drei Punkte auf einer Geraden, so schneiden sich ihre drei Polaren in einem Punkte. Gehen drei Gerade durch einen Punkt, so liegen ihre drei Pole auf einer Geraden.

Der Schnittpunkt R zweier Polaren p und q ist der Pol der Verbindungslinie r der zugehörigen Pole P und Q, und umgekehrt.

69) **Aufgabe.** Den Pol einer Geraden mit dem Lineal allein zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere die Polaren p und q zu zwei beliebigen Punkten P und Q der Geraden. Der Schnitt von p und q ist der gesuchte Pol.

Zu jedem aus Punkten und Geraden bestehenden Gebilde kann man also mit Hülfe eines Kreises ein anderes Gebilde konstruieren, indem man zu jedem Punkte die zugehörige Polare, zu jeder Geraden den zugehörigen Pol bestimmt. Man nennt dieses neue Gebilde die Polarfigur des gegebenen Gebildes (oder auch die reciproke Figur).

[Da jedem Punkte außerhalb des Kreises eine den Kreis schneidende Polare entspricht, jedem innerhalb gelegenen eine den Kreis nicht schneidende Polare, so gilt als Zwischenfall der eines auf dem Kreise liegenden Punktes, dessen Polare den Kreis weder schneidet noch gar nicht trifft, d. h. die Tangente im Punkte selbst. Der Mittelpunkt des Kreises hat seine Polare in unendlicher Entfernung. (Eigentlich müßte man ihn als unendlich kleinen Kreis betrachten und ihm unendlich viele Polaren zuschreiben, die in unendlicher Entfernung liegen.) Ebenso hat jeder Durchmesser seinen Pol in unendlicher Entfernung, aber auf dem senkrecht auf dem ersteren stehenden Durchmesser.]

Aus den Eigenschaften jeder Figur kann man Schlüsse auf die Polarfigur ziehen. Aus gewissen Sätzen über Punkte auf einer Geraden kann man solche über Gerade durch einen Punkt (und umgekehrt) ableiten.

70) [Eine merkwürdige Beziehung ergiebt sich, wenn man zur Figur des vollständigen Vierseits mit seinen harmonischen Punkten und

Strahlen die reciproke Figur bildet. Den 9 Punkten *ABCDEFXYZ* in Fig. 51 entsprechen 9 Gerade *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *x*, *y*, *z* in Fig. 52; den Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 entsprechen Punkte *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII*, *VIII*. In der Urfigur sind 1, 4, 5, 7 harmonische Strahlen, in der Polarfigur entsprechen diesen die Punkte *I*, *IV*, *V*, *VII*, die harmonische sind, weil es sich um das Viereck *II VI III VIII* mit den Ergänzungsecken *I* und *IV* handelt.

Fig. 51.

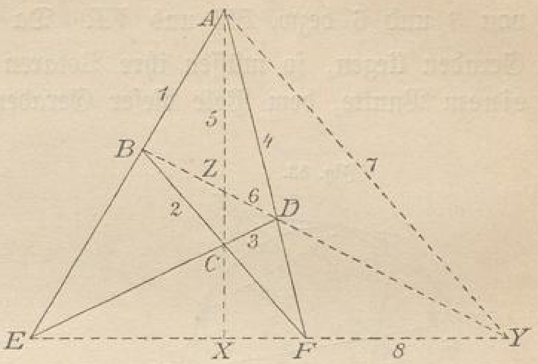
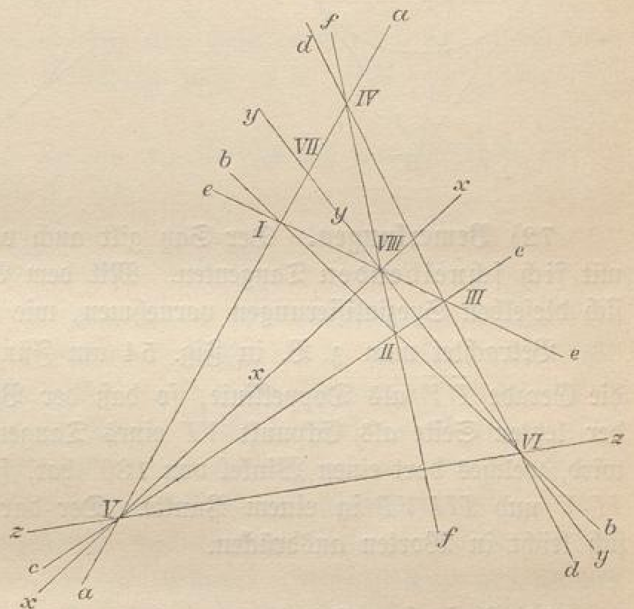


Fig. 52.



Folglich gilt ganz allgemein der Satz: Harmonischen Strahlen entsprechen in der Polarfigur stets harmonische Punkte; harmonischen Punkten der ersteren entsprechen harmonische Strahlen der anderen.]

71) **Satz des Brianchon.** Die Verbindungslinien der Gegenecken des Tangentensechsseits schneiden sich in **einem** Punkte.

Beweis. Die Polarfigur zu *I II III IV V VI* in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis (Fig. 53) ist das Sechseck der Berührungspunkte mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Gegenseiten 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 des letzteren schneiden sich nach Pascal in drei Punkten *P*, *Q* und *R*, die auf einer Geraden liegen. Dem Schnittpunkte von 1 und 4 entspricht aber als Polare die Verbindungslinie von I und IV, dasselbe gilt von 2 und 5 bezw. II und V, dasselbe von 3 und 6 bezw. III und VI. Da aber P, Q und R auf einer Geraden liegen, so müssen ihre Polaren $\overline{I\,IV}$, $\overline{II\,V}$, $\overline{III\,VI}$ sich in einem Punkte, dem Pole dieser Geraden, schneiden.

Fig. 53.

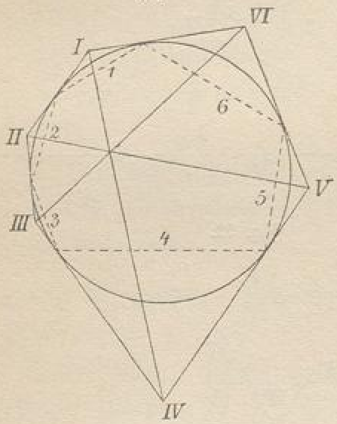
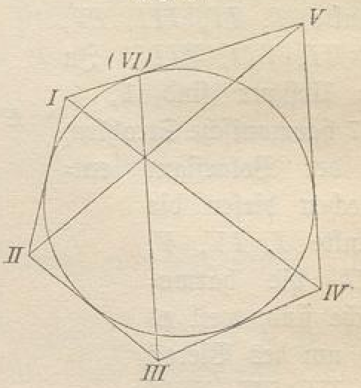


Fig. 54.



72) **Bemerkungen.** Der Satz gilt auch vom Tangentensechsseit mit sich schneidenden Tangenten. Mit dem Brianchon-Satze lassen sich dieselben Spezialisierungen vornehmen, wie mit dem Pascalschen.

Betrachtet man z. B. in Fig. 54 am Fünfseit $I\,II\,III\,IV\,V$ die Gerade $\overline{I\,V}$ als Doppellinie, so daß der Berührungspunkt (VI) der letzten Seite als Eckpunkt VI eines Tangentensechsecks betrachtet wird, welches dort einen Winkel von 180^0 hat, so schneiden sich $I\,IV$, $II\,V$ und $III\,VI$ in einem Punkte. Der darin liegende Satz läßt sich leicht in Worten ausdrücken.

73) **Aufgabe.** Bei einem gegebenen Kreistangentenfünfseit sollen die Berührungspunkte des nicht gezeichneten Kreises mit dem Lineal allein konstruiert werden.

Bemerkung. Sieht man das Tangentenvierseit und des Tangentendreiseit am Kreise als Spezialisierungen des Sechsseits an, so ergeben sich die früheren Figuren und Sätze, jedoch von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet.

Die außerordentliche Bedeutung der Lehre von den reciproken Polaren und des Pascalschen und Brianchonschen Satzes beruht darin, daß beide bei der Projektion erhalten bleiben, obwohl der Kreis dabei in einem Kegelschnitt übergeht. Daraus werden sich später anderweitige Sätze und eine Fülle von Konstruktionen ergeben.

74) **Bemerkung.** Aus der ersten Figur dieses Kapitels ergiebt sich noch eine merkwürdige Beziehung. In der Proportion

$$AC : CB = AD : BD$$

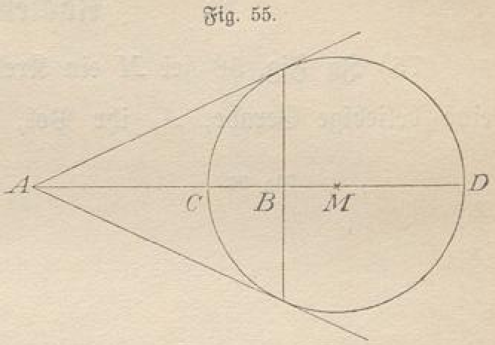
setze man

$$AC = AM - r,$$
$$AD = AM + r,$$
$$CB = r - BM,$$
$$BD = BM + r,$$

so daß man erhält:

$$(AM - r) : (r - BM) = (AM + r) : (BM + r).$$

Fig. 55.



Die Produkte der inneren und äußeren Glieder sind gleich, und aus der entsprechenden Gleichung folgt $AM \cdot BM = r^2$, oder auch $MA \cdot MB = r^2$.

Nimmt man den Radius des Kreises als Längeneinheit an, so hat man $MA \cdot MB = 1$, also

$$MA = \frac{1}{MB} \quad \text{und} \quad MB = \frac{1}{MA}.$$

Jedem Punkte A außerhalb des Kreises entspricht also ein innerhalb des Kreises gelegener B, dessen „Radius" den umgekehrten Wert hat, und umgekehrt entspricht jedem inneren Punkte ein äußerer nach demselben Gesetze. Der zweite Punkt liegt jedesmal auf der Polare des ersten und auf dem zugehörigen Durchmesser. Er ist also leicht zu konstruieren.

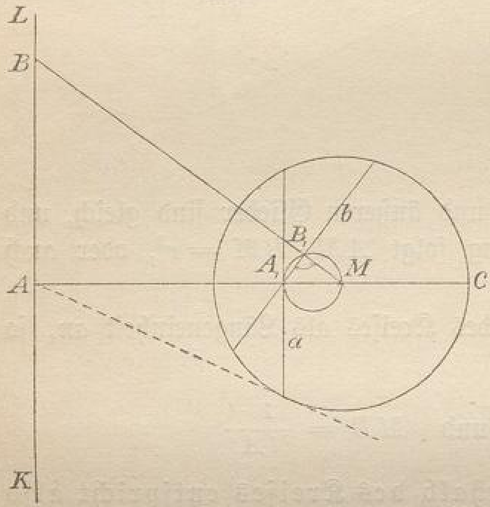
Dieses Abbildungsprinzip bezeichnet man als die Abbildung oder Spiegelung mittels reciproker Radien. Es trägt auch den Namen der Inversion. Den Mittelpunkt des spiegelnden Kreises nennt man das Centrum der Inversion. Einige Sätze darüber sollen in Folgendem*) abgeleitet werden.

*) Kapitel IX und X und die sich anschließenden Berührungsaufgaben und kartographischen Betrachtungen können am Gymnasium selbstverständlich überschlagen werden. Es handelt sich aber dabei um einen Übungsstoff so anregender Art, daß der Versuch, durch ihn eine Reihe veralteter und geisttötender Konstruktionsaufgaben zu ersetzen, dringend anzuraten ist, besonders auch im Hinblick auf die mathematische Geographie und Kartographie.

IX. Die Inversion oder Spiegelung*) mittels reciproker Radien.

75) In Fig. 56 sei M ein Kreis mit Radius $MC = 1$, KL eine beliebige Gerade, A_1 ihr Pol, also nach 74) $MA_1 = \frac{1}{MA}$. Die Polare b jedes Punktes B auf der Geraden geht durch A_1. Dabei ist $b \perp BM$, folglich liegt B_1, das reciproke Bild von B, auf einem Kreise, der MA_1 zum Durchmesser hat. Der unendlich ferne Bereich der Geraden KL entspricht dem Punkte M, denn $\frac{1}{\infty} = 0$. Also:

Fig. 56.



Das reciproke Bild jeder Geraden in Bezug auf einen Kreis ist ein Kreis, der durch den Mittelpunkt M des spiegelnden Kreises und den Pol A_1 der Geraden geht und die Verbindungslinie A_1M zum Durchmesser hat.

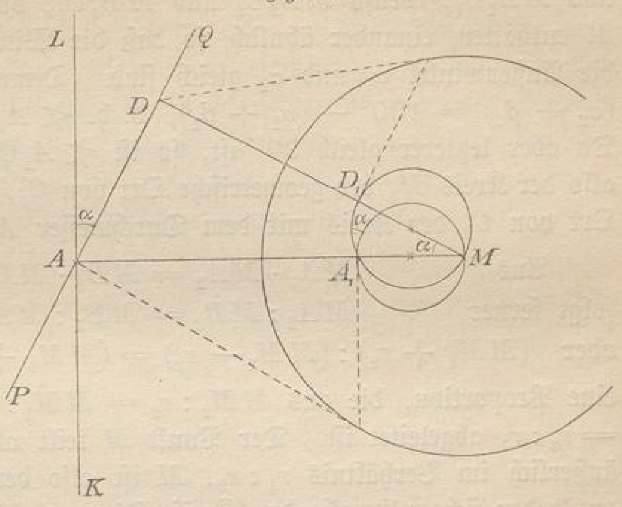
Liegt die Gerade ganz außerhalb des spiegelnden Kreises, so liegt das Inversionsbild ganz innerhalb desselben. Schneidet sie den Kreis, so geht der entsprechende Kreis durch dieselben Schnittpunkte. Berührt die Gerade den spiegelnden Kreis, so berührt der Bildkreis in demselben Punkte. Geht die Gerade durch M, so entspricht sie sich selbst, so daß der innere Teil das Bild des äußeren ist.

76) Schneiden sich in A zwei Gerade KL und PQ unter einem Winkel α, so entsprechen ihnen bei dieser Abbildung zwei Kreise durch A_1 und M, die sich dort unter demselben Winkel α schneiden,

---

*) Der Name **Spiegelung** empfiehlt sich aus physikalischen Gründen. Man vergleiche die isothermische Spiegelung und die Methode der elektrischen Bilder. Mit der optischen Spiegelung hat allerdings die reciproke Spiegelung nichts zu thun, sie entspricht aber ganz der optischen Spiegelung gegen die Gerade, was sich sofort zeigen wird. Man sagt statt Inversion auch **umgekehrte Abbildung**.

Fig. 57.



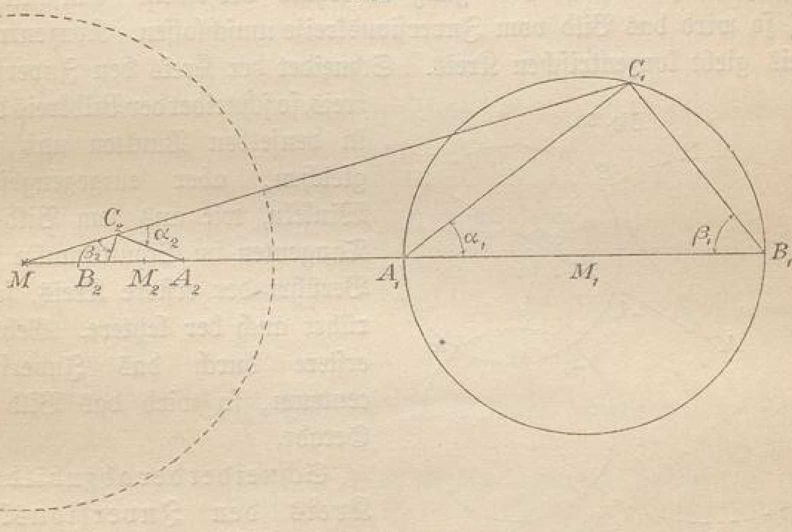
weil auch ihre Durchmesser bei M diesen Winkel bilden. Weil die Winkel der Geraden durch A und die der entsprechenden Kreise durch A_1 gleich sind, nennt man diese Art von Abbildung eine winkeltreue (isogonale).

Dem Strahlenbüschel durch A entspricht das Kreisbüschel durch A_1 und M. Die sich entsprechenden Winkel stimmen überein.

77) **Aufgabe.** Was entspricht bei der reciproken Spiegelung einem beliebigen Kreise der Ebene?

Auflösung. In Fig. 58 sei M der spiegelnde Kreis mit Radius 1, M_1 der gespiegelte mit Radius r_1. Man ziehe die Centrale MM_1

Fig. 58.



bis B_1 und durch M die beliebige Sekante MC_1, worauf man C_1 mit A_1 und B_1 verbinde. Man bilde die reciproken Bilder A_2, B_2, C_2 von A_1, B_1 und C_1 und verbinde C_2 mit A_2 und B_2. Da $MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2 = MC_1 \cdot MC_2 = 1$ ist, so sind die Dreiecke MA_2C_2

und MA_1C_1, ebenso MB_2C_2 und MB_1C_1, die sämtlich den Winkel M enthalten, einander ähnlich, so daß die Winkel β_1 und β_2, ebenso die Außenwinkel α_1 und α_2 gleich sind. Demnach ist auch $180^0 - (\alpha_2 + \beta_2) = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$, d. h. $\sphericalangle A_2C_2B_2 = \sphericalangle A_1C_1B_1$. Da aber letzterer gleich 90^0 ist, so ist $\sphericalangle A_2C_2B_2$ ein Rechter. Ist also der Kreis M_1 der geometrische Ort von C_1, so ist der geometrische Ort von C_2 der Kreis mit dem Durchmesser A_2B_2.

Aus $\quad MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2$

folgt ferner $\quad MA_2 : MB_2 = MB_1 : MA_1$,

oder $\quad (MM_2 + r_2) : (MM_2 - r_2) = (MM_1 + r_1) : (MM_1 - r_1)$,

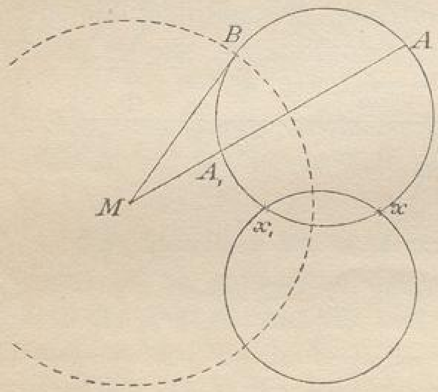
eine Proportion, die aus $MM_2 : r_2 = MM_1 : r_1$ oder $MM_2 : MM_1 = r_2 : r_1$ abgeleitet ist. Der Punkt M teilt also die Gerade M_1M_2 äußerlich im Verhältnis $r_1 : r_2$, M ist also der äußere Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise M_1 und M_2. Folglich:

Jeder Kreis geht durch Inversion in einen anderen Kreis über, und zwar ist das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise.

Dies folgt auch ohne Rechnung aus der perspektivischen Lage der einander entsprechenden Punkte.

78) Liegt der abzubildende Kreis ganz außerhalb des Inversionskreises, so fällt sein Bild ganz innerhalb desselben. Umschließt er ihn, so wird das Bild vom Inversionskreise umschlossen. Konzentrischer Kreis giebt konzentrischen Kreis. Schneidet der Kreis den Inversionskreis, so schneidet der Bildkreis diesen in denselben Punkten und unter gleichen, aber entgegengesetzten Winkeln, wie aus dem Bilde der Tangenten im Schnittpunkte folgt. Berührt der erstere Kreis, so berührt auch der letztere. Geht der erstere durch das Inversionscentrum, so wird das Bild eine Gerade.

Fig. 59.

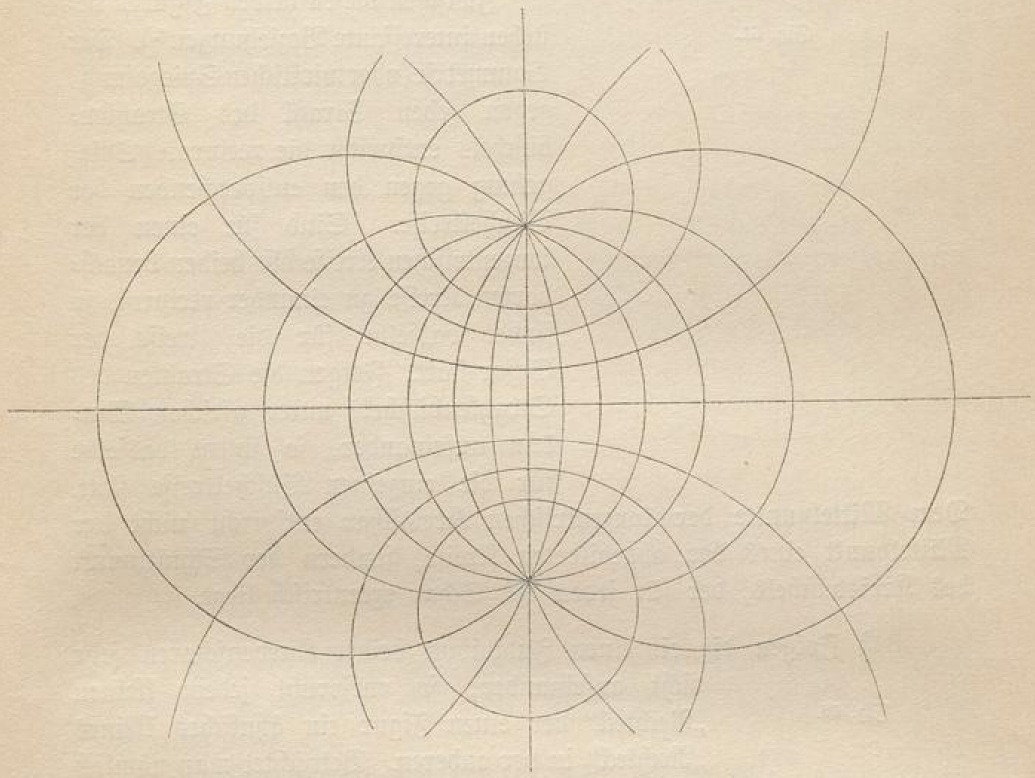


Schneidet der abzubildende Kreis den Inversionskreis rechtwinklig (orthogonal), so entspricht der erstere sich selbst. In Fig. 59 ist nämlich für die beliebige Sekante MA $\; MA_1 = \frac{1}{MA}$, da $MA_1 \cdot MA = MB^2 = 1^2 = 1$ ist. Beide Kreise können ihre Rolle vertauschen. Jeder

Durchmesser des einen ist infolge der Polarenbeziehung durch den anderen harmonisch geteilt. — Wird der Inversionskreis M von zwei anderen rechtwinklig geschnitten, und schneiden sich diese beiden in einem Punkte X, so schneiden sie sich auch in dem zu A reciproken Punkte X_1. Alle Kreise durch X und X_1 schneiden den Inversionskreis rechtwinklig. Die Tangenten von M an die Kreise durch X und X_1 sind also sämtlich von gleicher Länge.

79) Werden zwei sich schneidende Kreise durch einen Inversionskreis abgebildet, so schneiden sich die Bildkreise unter demselben Winkel,

Fig. 60.



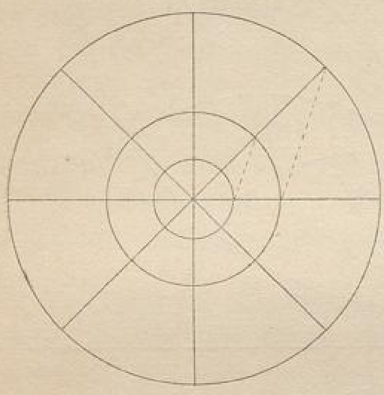
denn die Bilder der Tangenten im Schnittpunkte behalten den Winkel bei. Folglich:

Hat man ein Kreisbüschel durch zwei Punkte und die zugehörige orthogonale Kreisschar, und macht man irgend einen der Büschelkreise zum Inversionskreise, so geht jeder Büschelkreis in den Büschelkreis über, der den Inversionskreis unter dem entgegengesetzten Winkel schneidet, und jeder Kreis der Schar geht in sich selbst über. In diesem

Sinne ist die Gesamtfigur zu sich selbst reciprok. Macht man einen der Kreise der Schar zum Inversionscentrum, so entspricht jeder Büschelkreis sich selbst, und jeder Kreis der Schar geht in einen anderen der Schar so über, daß das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt für je zwei sich entsprechende Kreise ist.

80) Macht man einen der Büschelpunkte zum Inversionscentrum, so geht durch reciproke Spiegelung das Kreisbüschel nebst der zugehörigen Kreisschar in ein Strahlenbüschel mit der zugehörigen konzentrischen Kreisschar über. Zwischen diesen beiden Figuren bestehen interessante Beziehungen*). Der Symmetrie (oder wirklichen Spiegelung) gegen jeden Strahl des Strahlenbüschels entspricht die reciproke Spiegelung gegen den entsprechenden der Büschelkreise. Sind für einen der konzentrischen Kreise die beiden benachbarten Kreise zu einander reciprok, so findet dasselbe für die Kreise der Schar statt. Folgen die Strahlen des Strahlenbüschels unter gleichen Winkeln aufeinander, so findet dasselbe für die einzelnen Büschelkreise statt.

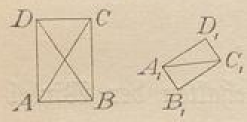
Fig. 61.



Dem Mittelpunkte der konzentrischen Kreisschar entspricht nicht der Mittelpunkt eines der abgebildeten Kreise, sondern der Schnittpunkt des Kreisbüschels, der für jeden der Schar excentrisch liegt.

81) Folgen die einzelnen Individua beider Kurvenscharen sehr dicht aufeinander, so entspricht jedem kleinen „Rechteck" der einen Figur ein ähnliches kleines „Rechteck" in der anderen. Betrachtet man nämlich die Begrenzungen der kleinen Rechtecke und ihre Diagonalen als gerade Linien, so sind wegen der Winkeltreue die kleinen Dreiecke, also auch die Rechtecke, ähnliche Figuren. Sind die kleinen Rechtecke der Fig. 61

Fig. 62.



*) Fig. 60 ist auch in Bezug auf physikalische Verhältnisse von Wichtigkeit, z. B. läßt man in einem der Büschelpunkte einen elektrischen Strom in eine große Metallplatte eintreten, im anderen austreten, so geben die Büschelkreise die Stromlinien an, während jeder der anderen Kreise die Punkte gleicher elektrischer Spannung angiebt.

unter einander ähnlich, so gilt es auch von Fig. 60. Darf man sie z. B. in der einen als kleine Quadrate*) betrachten, so ist dies auch in der anderen der Fall. [Beide Zeichnungen sind also in den kleinsten Teilen ähnlich, während bei größeren Teilen die Ähnlichkeit aufhört. Diese „Konformität" ist eine Folge der Winkeltreue.]

82) Auch anderen Kreisen der Fig. 60 entsprechen Kreise der Fig. 61. Zeichnet man z. B. zwischen zwei konzentrischen Kreisen der Fig. 63a eine Reihe von Berührungskreisen, so liegen ihre gegenseitigen Berührungspunkte auf einem Kreise, der der Inversionskreis für die gesamte neue Figur ist. Macht man also dasselbe bei zwei nichtkonzentrischen Kreisen der Fig. 63b, so liegen auch jetzt die Berührungspunkte auf dem Inversionskreise. Dem Tangentenbüschel

Fig. 63a.

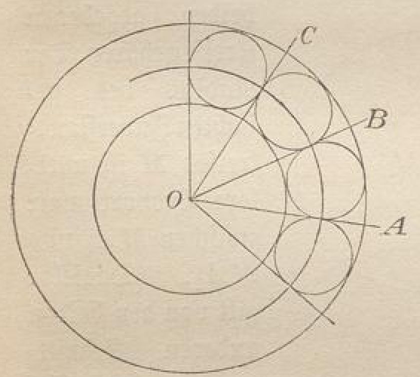
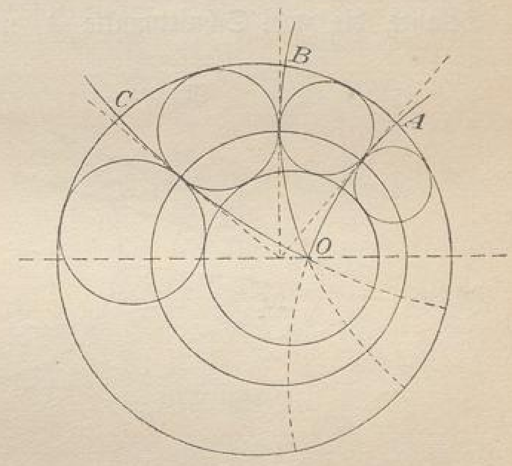


Fig. 63b.



in Fig. 63a entspricht das berührende Kreisbüschel in Fig. 63b, den konstanten Winkeln des einen entsprechen konstante Winkel beim

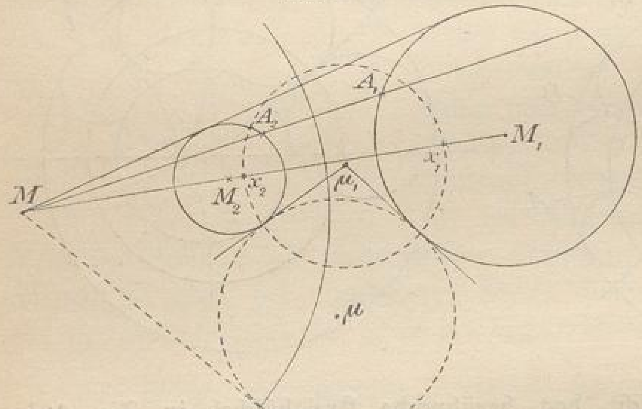
*) Folgen die Strahlen in Fig. 61 unter dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ aufeinander, so darf man die kleinen Rechtecke als Quadrate betrachten, sobald die Radien benachbarter konzentrischer Kreise im Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{n}}$ stehen, wo $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Ist dieses Verhältnis berechnet und ein einziges Mal konstruiert, so ergiebt sich das gesamte Netz von Quadraten durch einfache Ähnlichkeitskonstruktion, denn jeder Radius ist die mittlere Proportionale zwischen zwei benachbarten. Den elementaren Beweis für diese wichtige Beziehung, die den Zusammenhang zwischen der Mercatorkarte und der Polarkarte nach Hipparch-Ptolemäus ergiebt, findet man anhangsweise am Schlusse des Buches.

anderen. (Auch die gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch einen Punkt, ohne jedoch gleiche Winkel zu bilden.) Schließt in Fig. 63a die gezeichnete Kreisreihe nach einem Umgange, so schließt sie jedesmal, wenn man auch anders anfängt. Dasselbe gilt auch von der nichtkonzentrischen Fig. 63b, was auf anderem Wege nur schwer zu beweisen ist. Jeder andere Kreis der Schar, der die Kreisreihe schneidet, schneidet sämtliche Berührungskreise unter konstantem Winkel. (Die entsprechenden Sätze über die Berührungskreise zwischen zwei Büschelkreisen werden dem Schüler überlassen.)

83) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen denjenigen Inversionskreis zu finden, der den einen in den anderen verwandelt.

Auflösung. Man suche zu den beiden Kreisen M_1 und M_2 den äußeren Ähnlichkeitspunkt M. Durch M lege man eine beliebige Sekante, die zwei Schnittpunkte A_1 und A_2 giebt, welche nicht zu parallelen Radien der beiden gegebenen Kreise gehören. Der Radius des gesuchten Inversionskreises M ist mittlere Proportionale zwischen MA_1 und MA_2. (Dasselbe gilt von den beiden anderen Schnittpunkten der Sekanten.)

Fig. 64.



Bemerkung. Der Inversionsradius ist zugleich die Länge der Tangente von M aus an jeden Kreis μ, der die beiden gegebenen gleichartig berührt; ebenso an jeden Kreis μ_1, der die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet.

84) **Aufgabe.** Zu zwei sich schneidenden Kreisen den Inversionskreis zu konstruieren, der den einen in den anderen verwandelt.

Auflösung. Man konstruiere denjenigen durch die beiden Schnittpunkte gehenden Kreis, der den dortigen äußeren Schnittwinkel halbiert. Oder:

Man schlage um den äußeren Ähnlichkeitspunkt beider den durch die Schnittpunkte gehenden Kreis.

Bemerkung. Hat man einen Kreis in einen anderen verwandelt, so entspricht das Innere des einen entweder dem Inneren oder dem Äußeren des anderen. Macht man ihn selbst zu einem neuen Inversionscentrum, so verwandelt sich sein Inneres in sein Äußeres, und die vorigen Beziehungen wechseln.

85) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen einen Inversionskreis zu finden, der beide in konzentrische Kreise verwandelt.

Auflösung. Man ziehe durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt eine Sekante, die in Punkten A_1 und A_2 schneidet, die nicht zu parallelen Radien gehören. Die Tangenten in diesen Punkten geben nach 55) den Radius eines rechtwinklig schneidenden Kreises. Dieser schneidet die Centrale in den Büschelpunkten X_1 und X_2 des orthogonalen Kreisbüschels. Macht man einen dieser Punkte zum Inversionscentrum, so entstehen aus den beiden gegebenen Kreisen konzentrische Kreise, denn das Kreisbüschel durch X_1 und X_2 geht in ein Strahlenbüschel über.

86) **Bemerkung.** Die besprochene Inversion beruhte auf der Beziehung $AX_1 \cdot AX_2 = 1$. Man kann auch $AX_1 \cdot AX_2 = -1$ setzen, dann liegen X_1 und X_2 auf verschiedenen Seiten von A. Daraus ergeben sich entsprechende Kreisbeziehungen, wie vorher, jedoch tritt stets der innere Ähnlichkeitspunkt an Stelle des äußeren. Wesentlich neues ergiebt sich dabei nicht. Es handelt sich nur um die frühere Inversion verbunden mit Umklappungen um zwei aufeinander senkrechte, durch das Inversionscentrum gehende Achsen, so daß man die Operation als die negative Inversion bezeichnen kann. (Jede Strecke der Inversionszeichnung wird in die entgegengesetzte verwandelt.)

X. Potenz und Potenzlinien.

87) Liegt ein Punkt P außerhalb des Kreises, so ist für jede von ihm ausgehende Sekante $PA \cdot PB = t^2$, also eine konstante positive Größe, nämlich das Quadrat der von P aus gezogenen Tangente (Fig. 65).

Liegt er dagegen innerhalb, so ist für jede durch ihn gehende Sehne $PA \cdot PB = -s^2$, wo s die Hälfte der kleinsten durch P gehenden Sehne ist (die durch P halbiert wird). Das negative Zeichen ist deshalb genommen, weil PA und PB Strecken von entgegengesetzter Richtung sind, während beide im vorigen Falle gleichgerichtet

Fig. 65.

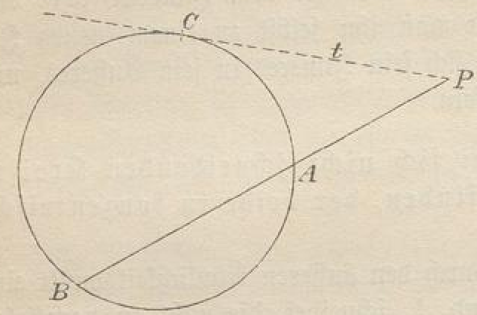
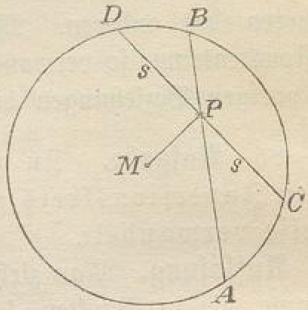


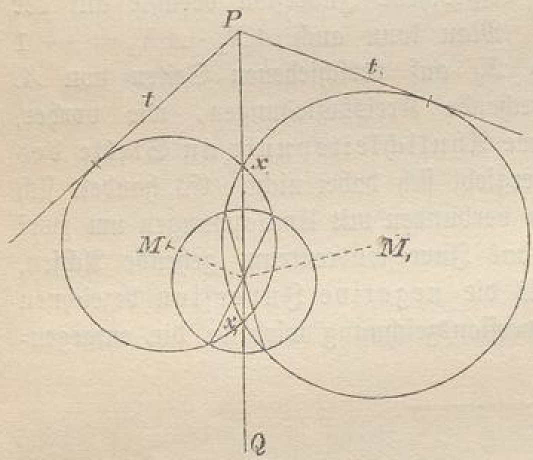
Fig. 66.



waren. Also auch jetzt ist $PA \cdot PB$ konstant, aber gleich einer gewissen negativen Größe (Fig. 66).

In beiden Fällen bezeichnet man das genannte Produkt als die **Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis.** Die Punkte mit positiver Potenz liegen also außerhalb, die mit negativer innerhalb des Kreises, die von der Potenz Null auf ihm. Die Punkte gleicher Potenz liegen auf einem konzentrischen Kreise.

Fig. 67.



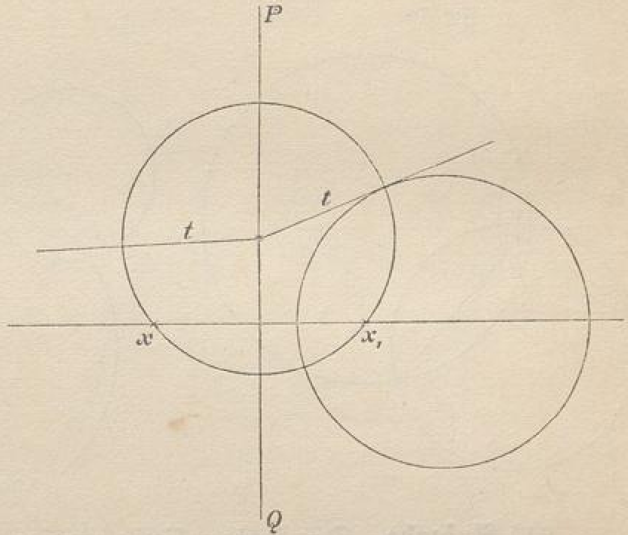
88) Ist PQ die gemeinschaftliche Sekante zweier Kreise, so gilt $PX \cdot PX_1 = t^2$ für beide Kreise, d. h. die zugehörigen Tangenten sind gleich, und P hat in Bezug auf beide Kreise und das gesamte Kreisbüschel durch X und X_1 dieselbe Potenz t^2. Dies gilt für jeden äußeren Punkt der Sekante.

Für jeden inneren Punkt der Sekante ist $PX \cdot PX_1 = - s^2$, d. h. die kürzeste Sehne durch einen inneren Punkt der Sekante hat in beiden Kreisen und in allen des Büschels dieselbe Länge. (Die Endpunkte der kürzesten Sehnen durch P_1 liegen auf einem Kreise.)

Man nennt daher die gemeinschaftliche Sekante die **Potenzlinie** des Kreisbüschels durch X und X_1.

89) Schneiden sich zwei Kreise nicht, so haben sämtliche Kreise, die beide zugleich rechtwinklig schneiden, nach Nr. 79 auf der Centrale die für beide Kreise reciproken Büschelpunkte X und X_1. Da die Mittelpunkte des Büschels auf dem Mittellote von X und X_1 liegen, so sind die Tangenten von jedem Punkte dieses Lotes aus nach beiden Kreisen gleich. Demnach ist dieses Lot PQ die Potenzlinie der beiden sich nicht schneidenden Kreise und für die ganze Kreisschar, die das Büschel orthogonal schneidet.

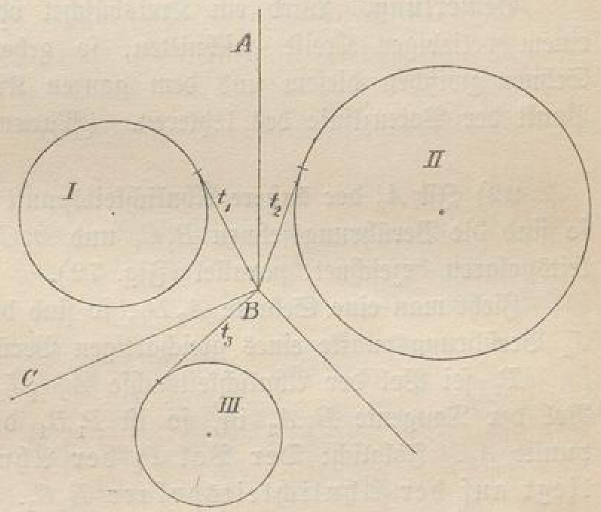
Fig. 68.



Die Potenzlinien zweier orthogonaler Kreisscharen stehen also aufeinander senkrecht, und die der einen Schar ist die Centrale der anderen.

Berühren sich zwei Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte die Potenzlinie.

Fig. 69.



90) **Satz.** Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. In Fig. 69 sei AB Potenzlinie für die Kreise I und II, CB für die Kreise I und III, also $t_1 = t_2$ und $t_1 = t_3$. Daraus folgt $t_2 = t_3$, folglich ist B auch ein Punkt der Potenzlinie von II und III.

Ebenso ist der Beweis bei Kreisen, die so liegen, daß jener Schnittpunkt B ins Innere fällt (Fig. 70), nur sind dann statt der gleichen Tangenten gleiche kürzeste Sehnen zu nehmen. Der Schnittpunkt heißt in beiden Fällen Potenzcentrum.

Fig. 70.

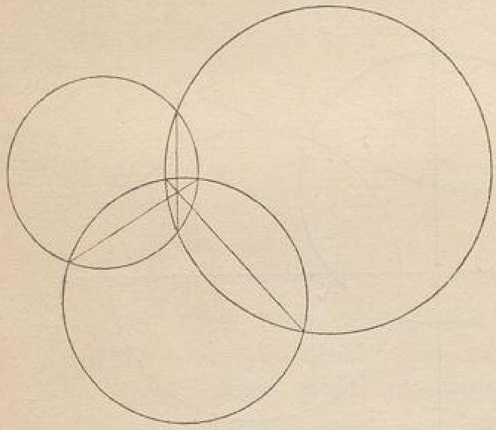
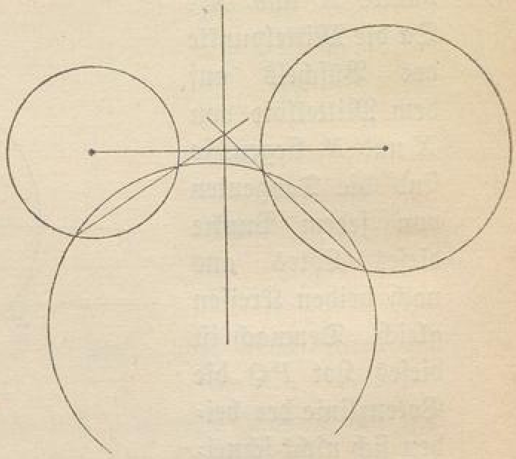


Fig. 71.



91) **Aufgabe.** Die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise zu konstruieren.

Auflösung. Man schlage einen Kreis, der beide Kreise schneidet, ziehe die gemeinschaftlichen Sekanten und fälle von ihrem Schnittpunkte aus ein Lot auf die Centrale der gegebenen Kreise (Fig. 71).

Bemerkung. Wird ein Kreisbüschel oder eine Kreisschar von einem beliebigen Kreise geschnitten, so gehen die gemeinschaftlichen Sehnen zwischen diesem und dem ganzen Kreissysteme durch einen Punkt der Potenzlinie des letzteren. (Warum?)

92) Ist A_3 der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2, so sind die Berührungssehnen B_1C_1 und B_2C_2, die man als Ähnlichkeitspolaren bezeichnet, parallel (Fig. 72).

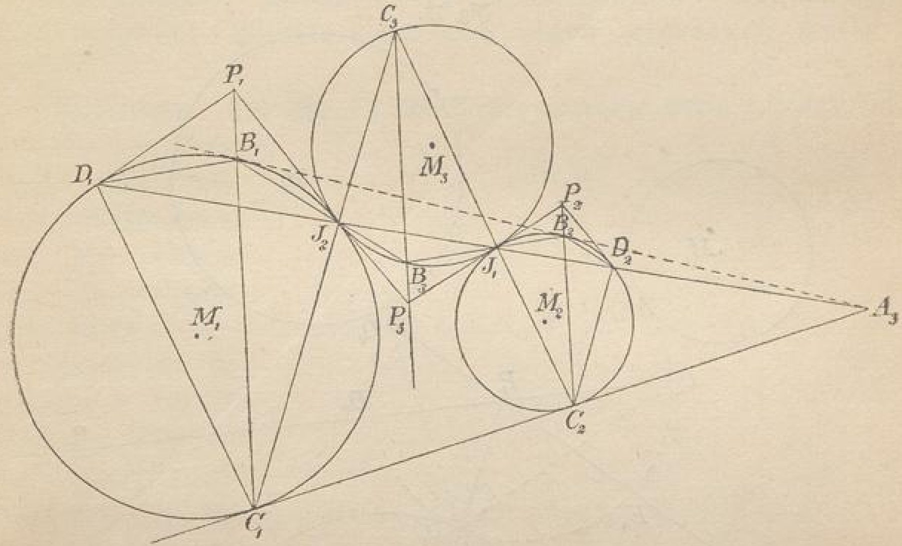
Zieht man eine Sekante A_3D_1, so sind die Schnittpunkte J_1 und J_2 Berührungspunkte eines gleichartigen Berührungskreises M_3.

P_1 sei Pol der Ähnlichkeitsachse $A_3J_1J_2$. Weil ferner B_1 der Pol der Tangente B_1A_3 ist, so ist P_1B_1 die Polare vom Schnittpunkte A_3. Folglich: Der Pol P_1 der Ähnlichkeitsachse $A_3J_1J_2$ liegt auf der Ähnlichkeitspolare B_1C_1.

Ebenso liegt der Pol P_2 der Geraden $A_3J_1J_2$ auf der Ähnlichkeitspolare B_2C_2. Daß endlich der Pol P_3 auf der Potenzlinie liegt, die zu der Ähnlichkeitspolare parallel ist, wurde schon mehrfach bemerkt.

Die gesamte Zeichnung zu M_1 ist perspektivisch zur Zeichnung für M_2 in Bezug auf A_3; die gesamte Zeichnung zu M_3 ist perspektivisch zu der für M_1 in Bezug auf J_2; die gesamte Zeichnung

Fig. 72.



zu M_3 ist perspektivisch zu der für M_2 in Bezug auf J_1. Also liegen $P_1J_2P_3$, $P_2J_1P_3$ und $P_1P_2A_3$ auf geraden Linien, ebenso $C_1J_2C_3$, $B_1J_2B_3$; $C_2J_1C_3$ und $B_2J_1B_3$. Folglich:

Verbindet man die Endpunkte einer Ähnlichkeitspolare zweier Kreise mit dem Berührungspunkte eines Berührungskreises, so erhält man auf diesem Kreise Punkte der Potenzlinie der beiden ersten Kreise.

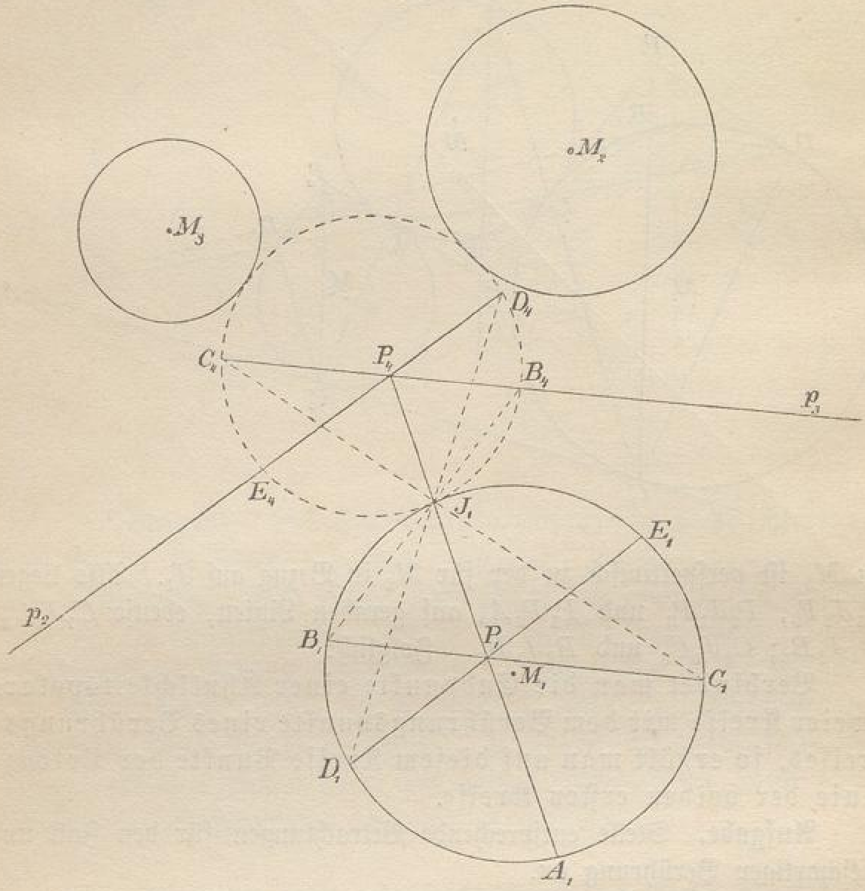
Aufgabe. Stelle entsprechende Betrachtungen für den Fall ungleichartiger Berührung an.

93) In Fig. 73 werden die Kreise M_1, M_2 und M_3 von einem vierten berührt. Ist nun B_1C_1 äußere Ähnlichkeitspolare für M_1 und M_2, so geben die Geraden $B_1J_1B_4$ und $C_1J_1C_4$ die Potenzlinie B_4C_4 oder p_3. Ebenso giebt die Ähnlichkeitspolare D_1E_1 zu M_1 und M_3 durch $D_1J_1D_4$ und $E_1J_1E_4$ die Potenzlinie D_4E_4 oder p_2. Da nun die Geraden B_1C_1 und D_1E_1 perspektivisch zu B_4C_4 und D_4E_4 in Bezug auf den Punkt J_1 sind, so sind auch ihre Schnitte P_1 und P_4 perspektivisch in Bezug auf J_1. Folglich:

Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt ihr Potenzcentrum P_4 auf gerader Linie mit dem Berührungspunkte J jedes der drei Kreise und dem Schnitte P seiner beiden äußeren Ähnlichkeitspolaren.

Aufgabe. Stelle die betreffenden Betrachtungen für andere Fälle der Berührung auf, z. B. lauter innerliche Berührungen, oder für ungleichartige Berührungen.

Fig. 73.



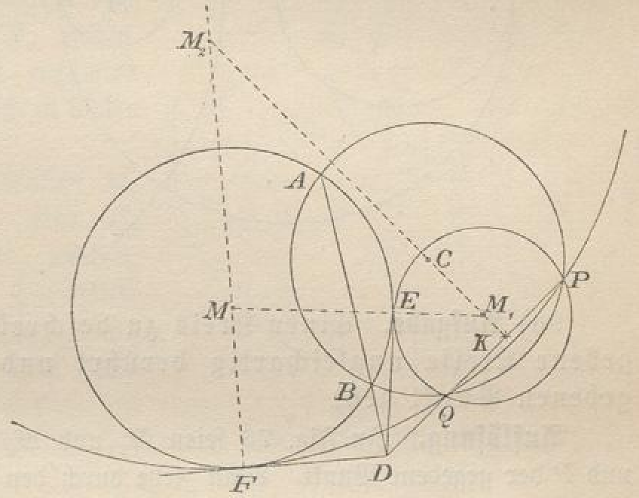
Bemerkung. Da $D_1 E_1$ und $B_1 C_1$ äußere Ähnlichkeitspolaren sind, so ist P_1 Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse der Kreise M_1, M_2 und M_3. Jede Ähnlichkeitsachse hat in den drei Kreisen drei Pole, so daß im ganzen für vier Ähnlichkeitsachsen zwölf Pole vorhanden sind. Da nun je drei Pole zu zwei Berührungen Veranlassung geben, giebt es acht verschiedene Arten der Berührung, d. h. acht Berührungskreise dreier Kreise. Bedeutet a äußerliche, i innerliche Berührung, so handelt es sich um folgende Fälle: $\underset{a}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{i}{M_3}$.

XI. Einige Berührungsaufgaben.

94) **Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. In Fig. 74 sei M der gegebene Kreis, P und Q seien die gegebenen Punkte. Mit Hülfe der Mittelsenkrechten von PQ schlage durch beide Punkte einen Kreis C, der den Kreis M in Punkten A und B schneidet; AB und PQ geben den Schnitt D. Aus der Tangente DE ergiebt sich der Radius ME, der die Mittelsenkrechte KC in M_1 schneidet. Ebenso ergiebt sich aus der Tangente DF der Radius FM, der KC in M_2 schneidet. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

Fig. 74.

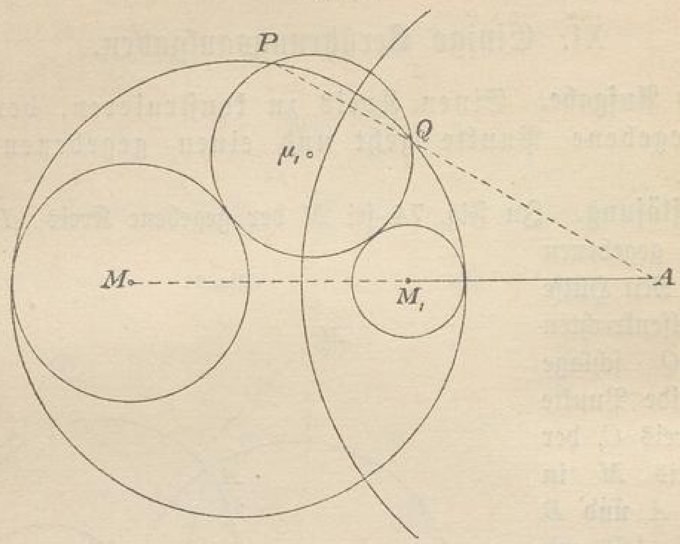


Der Beweis beruht darauf, daß die dritte Potenzlinie, d. h. die Tangente DE bezw. DF mit AB und PQ durch denselben Punkt gehen muß.

95) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. In Fig. 75 seien M und M_1 die gegebenen Kreise und P der gegebene Punkt. Man zeichne den Kreis A, der den Kreis M durch reciproke Spiegelung in den Kreis M_1 verwandelt. (Sein Radius ist mittlere Proportionale zwischen AB und AC, wo A äußerer Ähnlichkeitspunkt ist, während B und C die äußeren (oder die inneren) Schnittpunkte der Centrale sind.) Man spiegele gegen diesen Kreis den Punkt P reciprok, was Q giebt ($AQ \cdot AP = r^2$). Jetzt sind die beiden Kreise zu beschreiben, die durch P und Q gehen und den Kreis M (oder M_1) berühren. (Vgl. vorige Aufgabe.)

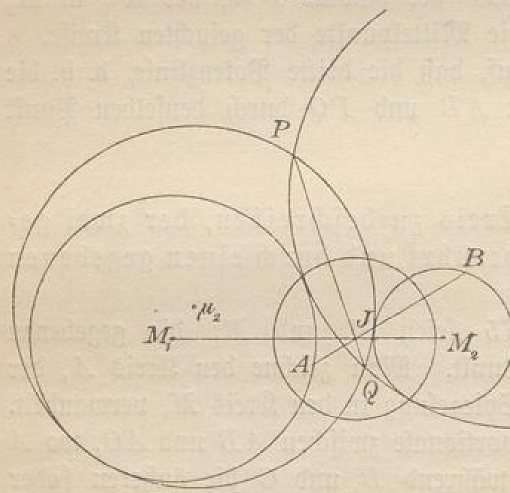
Fig. 75.



96) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. In Fig. 76 seien M_1 und M_2 die gegebenen Kreise und P der gegebene Punkt. Man ziehe durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J die beliebige Sekante AB und schlage um J einen Kreis mit der mittleren Proportionale von JA und JB. Dann bilde man JQ aus $JP \cdot JQ = r^2$. Durch P und Q ist ein Kreis zu legen, der einen der beiden gegebenen Kreise innerlich oder äußerlich berührt.

Fig. 76.

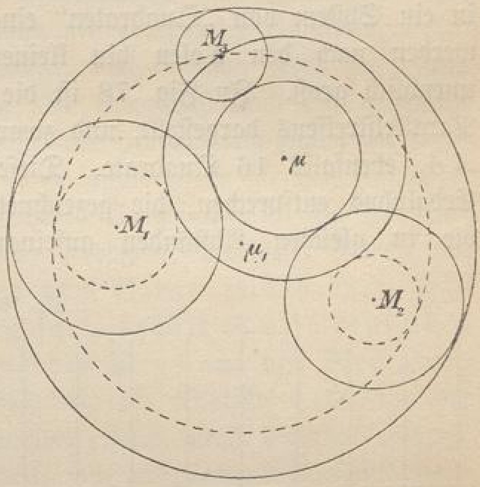


Bemerkung. Ist einer der beiden Kreise eine Gerade ($r = \infty$), so treten die Schnittpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers als äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt auf. Sonst ist nichts geändert.

97) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise gleichartig berührt. (Problem des Apollonius.)

Auflösung 1. In Fig. 77 seien M_1, M_2, M_3 die gegebenen Kreise, und zwar M_3 der kleinste. Die Radien seien r_1, r_2 und r_3. Man schlage um M_1 und M_2 Kreise mit den Radien $(r_1 - r_3)$ und $(r_2 - r_3)$ und konstruiere die beiden Kreise, die die Hülfskreise gleichartig berühren und durch den Punkt M_3 gehen. Die in Wirklichkeit gesuchten Kreise sind konzentrisch zu diesen beiden.

Fig. 77.



Bemerkung. Sollen M_1 und M_2 gleichartig, aber M_3 ungleichartig berührt werden, so schlage man die Hülfskreise mit den Radien $(r_1 + r_3)$ und $(r_2 + r_3)$. Die übrigen Fälle erledigen sich mit Hülfe des inneren Ähnlichkeitspunktes. Die acht möglichen Fälle sind in Nr. 93 angegeben.

Auflösung 2. Suche das Potenzcentrum P_4 der drei Kreise und zeichne in jeden die beiden äußeren Ähnlichkeitsachsen, deren Schnitte in jedem der Kreise P_1, P_2 und P_3 seien. Die Geraden P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 geben die Berührungspunkte J_1, J_2 und J_3 für den äußerlich berührenden Kreis, und zugleich die Berührungspunkte A_1, A_2 und A_3 für den innerlich berührenden Kreis. (Vergl. Fig. 73.)

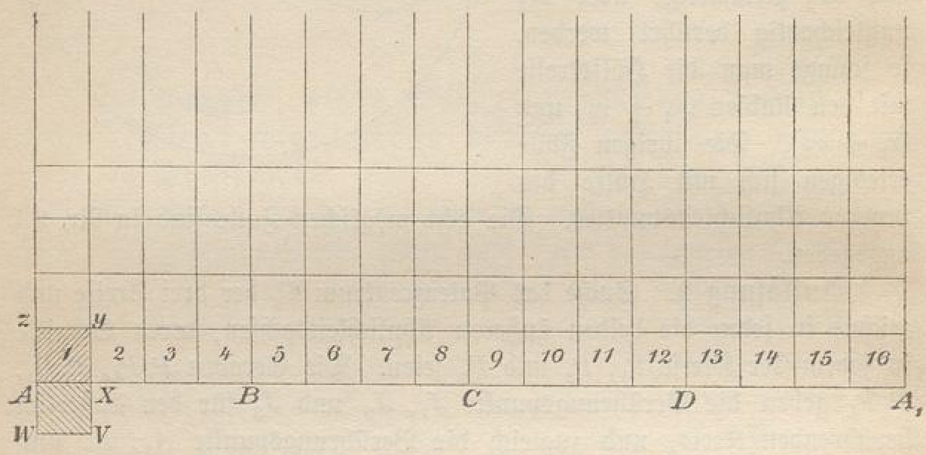
Bemerkung. Mit Hülfe innerer Ähnlichkeitspolaren gelangt man zu den ungleichartigen Berührungen.

XII. Kartographische Anwendungen.

98) Zunächst soll die Weltkarte nach Gerhard Kremer, genannt Mercator, kurz erläutert werden.

Da die Oberfläche der Kugel sich nicht in die Ebene ausbreiten läßt, wie z. B. die des Cylinders und des Kegels, so läßt sich zu dem Gradnetz ihrer Meridiane und Parallelkreise kein vollkommen treues ebenes Bild geben, sondern es treten bestimmte Verzerrungen ein, je nachdem die Karte diese oder jene Bedingung erfüllen soll. Um einen Einblick in die Lehre von den Gradnetzen zu erhalten, teile man die Kugeloberfläche z. B. durch 16 unter gleichen Winkeln auf einander folgende Meridiane in kongruente Flächenteile ein. Bei den Parallelkreisen sehe man zunächst von der Aufeinanderfolge nach Graden ab, und denke sich die ersteren so gelegt, daß die Kugelfläche in ein System von „Quadraten" eingeteilt wird. Diese Quadrate*) werden nach den Polen hin kleiner und kleiner. Ihre Zahl ist unendlich groß. In Fig. 78 ist die Quadrateinteilung eines ebenen Parallelstreifens dargestellt, und zwar befinden sich über der Geraden AA_1 ebenfalls 16 Quadrate. Diese Gerade soll dem Äquator des Erdglobus entsprechen, die gezeichneten Senkrechten den Meridianen, die in gleichen Abständen aufeinanderfolgenden Horizontalen den

Fig. 78.



obigen Parallelkreisen auf der Kugelfläche. (Im Beispiele $n = 16$ folgen die Meridiane der Kugel unter $\frac{360^0}{16}$ oder $22\frac{1}{2}^0$ aufeinander.)

Fig. 78 entspricht der nördlichen Halbkugel der Erdoberfläche. Nach oben erstreckt sich die Zeichnung des Streifens bis in unendliche Entfernung, weil die Quadrate hier gleich groß sind, ihre Anzahl aber unendlich groß ist. Erweitert man die Zeichnung nach unten, so erhält man auch das Bild der südlichen Halbkugel.

Zeichnet man in die entsprechenden Quadrate die Länderformen ein, so erhält man die Weltkarte in Mercators Darstellung.

*) Von Quadraten kann man eigentlich erst reden, wenn die Meridiane und Parallelkreise so zahlreich genommen werden, daß die sehr kleinen Flächenräume als eben und geradlinig betrachtet werden können. Methoden, diese Einteilung korrekt durchzuführen, werden später gegeben.

Diese hat den Vorzug, daß ihre „Quadrate" denen der Kugel in um so höherem Grade ähnlich sind, je größer man die Anzahl der Meridiane genommen hat. Die Zeichnungen innerhalb kleiner Quadrate sind also ähnlich, oder, wie man sich ausdrückt, die Mercatorkarte stellt kleine Flächenteile der Erdoberfläche ähnlich dar, obwohl das Gesamtbild der Erdoberfläche nicht ähnlich ist. Abbildungen solcher Art bezeichnet man als konforme Abbildungen.

Der zweite Vorteil beruht darin, daß die von Nord nach Süd gehenden Linien sämtlich senkrecht, die von West nach Ost gehenden sämtlich horizontal sind, so daß man alle Himmelsrichtungen an jeder Stelle als gerade Linien eintragen kann, und daß den gleichen Himmelsrichtungen parallele Gerade entsprechen. So geben z. B. alle Quadratdiagonalen die Richtungen Nordost, Nordwest, Südwest, Südost an. Setzt also z. B. ein Schiff auf dem Ozean seinen Weg stets in derselben Himmelsrichtung fort, behält es also denselben Kurs bei, so ist die Abbildung des Wegs auf der Mercatorkarte eine gerade Linie. Will also ein Kapitän z. B. von der Südspitze Irlands stets mit demselben Kurs nach Cayenne fahren, und zieht er auf der Mercatorkarte die entsprechende Verbindungslinie, so erhält er die Himmelsrichtung, in der er zu steuern hat, auf das genaueste. Daher ist die Mercatorkarte als Schiffahrtskarte allgemein verbreitet. Jeden Tag bestimmt der Kapitän den Ort des Schiffes*), erkennt dabei, wie weit er durch Meeresströmungen, Wind oder ungenaues Steuern sich von der gezeichneten Geraden entfernt hat und korrigiert den Kurs des Schiffes.

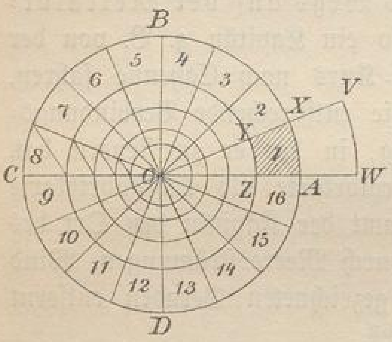
Einen Nachteil aber hat die Karte in folgender Hinsicht. Während die obigen „Quadrate" auf dem Globus nach den Polen hin zu unendlicher Kleinheit abnehmen, bleiben sie auf der Mercatorkarte gleich groß; während dort die Meridiane den beiden Polen zustrebend sich immer mehr nähern, behalten sie hier stets denselben Abstand. Stimmen also die Quadratdimensionen am Äquator des Globus und der Mercatorkarte überein, so hört diese Übereinstimmung nach Norden in zunehmendem Grade auf, und in den unendlich fern liegenden Polen der Mercatorkarte ist die Darstellung derart vergrößert zu denken, daß uns die Ausdrucksweise gestattet ist, dort sei der Maßstab der unendlichfache, wie auf dem Globus. Also, je weiter nach den Polen hin, um so größer wird der Maßstab der Mercator-

*) Aus der Höhe des Polarsterns oder der Mittagshöhe der Sonne findet er z. B. die nördliche Breite, aus der Differenz zwischen der Mittagszeit des Ortes und der des Ausgangsortes, die an dem dort gestellten Chronometer abzulesen ist und 4 Minuten auf den Grad beträgt, bestimmt er die Länge.

karte. So erscheint z. B. Grönland größer als ganz Afrika, obwohl es in Wahrheit weit kleiner ist. Die Nachbarschaft der beiden Pole kann auf der Mercatorkarte gar nicht dargestellt werden, da sonst die Karte nach oben und unten ins Unendliche gehen müßte. Man bricht die Darstellung gewöhnlich in der Nähe des 80. Grades nördlicher und südlicher Breite ab. Da die Polargegenden nicht bekannt sind, und da von regelmäßiger Schiffahrt dort nicht die Rede sein kann, hat dieser Umstand die Brauchbarkeit der Karte nicht beeinträchtigt. [Die Karten der physikalischen Geographie, z. B. die der magnetischen Meridiane, Isoklinen, Isodynamen, Isothermen, Isanomalien, Isorachien u. s. w. sind in der Regel nach Mercators Projektion dargestellt.]

99) In Fig. 79 ist ein Kreis, dessen Umfang $ABCDA$ gleich der Länge des Äquators der Mercatorkarte sein soll, durch ein Strahlenbüschel und die konzentrische Kreisschar in ähnliche „Rechtecke" eingeteilt. Dies ist erreicht, sobald jeder Radius die mittlere Proportionale zu den beiden benachbarten Radien ist, und wenn die Strahlen unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Das erstere erzielt man durch parallele Diagonalen, wie sie bei CO dargestellt sind.

Fig. 79.



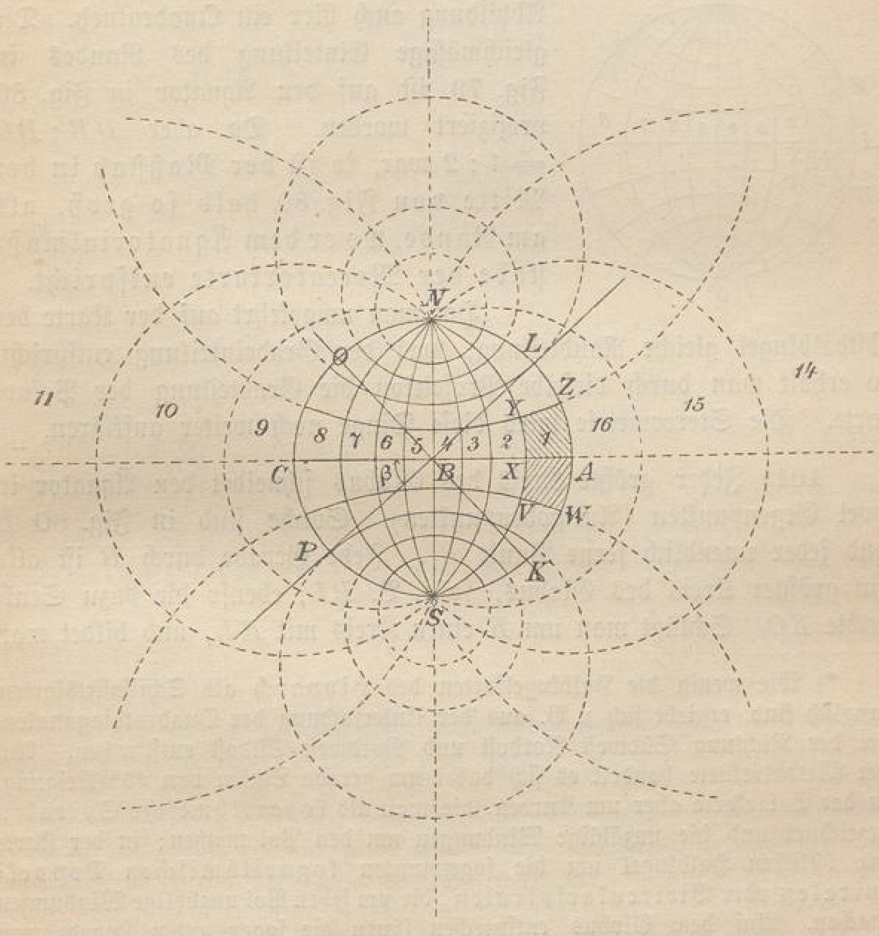
Sind nun die kleinen Rechtecke „Quadrate", so ist das Quadratnetz*) ganz dem der Mercatorkarte und des Globus entsprechend. So sind z. B. die Quadrate von 1 bis 16 die Bilder der gleichzahligen Quadrate der Mercatorkarte. So erhält man die Polarkarte von Hipparch-Ptolemäus, die sich in der Stereometrie als eine bestimmte Centralprojektion der Kugelfläche herausstellen wird. Sie

*) In Nr. 81 ist bereits gesagt, daß man die quadratische Teilung bei n Sektoren erreicht, wenn die Radien nach außen im Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{n}}$ auf einander folgen, wo $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Hier also handelt es sich um das Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{16}} = 1 : 1{,}480972$. Nach innen folgen die Radien einander nach der Reihe $e^0, e^{-\frac{2\pi}{n}}, e^{-\frac{4\pi}{n}}, e^{-\frac{6\pi}{n}}$ u. s. w. Durch diese Zahlen erkennt man zugleich die Vergrößerungsverhältnisse zwischen jeder Stelle des Innern und der Mercatorkarte, deren Maßstab gleich dem des Randkreises genommen war.

giebt eine konforme Darstellung der halben Mercatorkarte und zugleich der Nord- oder Südhalbkugel des Globus.

Der Symmetrie der Mercatorkarte gegen den Äquator entspricht bei der Polarkarte des Hipparch die Reciprocität gegen den Grenzkreis. Man kann also die Polarkarte über den Äquator hinaus fortsetzen. So ist z. B. *AWVX* das zu *AZYX* reciproke „Quadrat". (Vgl. Fig. 79.) Dabei nehmen aber die Dimensionen der Quadrate bald derart zu (sogar im Verhältnis zu denen der Mercatorkarte), daß man sich gewöhnlich auf die Darstellung der einen Halbkugel beschränkt und für die andere eine besondere Zeichnung macht. Für die mathematische Betrachtung ist es gut, das Quadratnetz nach außen fortzusetzen.

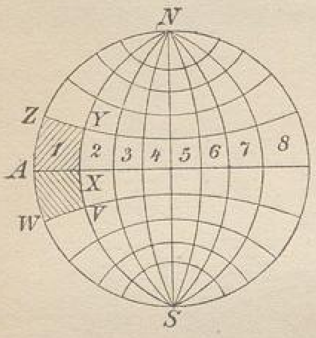
Fig. 80.



100) Man schlage jetzt in Fig. 79 um *D* einen Kreis, der durch *A* (und *C*) geht und bilde das reciproke Spiegelbild der Zeichnung

gegen diesen Kreis. Da letzterer den Grenzkreis und die Horizontale unter 45° schneidet, geht der Grenzkreis (Äquator) in die Horizontale und diese in den Grenzkreis über. B und der Nordpol vertauschen ihre Stellen, A und C bleiben, der unendlich ferne Bereich rückt nach D, welches des Südpols wegen jetzt S heiße, und das Strahlenbüschel geht in das Kreisbüschel durch N und S, die konzentrische Kreisschar in die Orthogonalschar des Büschels über. Man erhält so in Fig. 80 die obere Hälfte der Karte der östlichen Halbkugel und ihre reciproke Fortsetzung nach außen, nur muß die Karte noch um die senkrechte Mittellinie geklappt werden, um der des Mercator bezüglich der Himmelsrichtung genau zu entsprechen, wodurch Fig. 81 entsteht.*)

Fig. 81.



Dem Quadratnetz der Polarkarte entspricht wegen des konformen Charakters der Abbildung auch hier ein Quadratnetz. Die gleichmäßige Einteilung des Randes in Fig. 79 ist auf den Äquator in Fig. 80 projiziert worden. Da aber $DB : DO = 1 : 2$ war, so ist der Maßstab in der Mitte von Fig. 80 halb so groß, als am Rande, wo er dem Äquatorialmaßstabe der Mercatorkarte entspricht.

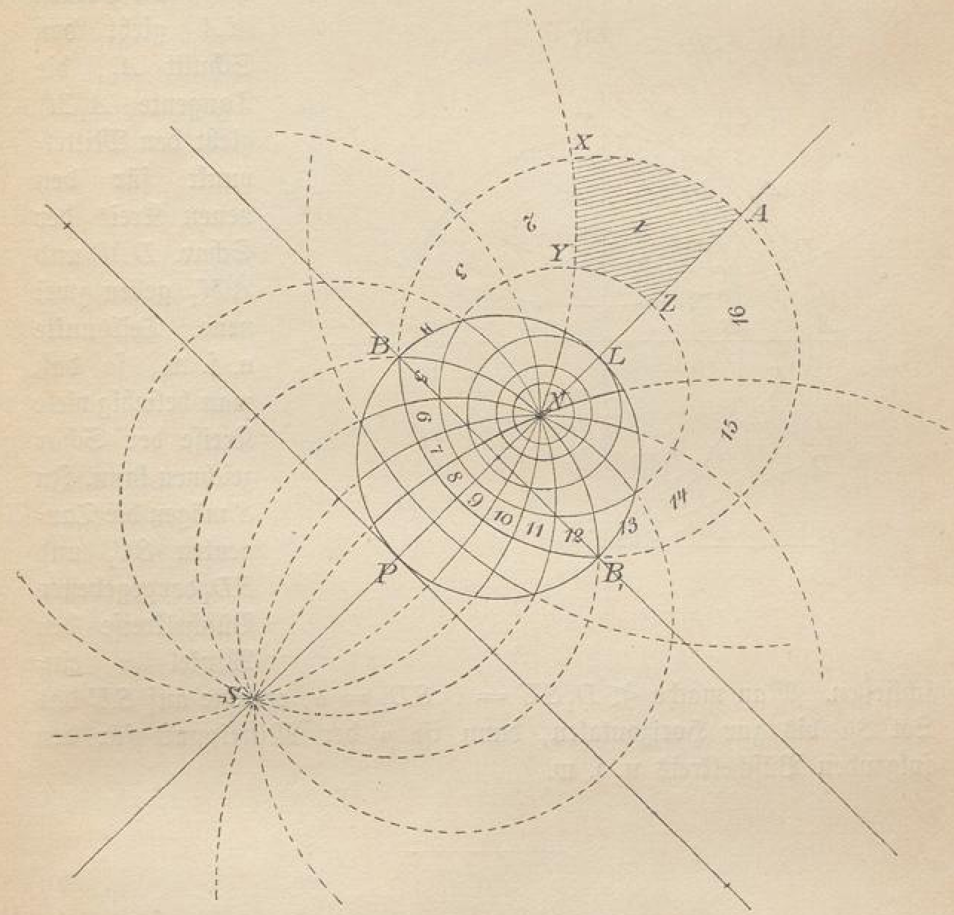
Hat man umgekehrt auf der Karte der Osthalbkugel gleiche Randteilung, was der Gradeinteilung entspricht, so erhält man durch dieselbe Projektion die Gradteilung der Polarkarte. Die Stereometrie wird diese Dinge noch weiter aufklären.

101) Jeder größte Kreis des Globus schneidet den Äquator in zwei Gegenpunkten (Antipodenpunkten). Solche sind in Fig. 80 B und jeder unendlich ferne Punkt B_1. Jede Gerade durch B ist also ein größter Kreis des Globus, so z. B. PL, ebenso die dazu Senkrechte KO. Schlägt man um K einen Kreis mit KL, und bildet man

*) Wie wenig die Halbkugelkarten des Hipparch als Schiffahrtskarten tauglich sind, ergiebt sich z. B. aus der Untersuchung der Quadratdiagonalen, die der Richtung Südwest-Nordost und Nordwest-Südost entsprechen. Auf der Mercatorkarte handelt es sich dabei um gerade Linien von 45° Neigung, in der Polarkarte aber um Kurven, die man als logarithmische Spiralen bezeichnet und die unzählige Windungen um den Pol machen; in der Karte der östlichen Halbkugel um die sogenannten logarithmischen Doppelspiralen oder Bicircularspiralen, die um jeden Pol unzählige Windungen machen. Auf dem Globus entsprechen ihnen die sogenannten Loxodromen (Schieflauflinien). Sämtliche werden für den Schnittwinkel 45° als Diagonalkurven des Quadratnetzes bequem skizziert. Hierzu vergleiche man des Verfassers „Einführung in die isogonalen Verwandtschaften", Leipzig bei Teubner.

durch reciproke Spiegelung gegen diesen das Inversionsbild zu Fig. 80, so verwandelt sich die Gerade $PBL\infty$ in den Grenzkreis durch K und O, dieser in jene Gerade, der Pol N fällt innerhalb des neuen Grenzkreises, und zwar auf den Schnitt von PL und KN, ebenso der Punkt S auf den Schnitt von KS und PL in Fig. 80. Ebenso

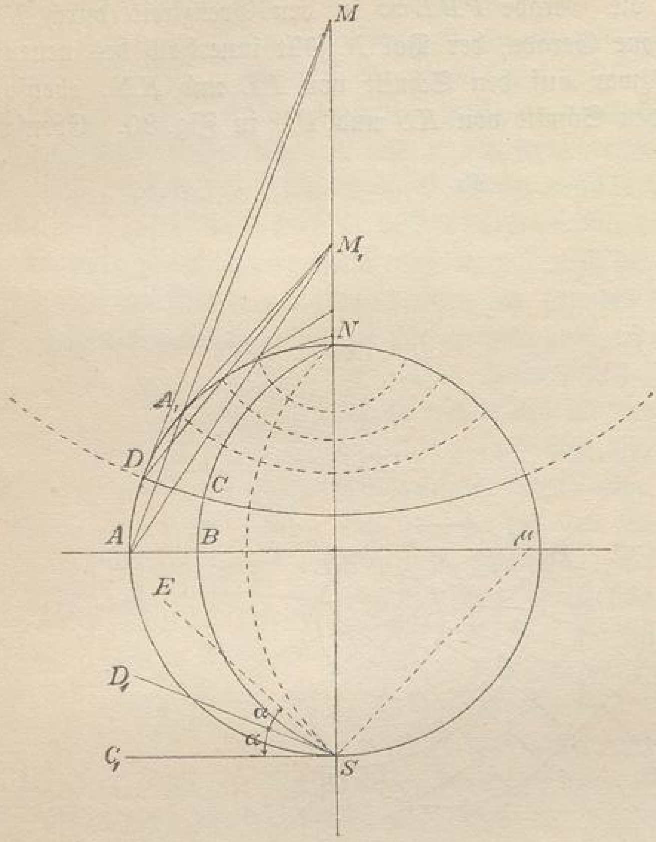
Fig. 82.



fallen A und C auf die Schnitte von PL und KA bezw. KC. Das Kreisbüschel durch N und S geht über in das Büschel durch die neuen Punkte N und S, Fig. 82 stellt die neue Karte dar. Sie entspricht z. B. den Karten der größten Land- und Wassermasse, wenn der Schnittwinkel β bei B richtig gewählt war.

102) **Aufgabe.** Das Rechtecksnetz selbständig zu vollenden, wenn die vier Grenzkreise eines „Rechtecks" gegeben sind.

Fig. 83.



Auflösung. $ABCD$ in Fig. 83 sei das gegebene „Rechteck". Die Tangente in D giebt M auf SN. Die Gerade MA giebt den Schnitt A_1, die Tangente $A_1 M_1$ giebt den Mittelpunkt für den neuen Kreis der Schar. DM_1 und AM_1 geben zwei neue Teilpunkte u. s. w., so daß man beliebig viele Kreise der Schar zeichnen kann. In S mögen die Tangenten SC_1 und SD_1 der gegebenen Büschelkreise den Winkel α einschließen. Man mache $\sphericalangle D_1SE = C_1SD_1 = \alpha$, errichte auf SE das Lot $S\mu$ bis zur Horizontalen, dann ist μ der Mittelpunkt für den folgenden Büschelkreis u. s. w.

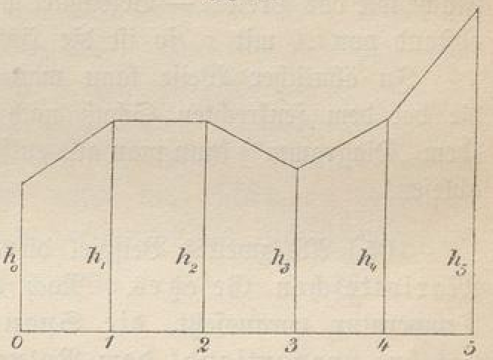
XIII. Der Koordinatenbegriff.

a) Graphische Darstellungen.

103) Statistische Verhältnisse pflegt man auf graphischem (zeichnendem) Wege zu veranschaulichen. So könnten z. B. durch Fig. 84 die Schwankungen in der Frequenz einer Schule für einen Zeitraum von 5 Jahren dargestellt werden. Die gleichen Abschnitte auf der Horizontalen bedeuten die gleichen Zeiträume (Jahre), die regelmäßige Bewegung von 0 bis 5 den Verlauf der Zeit. Die Höhen verhalten

sich wie die entsprechenden Frequenzzahlen. Zunahme im ersten, Gleichbleiben im zweiten, Abnahme im dritten, Zunahme im vierten, verstärkte Zunahme im fünften Jahre sind ohne weiteres zu erkennen.

Fig. 84.

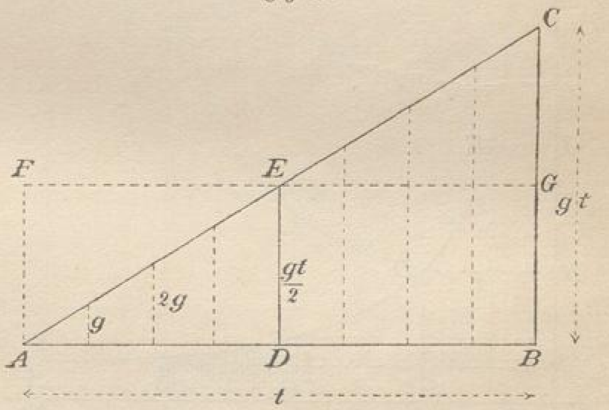


Ebenso veranschaulicht man die Schwankungen in der Bevölkerung von Städten und Staaten, in der Transportmenge von Eisenbahnen und Hafenanlagen, die Schwankungen in der Produktion der Landwirtschaft, der Bergwerke, der Industrie, die Preisschwankungen des Getreides, des Eisens u. s. w., die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks (Barometerstandes), des Wasserstandes der Flüsse, u. s. w. Bei einer größeren Anzahl gleicher Zeiträume kann man die mittlere Höhe als die Veranschaulichung des mittleren Zustandes betrachten.

101) Aus einigen Beispielen wird man den Nutzen solcher Darstellungen für die mathematische Physik erkennen.

Fig. 85 veranschaulicht die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume freifallenden (oder eines von konstanter Triebkraft bewegten) Körpers. Ist g die Geschwindigkeitszunahme für jede Sekunde, so hat der Körper nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $8g$, nach t Sekunden die Geschwindigkeit gt. Die Endpunkte der Geschwindigkeitslote liegen in einer Geraden. Das mittlere Lot giebt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{gt}{2}$ an. Diese,

Fig. 85.



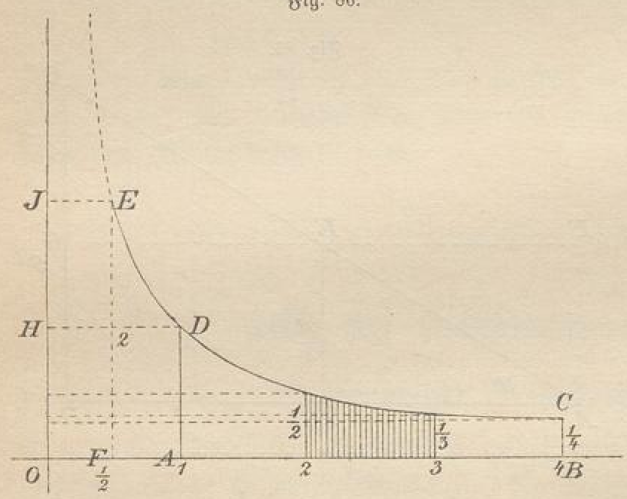
auf die Zeit t ausgedehnt, giebt den Weg $\frac{1}{2}gt^2$, und zwar auch für die beschleunigte Bewegung, der Inhalt des Dreiecks von Basis t und Höhe gt ist ebenfalls $\frac{1}{2}gt^2$. Die Dreiecksfläche stellt also den vom Körper zurückgelegten Weg dar. Die einzelnen Trapezflächen geben den Weg in den einzelnen Sekunden an. Das Rechteck der mittleren Geschwindigkeit $ABGF$ hat natürlich dieselbe Fläche wie das Dreieck. — Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von A mit x, so ist die Höhe an jeder Stelle $y = gx$.

In ähnlicher Weise kann man die Bewegung veranschaulichen, die bei dem senkrechten Schuß nach oben entsteht. Aus der Figur (dem „Diagramm") kann man alle entsprechenden Bewegungsverhältnisse ablesen.

105) Als zweites Beispiel diene die graphische Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Nach diesem ist, wenn man konstante Temperatur voraussetzt, die Spannung einer Gasmenge umgekehrt proportional dem Volumen.

In Fig. 86 ist nun Folgendes dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 der Grundlinie stellen die Volumina 0, 1, 2, 3, 4 dar. An der Stelle 1 ist die Spannung $AD = 1$ angenommen, z. B. gleich 1 Atmosphäre (10 334 kg pro qm der Druckfläche). Dann ist an Stelle 2, 3, 4, ... die Spannung $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ als Lot aufzusetzen. Dagegen würde an Stelle $\frac{1}{2}$ das Lot $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ zu zeichnen sein. Das Diagramm kann nach links bis zur Stelle $x = 0$, nach rechts bis zum unendlichen Bereiche ($x = \infty$) ausgedehnt werden. Die Endpunkte der Lote bilden eine später zu besprechende Kurve, die man als die Mariottesche Kurve bezeichnen kann. (Sie wird wegen Annahme konstanter Temperatur auch als Isotherme bezeichnet.) Gewisse in der Figur angedeutete Rechtecke sind inhaltsgleich, z. B. $OFEJ$ und $OADH$.

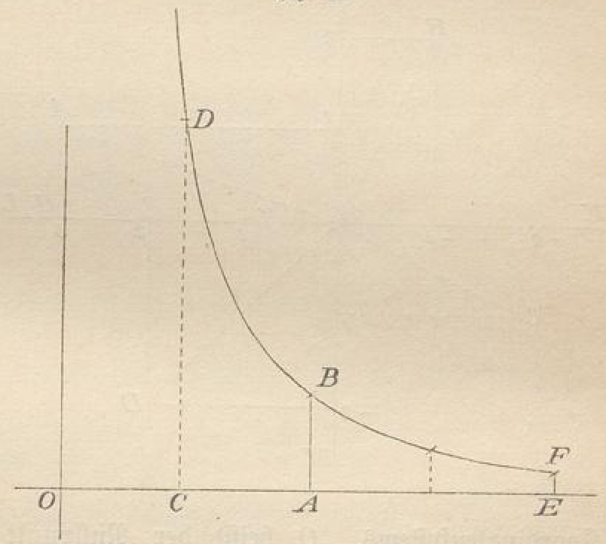
Fig. 86.



Da in der Mechanik das Produkt aus der Kraft und dem Kraftwege Arbeit bedeutet, so stellen die kleinen als Rechtecke aufzufassenden senkrechten Flächenstreifen, wie sie von 2 bis 3 angedeutet sind, Arbeiten dar, die z. B. in Meterkilogrammen zu messen sind. Die Fläche $ABCD$ stellt also die Expansionsarbeit dar, welche die Luft bei der Ausdehnung auf das vierfache Volumen leistet, wenn die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Dagegen stellt die Fläche $ADEF$ die Arbeit dar, die nötig ist, um unter Konstanthaltung der Temperatur dieselbe Luft auf das halbe Volumen zusammenzupressen. Es handelt sich also in Fig. 86 zugleich um das Arbeitsdiagramm für Expansion und Kompression unter der Bedingung konstanter Temperatur. Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von O mit x, so ist die zugehörige Höhe stets $y = \frac{1}{x}$.

[106) Als drittes Beispiel diene die graphische Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Nach diesem ist die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskörper umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Befindet sich z. B. die Sonne in O, die Erde in A (Fig. 87), und stellt AB die Größe der gegenseitigen Anziehung für die Entfernung OA dar, so ist diese für die halbe Entfernung OC viermal so groß, für die doppelte Entfernung OE der vierte Teil. Setzt man also $OA = 1$, und einen beliebigen Horizontalabstand $= x$, so ist die zugehörige Anziehung durch das Lot $y = \frac{AB}{x^2}$ zu veranschaulichen. Auch hier stellt die Fläche zwischen der Kurve und der Horizontalen eine Arbeit dar. Um z. B. den Erdball aus der Entfernung OA in die Entfernung OE zu versetzen, müßte man eine Arbeit leisten, die durch die Fläche $AEFB$ dargestellt wird. [Die Arbeit, die nötig sein würde, die Erde aus der Entfernung OA in unendliche Entfernung zu bringen, wird durch das von A aus

Fig. 87.



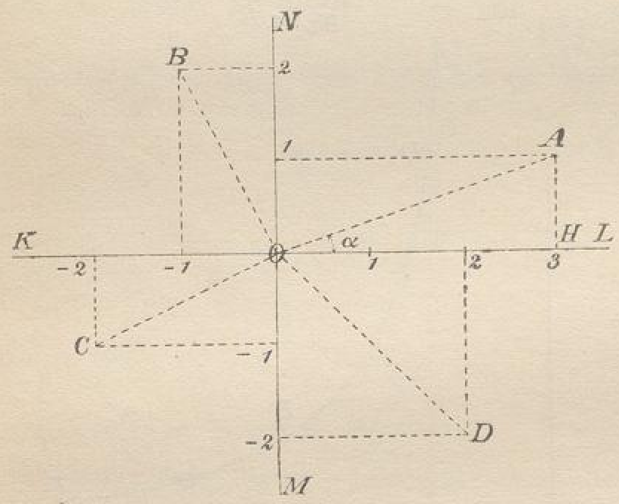
bis ins Unendliche fortgesetzte Diagramm dargestellt und als das Potential für den Punkt A bezeichnet.]

107) Man erkennt, daß sich durch solche Diagramme schwierige Dinge auf einfache Art veranschaulichen lassen. Man bezeichnet den Horizontalabstand vom Anfangspunkte als Abscisse, den Vertikalabstand als Ordinate. Beide tragen noch den gemeinschaftlichen Namen Koordinaten. Um jedoch den mathematischen Verhältnissen noch allgemeiner zu entsprechen, läßt man auch negative Abscissen und Ordinaten zu, und zwar sind die ersteren nach links, die letzteren nach unten gerichtet.

b) Die Koordinaten von Punkten.

108) In Fig. 88 hat der Punkt A die Koordinaten $x = 3$ und $y = 1$; Punkt B hat $x = -1$, $y = 2$; für den Punkt C ist $x = -2$, $y = -1$; für den Punkt D ist $x = 2$, $y = -2$. Diese Punkte liegen der Reihe nach im 1., 2., 3. und 4. Quadranten der Ebene. Den letzteren entsprechen, wie in der Trigonometrie, der Reihe nach die Vorzeichen $++$, $-+$, $--$, $+-$. Die von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade KL heißt die X-Achse, die ebenfalls von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade MN die Y-Achse des Koordinatensystems. O heißt der Nullpunkt des letzteren. Jedem reellen Koordinatenpaare x, y entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Quadrant sich aus den Vorzeichen ergiebt. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Ebene ein reelles Koordinatenpaar.

Fig. 88.



109) Die Koordinaten x und y bezeichnet man als die Cartesischen Koordinaten, nach Descartes oder Cartesius, der sie zuerst

aufgestellt hat. Da man die Lage von A auch durch den Radius $OA = r$ und den Winkel $HOA = \alpha$ darstellen kann, ebenso die Lage von B durch den Radius $OB = r$ und den Winkel $HOB = \alpha$, die des Punktes C durch den Radius $OC = r$ und den überstumpfen Winkel $HOC = \alpha$, und endlich die Lage von D durch den Radius $OD = r$ und den überstumpfen Winkel HOD, so hat man auch r und α als Koordinaten eingeführt, die sogenannten Polarkoordinaten. An jedem der genannten Punkte erkennt man, daß zwischen den Cartesischen und den Polarkoordinaten folgende Beziehungen stattfinden:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\alpha = \frac{y}{x},\ \cos\alpha = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\alpha = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\sin\alpha.$$

Das Vorzeichen von r wird stets positiv angenommen, der Wechsel der Vorzeichen wird den goniometrischen Funktionen überlassen, und zwar in derselben Weise, wie in der Trigonometrie.

110) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lauten die Koordinaten des Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie?

Auflösung. $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $y = \frac{b_1 + b_2}{2}$. Warum?

Aufgabe. Die Verbindungslinie derselben Punkte soll von Z_1 aus im Verhältnis 3 : 2 geteilt werden; wie lauten die Koordinaten des Teilpunktes?

Auflösung. $x = a_1 + \frac{3}{5}(a_2 - a_1) = \frac{2a_1 + 3a_2}{5}$;

$$y = b_1 + \frac{3}{5}(b_2 - b_1) = \frac{2b_1 + 3b_2}{5}.$$

Allgemeiner giebt die Teilung im Verhältnis $n_1 : n_2$ die Koordinaten

$$x = \frac{n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 + n_2},\quad y = \frac{n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 + n_2}.$$

Die entsprechende äußere Teilung giebt $x_1 = \frac{-n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 - n_2}$, $y_1 = \frac{-n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 - n_2}$. (Vergl. harmonische Punkte.)

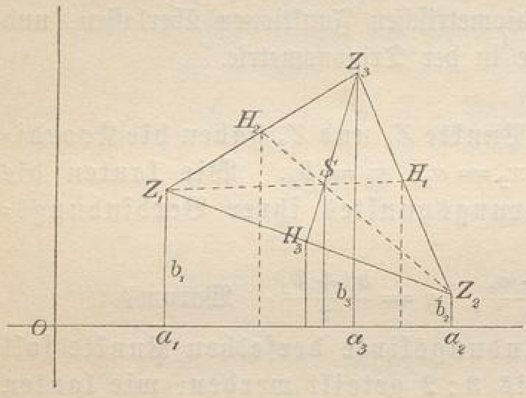
111) **Aufgabe.** Drei Punkte Z_1, Z_2, Z_3 haben die Koordinaten $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Welches sind die Koordinaten des Halbierungspunktes H_1 der Geraden $Z_2 Z_3$; und wie heißen

die Koordinaten des Punktes S, der die Gerade Z_1H_1 im Verhältnis 2 : 1 teilt?

Auflösung. Die Koordinaten von H_1 in Fig. 89 sind $x = \frac{a_2 + a_3}{2}$ und $y = \frac{b_2 + b_3}{2}$. Die Koordinaten von S sind $x = \frac{1a_1 + 2\frac{a_2 + a_3}{2}}{2 + 1}$ $= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, $y = \frac{1b_1 + 2\frac{b_2 + b_3}{2}}{2 + 1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$.

Bemerkung. Dasselbe Resultat findet man, wenn man Z_2H_2 und ebenso Z_3H_3 im Verhältnis 2 : 1 teilt. Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem Punkte, dem Punkte mittleren Abstandes von den (beliebig gewählten) Koordinatenachsen.

Fig. 89.



Nimmt man einen vierten Punkt Z_4 dazu, und teilt man SZ_4 im Verhältnis 3 : 1, so hat der Teilpunkt die Koordinaten

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$y = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}.$$

Der neue Teilpunkt ist also ebenfalls der Punkt mittleren Abstandes. In ähnlicher Weise kann man fortfahren. Die Reihenfolge der Konstruktion ist dabei vollständig gleichgültig. Man erhält so den Schwerpunkt von 3, 4, 5 ... gleich schwer zu denkenden Punkten der Ebene, der also der Punkt mittleren Abstandes von beiden Achsen ist.

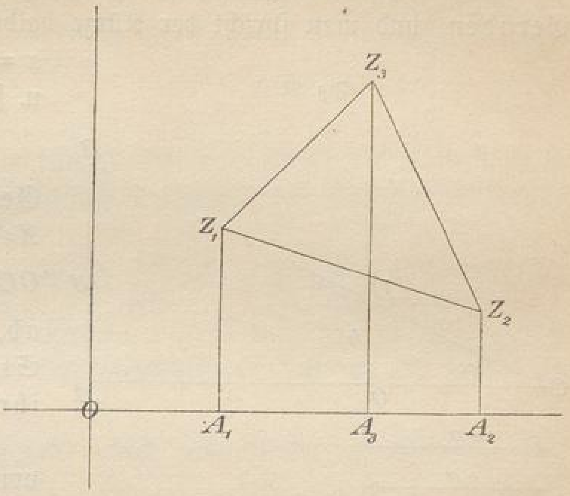
112) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lang ist ihre Verbindungslinie, und welche Neigung besitzt sie?

Auflösung. $\overline{Z_1Z_2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$. Die Neigung bestimmt sich aus $\tan\alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

113) **Aufgabe.** Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks $Z_1Z_2Z_3$, wenn die Eckpunkte die Abscissen a_1, a_2, a_3 und die Ordinaten b_1, b_2, b_3 haben? (Fig. 90.)

Auflösung.

Fig. 90.



$$F = A_1 A_3 Z_3 Z_1 + A_3 A_2 Z_2 Z_3 - A_1 A_2 Z_2 Z_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_3 - a_1)(b_1 + b_3) + \tfrac{1}{2}(a_2 - a_3)(b_2 + b_3) - \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}[(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1)].$$

Bemerkung. Für den Fall, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist die Fläche gleich Null. Die Bedingung dafür, daß die Punkte $Z_1 Z_2 Z_3$ in einer Geraden liegen, ist also durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie.

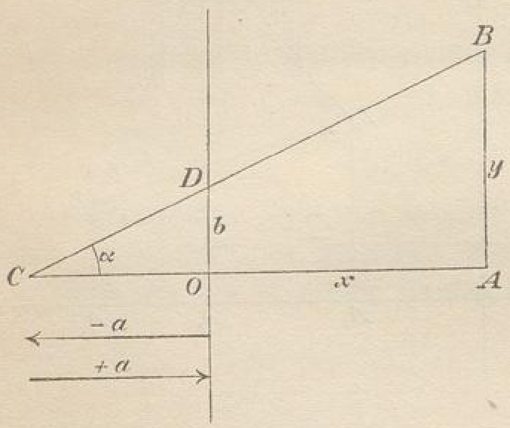
114) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $x = a$ gilt, ist eine Parallele zur Y-Achse in der Entfernung $x = +a$. Symmetrisch dazu liegt die Gerade, für deren sämtliche Punkte die Gleichung $x = -a$ gilt. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche $y = b$ ist, ist eine Parallele zur X-Achse in der Entfernung $y = +b$. Symmetrisch dagegen liegt die Gerade, für deren Punkte die Gleichung $y = -b$ gilt.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 45^0, die also den 3. und 1. Quadranten durchschneidet. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = -x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 135^0 oder -45^0, die also durch den 2. und 4. Quadranten geht.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $\frac{y}{x} = \tan\alpha$ oder $y = x \tan\alpha$ gilt, ist die Gerade durch den Nullpunkt von der Neigung α.

Man nennt die betreffende Gleichung stets die Gleichung der Geraden, und man spricht der Kürze halber z. B. von der Geraden $x = a$, $y = b$, $y = x \tan \alpha$ u. s. w.

Fig. 91.



115) **Aufgabe.** Eine Gerade schneide auf der X-Achse das Stück $OC = -a$ (oder $CO = +a$) ab, auf der Y-Achse das Stück $OD = b$. Wie lautet ihre Gleichung? (Fig. 91.)

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkte B der Geraden CD das Lot BA auf die X-Achse und setze $OA = x$ und $AB = y$; dann ist $\triangle CAB \sim \triangle COD$, also $AB : OD = CA : CO$, d. h. $y : b = (a + x) : a$. Daraus folgt

$$y = \frac{b}{a} x + b \quad \text{oder} \quad \frac{x}{(-a)} + \frac{y}{b} = 1$$

als die Gleichung der Geraden, die beiderseitig ins Endlose verlängert zu denken ist.

Bemerkung. Die Gerade, die von der X-Achse $OC_1 = +a$, von der Y-Achse $OD = b$ abschneidet, liegt symmetrisch gegen die vorige in Bezug auf die Y-Achse. Ihre Gleichung ergiebt sich als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Möge nun a und ebenso b positiv oder negativ sein, eine Gleichung der letzten Form stellt stets eine Gerade dar, die von den Koordinatenachsen die Stücke $OC = a$ und $OD = b$ abschneidet.

116) **Aufgabe.** Was stellt die allgemeine Gleichung ersten Grades $ax + by = c$ dar, wo a, b und c reelle Größen sind?

Auflösung. Die Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)} = 1,$$

sie stellt also stets eine Gerade dar, die von der X-Achse das Stück $\frac{c}{a}$, von der Y-Achse das Stück $\frac{c}{b}$ abschneidet. Die einzige Bedingung ist, daß a und b nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, denn sonst würden beide Abschnitte unendlich groß sein und die Gerade ganz in den unendlichen Bereich fallen.

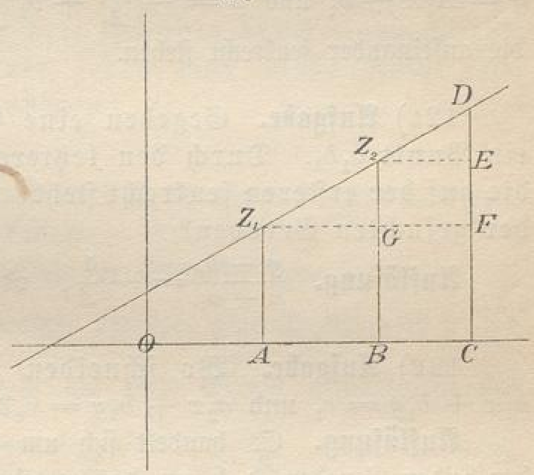
117) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die von der Y-Achse das Stück b abschneidet und die Neigung α hat?

Auflösung. In Fig. 91 ist $\frac{AB}{CA} = \tan\alpha$, also $\frac{y}{a+x} = \tan\alpha$ oder $y = x\tan\alpha + a\tan\alpha$, also, da $a\tan\alpha = b$ ist, $y = x\tan\alpha + b$. Bezeichnet man $\tan\alpha$ als Richtungskonstante mit A, so lautet die Gleichung $y = Ax + b$.

Der Aufgabe, zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, entspricht die folgende:

118) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte Z_1 und Z_2 mit den Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ geht?

Fig. 92.



Auflösung. In Fig. 92 ist $\triangle Z_2ED \sim \triangle Z_1GZ_2$, folglich

$$\frac{ED}{Z_2E} = \frac{GZ_2}{Z_1G},$$

oder

$$\frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1},$$

oder

$$y - b_2 = (x-a_2)\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}.$$

Mit Hülfe anderer ähnlicher Dreiecke findet man ebenso

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}, \text{ und ebenso } \frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{y-b_1}{x-a_1}.$$

119) Der Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade von gegebener Neigung α zu legen, entspricht folgende

Aufgabe. Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Punkt Z mit den Koordinaten a und b, welche die Neigung α hat?

Auflösung. Die entsprechende Figur ergiebt

$$\frac{y-b}{x-a} = \tan\alpha \quad \text{oder} \quad y-b = (x-a)\tan\alpha.$$

120) **Aufgabe.** Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden $y = A_1x + b_1$ und $y = A_2x + b_2$?

Auflösung. Sie schneiden sich unter einem Winkel γ, der gleich der Differenz ihrer Neigungswinkel ist, also unter $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$, wo sich α_1 aus $A_1 = \tan\alpha_1$ und α_2 aus $A_2 = \tan\alpha_2$ bestimmt. Nun ist aber $\tan\gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$, also bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\tan\gamma = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2}.$$

Die Linien sind parallel, sobald $A_1 = A_2$ ist, was $\tan\gamma = 0$ giebt. Ist dagegen der Nenner des Bruches gleich Null, d. h. $1 + A_1A_2 = 0$ oder $A_2 = -\frac{1}{A_1}$, so wird $\tan\gamma = \infty$, d. h. $\gamma = 90^0$, und die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Gleichungen von der Form $y = A_1x + b_1$ und $y = -\frac{x}{A_1} + b_2$ stellen also stets Gerade dar, die aufeinander senkrecht stehen.

121) **Aufgabe.** Gegeben eine Gerade $y = Ax + b$ und ein Punkt a_1b_1. Durch den letzteren eine Gerade zu legen, die auf der ersteren senkrecht steht. Wie lautet die Gleichung der gesuchten Geraden?

Auflösung. $\frac{y-b_1}{x-a_1} = -\frac{1}{A}$, oder $y - b_1 = \frac{a_1 - x}{A}$.

122) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Geraden $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$?

Auflösung. Es handelt sich um den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Geraden, d. h. um das gemeinschaftliche x und y der beiden Gleichungen oder, was dasselbe ist, um die Bestimmung von x und y aus den beiden Gleichungen. Die Lösung ist

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Ebenso schneiden sich die Geraden $y = A_1x + b_1$ und $y = A_2x + b_2$ in dem Punkte

$$x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \quad y = \frac{A_1b_2 - A_2b_1}{A_1 - A_2}.$$

Die Geraden $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$ und $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$ schneiden sich ebenso in

$$x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

123) **Bemerkung.** Sind $a_1 x + b_1 y = c_1$ und $a_2 x + b_2 y = c_2$ die Gleichungen zweier Geraden, multipliziert man die erste beiderseits mit einem reellen Faktor m_1 und die zweite mit einem Faktor m_2, und addiert man die linken und ebenso die rechten Seiten, so entsteht eine neue Gleichung von der Form

$$x(m_1 a_1 + m_2 a_2) + y(m_1 b_1 + m_2 b_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Da diese Gleichung durch bloße Umformung aus den beiden ersten entstanden ist, giebt sie mit jeder derselben als Lösung dasselbe x und y, wie jene beiden. Alle drei durch die Gleichungen dargestellten Geraden gehen also durch einen Punkt. Folglich:

Hat man drei Gleichungen ersten Grades, und ist die dritte Gleichung eine bloße Folge der beiden anderen, so gehen die drei durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt.

Gehen umgekehrt die drei Geraden durch einen Punkt, so ist die Gleichung einer jeden eine bloße Folge der Gleichungen der beiden anderen.

124) **Aufgabe.** Zu beweisen, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Auflösung. Die Koordinaten der Eckpunkte seien a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3. Die Gleichung der Geraden, die $a_1 b_1$ gegenüberliegt, ist $\frac{y - b_3}{x - a_3} = \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = A$, das von $a_1 b_1$ auf diese Gerade gefällte Lot hat also die Richtungskonstante $A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$. Seine Gleichung ist demnach $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$ oder $x(a_3 - a_2) + y(b_3 - b_2) = a_1 a_3 - a_1 a_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2$. Ebenso sind die Gleichungen der anderen Lote, wie schon die Vertauschung der Indices zeigt,

$$x(a_1 - a_3) + y(b_1 - b_3) = a_2 a_1 - a_2 a_3 + b_2 b_1 - b_2 b_3,$$
$$x(a_2 - a_1) + y(b_2 - b_1) = a_3 a_2 - a_3 a_1 + b_3 b_2 - b_3 b_1.$$

Da man durch Addition aus den beiden ersten Gleichungen die dritte erhält, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

Bemerkung. Ebenso kann man zeigen, daß die Mittelsenkrechten, die Mittellinien und gewisse Ecktransversalen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

125) **Aufgabe.** Durch einen Punkt ab gehen die Geraden $\frac{y-b}{x-a} = A_1 = \tan\alpha_1$ und $\frac{y-b}{x-a} = A_2 = \tan\alpha_2$. Wie lautet die Gleichung der Winkelhalbierenden?

Auflösung. Ihre Neigung ist entweder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (mittlere Neigung) oder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + 90^0$. Die Gleichung also ist $\frac{y-b}{x-a} = \tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, oder $\frac{y-b}{x-a} = -\cot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. [Will man die Neigung mit Hülfe der A ausdrücken, so setze man $\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha_1}{2} + \tan\frac{\alpha_2}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2}}$ und leite aus $\tan\alpha_1 = \frac{2\tan\frac{\alpha_1}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha_1}{2}}$ die Formel $\tan\frac{\alpha_1}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha_1}}{\tan\alpha_1}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{1+A_1^2}}{A_1}$ ab, u. s. w.]

d) Die Gleichung des Kreises.

126) Ist der Kreis mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt des Koordinatensystems geschlagen, so gilt für jeden Punkt xy des Kreises die Gleichung $x^2 + y^2 = c^2$. (Fig. 93.)

Fig. 93.

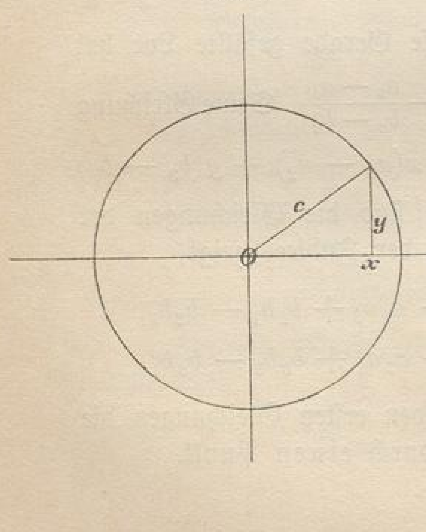
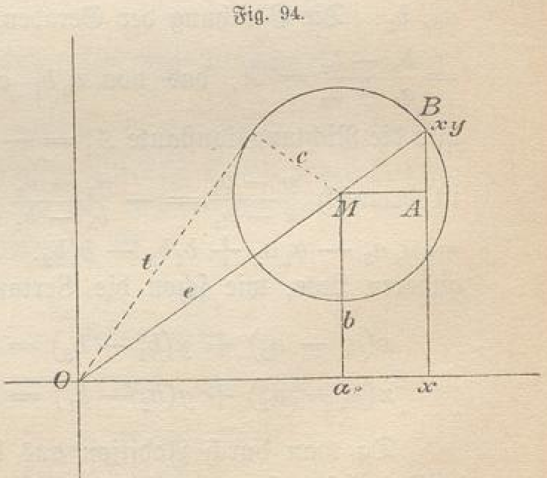


Fig. 94.



127) Ist er dagegen um einen Punkt mit den Koordinaten a, b geschlagen (Fig. 94), so folgt für jeden Punkt xy des Kreises

$$MA^2 + AB^2 = c^2,$$

oder

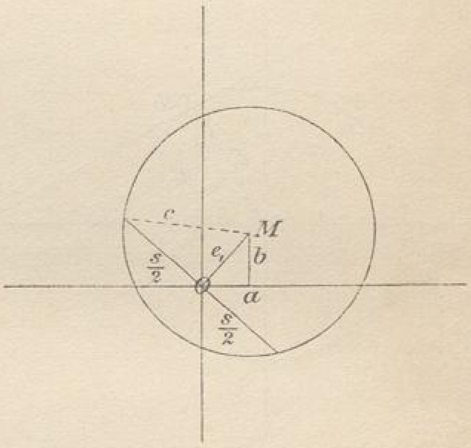
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

so bedeutet der eingeklammerte konstante Ausdruck, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems außerhalb des Kreises liegt, das Quadrat der vom Nullpunkte aus gezogenen Tangente, denn $t^2 = e^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2$. (Fig. 94.) Liegt dagegen O innerhalb des Kreises, wie in Fig. 95, so ist $a^2 + b^2 - c^2 = e_1{}^2 - c^2 = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$, also gleich dem negativen Quadrat der halben kürzesten Sehne durch O. In beiden Fällen ist $a^2 + b^2 - c^2$ die früher erklärte Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis. (Vgl. Abschnitt 87.) Bezeichnet man sie mit P_0, so kann man die Kreisgleichung auch schreiben

Fig. 95.



$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P_0 = 0.$$

128) **Aufgabe.** Gegeben ein Kreis um den Punkt a, b mit dem Radius c und eine Gerade von der Gleichung $y = Ax + b_1$. Wo schneiden sich beide?

Auflösung. Bestimme x und y aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$
$$y = Ax + b_1.$$

Es ergeben sich zwei Werte, die entweder reell oder imaginär sind. Ausnahmsweise können sie auch in einen zusammenfallen. Dem entsprechen die Fälle des Schneidens, des Nichtschneidens und des Berührens.

129) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Tangente in einem Punkte $x_1 y_1$ des mit Radius c um den Nullpunkt geschlagenen Kreises?

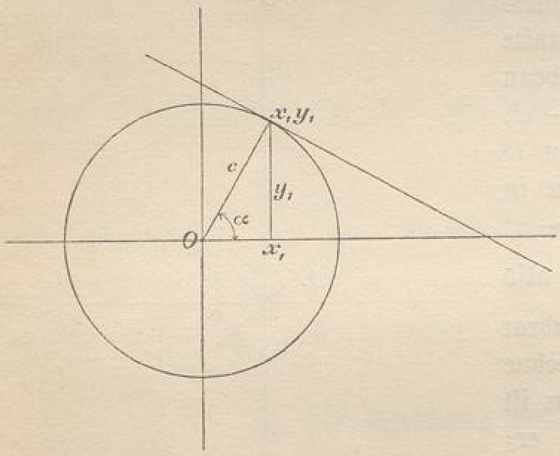
Auflösung. Der zugehörige Radius hat die Richtungskonstante

$$A = \tan\alpha = \frac{y_1}{x_1},$$

die Tangente also die Richtungskonstante

$$A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Fig. 96.



Ihre Gleichung lautet also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1},$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber $x_1^2 + y_1^2 = c^2$ ist, so lautet die Gleichung einfacher $xx_1 + yy_1 = c^2$.

Bemerkung. Die Tangentengleichung läßt sich demnach unmittelbar aus der Kreisgleichung $xx + yy = c^2$ ableiten, indem man einem der Faktoren x und einem der y den Index 1 beilegt.

130) **Aufgabe.** Die vorige Aufgabe für einen um den Punkt $x = a$, $y = b$ geschlagenen Kreis.

Die vorige Methode ergiebt als Tangentengleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

was sich ebenfalls bequem mit der Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

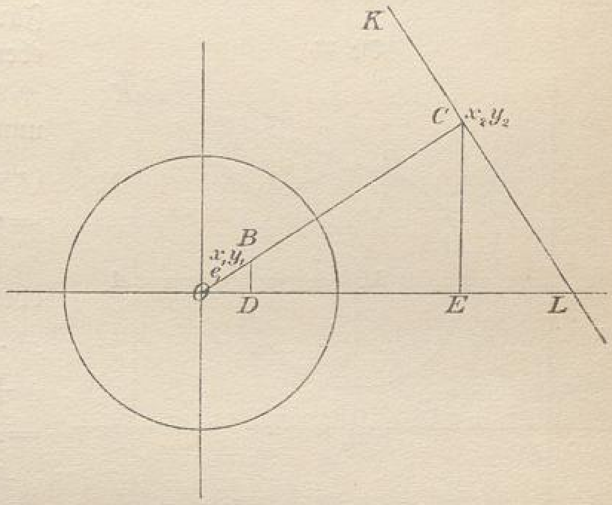
in Beziehung setzen läßt.

131) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare eines innerhalb (oder außerhalb) des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punktes $x_1 y_1$?

Auflösung. Man bilde in Fig. 97 auf dem zu $x_1 y_1$ gehörigen Radius den reciproken Punkt $x_2 y_2$. Hat der erstere von O die Entfernung e_1, so hat der andere die Entfernung $\frac{c^2}{e_1}$. Demnach ist $\frac{OB}{OC} = \frac{e_1}{\left(\frac{c^2}{e_1}\right)} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, und ebenso $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e_1^{\,2}}{c^2}$, also $x_2 = \frac{x_1 c^2}{e_1^{\,2}}$, $y_2 = \frac{y_1 c^2}{e_1^{\,2}}$. Der Radius hat die Richtungskonstante $A = \frac{y_1}{x_1}$, die Polare also die Richtungskonstante $-\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}$. Ihre Gleichung ist also

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Fig. 97.



oder

$$yy_1 - y_1 y_2 = -xx_1 + x_1 x_2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Setzt man für x_2 und y_2 die oben berechneten Werte ein, so geht die rechte Seite über in $\frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{e_1^{\,2}} c^2$ oder in c^2, und es ergiebt sich wie bei der Tangente, die Gleichung

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

(Für den Fall, daß der Punkt außerhalb liegt, gilt dieselbe Entwickelung. Zur Übung soll unten noch eine andere gegeben werden.)

132) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Kreise $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = c_1^{\,2}$ und $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = c_2^{\,2}$?

Auflösung. Die Gleichungen lassen sich schreiben

1. $$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 = 0,$$

2. $$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 = 0,$$

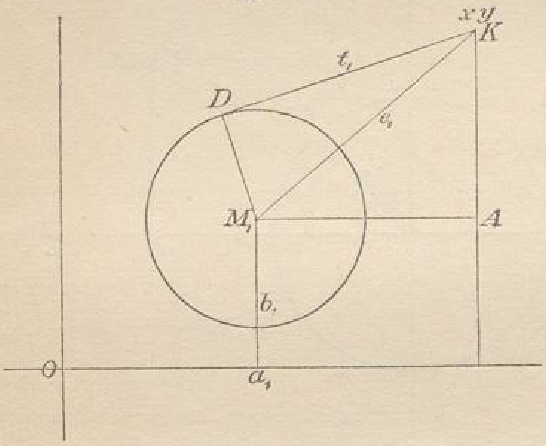
wo $P_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - c_1^{\,2}$ und $P_2 = a_2^{\,2} + b_2^{\,2} - c_2^{\,2}$ ist. Durch Subtraktion erhält man die Gleichung ersten Grades

3. $$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Da sie aber aus den beiden anderen Gleichungen abgeleitet ist, so ist die Gleichung eine durch die Schnittpunkte der Kreise gehende Gerade, d. h. die Gleichung der gemeinschaftlichen Sekante (Potenzlinie). Aus dieser Gleichung und einer der beiden ersteren sind die Koordinaten x und y der beiden Schnittpunkte zu berechnen.

133) Was bedeutet aber Gleichung 3., wenn die Kreise sich nicht schneiden? Vermutlich wiederum die Potenzlinie, d. h. die Linie gleicher Tangenten. Die Gleichung dieser Linie bestimmt sich folgendermaßen: In Fig. 98 ist $t_1^2 = e_1^2 - c_1^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2$. Für den zweiten Kreis wird ebenso $t_2^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2$. Soll nun $t_1 = t_2$ sein, so ist

Fig. 98.



$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + (a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2),$$

oder nach Hebung der gleichen Glieder und bei Einführung der Bezeichnungen P_1 und P_2

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Demnach ist die Gleichung 3. auch im Falle des Nichtschneidens die der Potenzlinie oder der Linie gleicher Tangenten. Also:

Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise stets die Gleichung der Potenzlinie.

134) Daß die Potenzlinien dreier Kreise stets durch einen Punkt, das Potenzcentrum, gehen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Sind a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 die Kreismittelpunkte und c_1, c_2, c_3 die Radien, so sind die Gleichungen der Potenzlinien:

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2,$$
$$2x(a_2 - a_3) + 2y(b_2 - b_3) = P_2 - P_3,$$
$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = P_3 - P_1.$$

Durch Addition erhält man aus den beiden ersten Gleichungen die dritte, folglich gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

135) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Berührungssehne (Polare) zu einem außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punkte $x_1 y_1$? (Vgl. 131.)

Auflösung. Das Quadrat der Tangente ist, wie früher, $t^2 = e^2 - c^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$. Der mit t um $x_1 y_1$ geschlagene Kreis hat also die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = t^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$, oder, wenn man die Klammern ausrechnet und einiges hebt:

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = - c^2.$$

Der gegebene Kreis war aber

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

durch Subtraktion erhält man die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise, d. h. die der gesuchten Berührungssehne, also $2xx_1 + 2yy_1 = 2c^2$, oder, wie oben

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

136) **Bemerkung.** Sämtliche Punkte der senkrechten Geraden $x_1 = a$ haben, wenn y_n die veränderliche Ordinate bedeutet, in Bezug auf den untersuchten Kreis Polaren von der Gleichung

$$xa + yy_n = c^2.$$

Setzt man hier $y = 0$, so wird $xa = c^2$ oder $x = \frac{c^2}{a}$. Folglich: Die Polaren sämtlicher Punkte der Geraden $x_1 = a$ gehen durch den reciproken Punkt $x_2 = \frac{c^2}{a}$. (Was geometrisch von dieser Geraden gilt, gilt von sämtlichen Geraden.)

137) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare zu einem Punkte $x_1 y_1$ in Bezug auf den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$?

Die nach obiger Methode auszuführende Rechnung führt auf die Gleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

die wieder in einfacher Beziehung zur Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

steht.

Das Gegebene reicht hin, eine große Zahl der früher behandelten Sätze über Gerade und Kreise mit Hülfe der Koordinatenlehre zu beweisen und entsprechende Aufgaben durch Rechnung zur Lösung zu bringen, besonders auch solche der neueren Geometrie.

XIV. Zusammenstellung der wesentlichsten Resultate.

a) Kreislehre und neuere Geometrie.

1) Ptolemäus: Im Sehnenviereck ist

$$pq = ac + bd, \qquad \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2) Im Dreieck hat der Mittelpunkt des Um-Kreises von denen der vier Berührungskreise die Entfernungen $e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$, $e_1 = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_1}$, $e_2 = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_2}$, $e_3 = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_3}$. Außerdem ist $r = \frac{abc}{4F}$.

3) Im Dreieck liegen der Höhendurchschnitt, der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Um-Kreises auf einer Geraden (Eulersche Gerade), und die vier Punkte sind harmonische.

4) Im vollständigen Vierseit sind die drei Diagonalen harmonisch geteilt.

5) Pascal: Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

6) Die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier Geraden, den Ähnlichkeitsachsen.

7) Jede Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

8) Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gehen ihre Polaren durch einen Punkt.

9) Harmonische Punkte haben zu Polaren harmonische Strahlen.

10) Brianchon: Im Tangentensechseck schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.

11) Die Kurve $\frac{p}{q} = c$ ist ein Kreis.

12) Das Inversionsbild eines Kreises ist ein Kreis. Die Inversionsabbildung ist winkeltreu.

13) Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

b) Koordinatenlehre.

1) Zusammenhang zwischen den Cartesischen und den Polar-Koordinaten:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha.$$

2) Der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems hat als Koordinaten die arithmetischen Mittel der Einzelkoordinaten.

3) Drei Punkte liegen auf einer Geraden, wenn

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

4) Hauptgleichungen der Geraden:

$$y = Ax + b, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5) Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y bedeutet eine Gerade.

6) Ist eine von drei Gleichungen ersten Grades eine Folge der beiden anderen, so gehen die drei entsprechenden Geraden durch einen Punkt.

7) Kreisgleichungen:

$$x^2 + y^2 = c^2,$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

8) Gleichung der Polare des Punktes $x_1 y_1$ ist

$$x x_1 + y y_1 = c^2$$

bezw.

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2.$$

Liegt der Punkt $x_1 y_1$ auf der Peripherie, so handelt es sich um die Gleichung der Tangente. Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise die Gleichung ihrer Potenzlinie.