



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik**

Zweiter Teil, für die 3 Oberklassen der höheren Lehranstaltungen  
bestimmt

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93613](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93613)

Methodisches Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Gustav Holzmüller.

—  
Zweiter Teil.

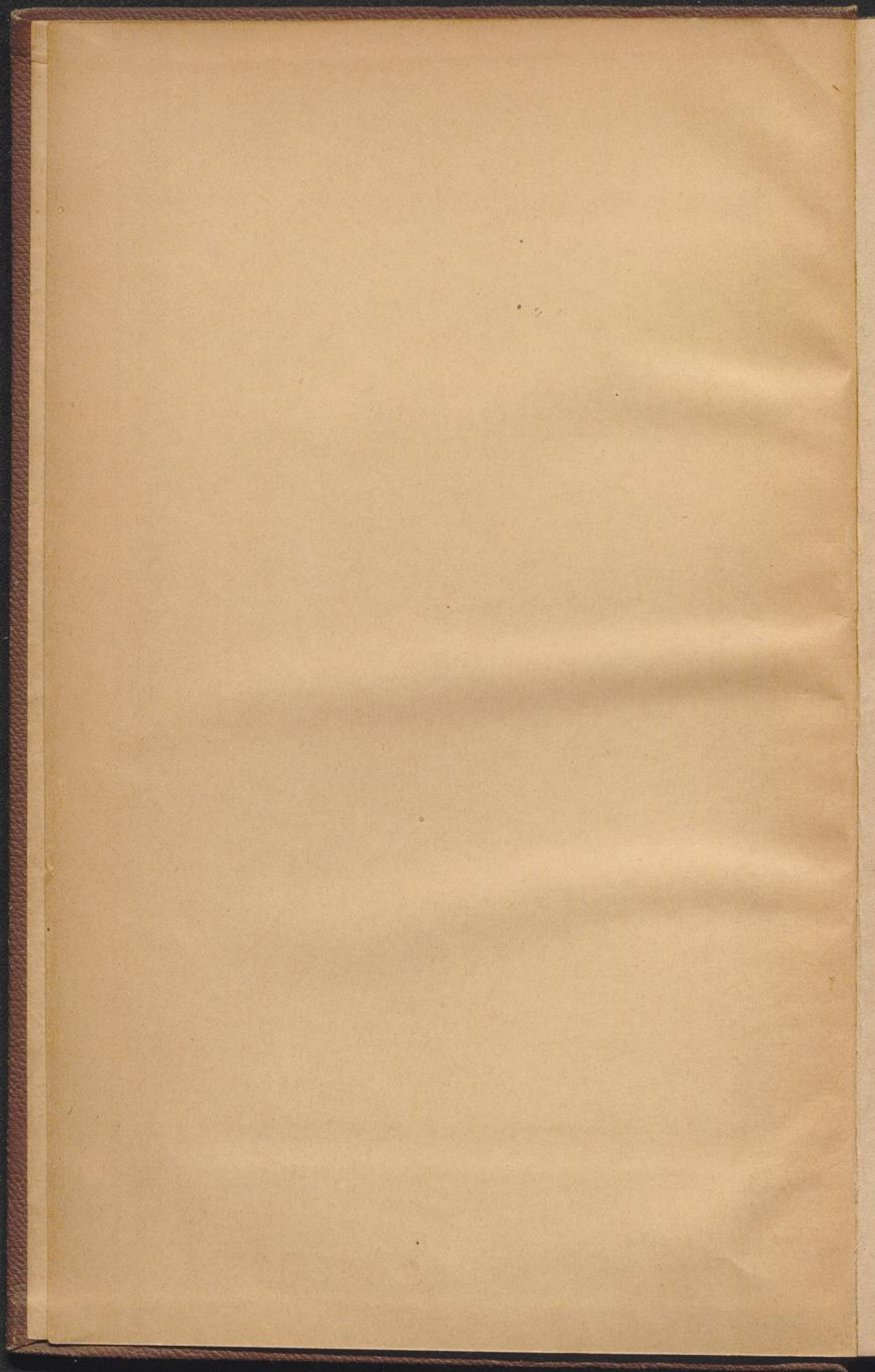
188

~~S. 71 4234~~

~~1169~~







~~5. 17 4234~~  
~~1169~~

Methodisches Lehrbuch  
der  
**Elementar=Mathematik**

von  
Prof. Dr. Gustav Holzmüller,  
Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W.,  
Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher.

Zweiter Teil,  
für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt.

Mit 210 Figuren im Text.

Zweite Auflage.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.  
1897.

Für weitergehende Schulen ist noch ein dritter Teil vorhanden.  
Eine besondere Ausgabe für Gymnasien, in 2 Teilen, ist im gleichen  
Verlage erschienen.

Alle Rechte,  
einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

03

M

363 88



## Vorwort zur ersten Auflage.

Der zweite Teil des methodischen Lehrbuchs, den ich hiermit den Fachgenossen übergebe, umfaßt den Lehrstoff der drei Oberklassen des Gymnasiums und des Realgymnasiums. Da einzelne Schulen noch etwas weiter gehen möchten, und da außerdem noch den Bedürfnissen der Ober-Realschulen und der höher organisierten Fachschulen genügt werden muß, soll demnächst noch ein besonderer Ergänzungsband erscheinen.

Über die Methode und die Auswahl des Lehrstoffs habe ich mich auch für diesen zweiten Teil in einem Begleitworte, welches den Lehrern der Mathematik von der Verlagsbuchhandlung gern zur Verfügung gestellt wird, ausführlicher ausgesprochen. Hier sei nur bemerkt, daß die Einteilung nach Jahrgängen für die Oberklassen unterbleiben mußte, weil diese bei den genannten Schulgruppen bezüglich des Lehrplans in weit höherem Grade als die Mittelklassen auseinandergehen.

Der erste Teil wurde sofort nach dem Erscheinen an mehreren Schulen Preußens und außerdem in Braunschweig und der Schweiz eingeführt, sodaß voraussichtlich schon das nächste Jahr eine neue Auflage verlangt. Etwaige Wünsche und Verbesserungsvorschläge der Herren Kollegen werde ich gern berücksichtigen, wenn sie mir bis zum Herbst dieses Jahres zugehen.

Bezüglich des vorliegenden Teiles bin ich zweien meiner Kollegen zu besonderem Danke verpflichtet. Herr Ingenieur Zimmermann erbot sich bei meiner Geschäftsüberhäufung zur exakten Herstellung der Mehrzahl der von mir nur skizzierten Figuren, deren korrekte Ausführung wohl auch den größten Anforderungen entsprechen dürfte. Herr Gewerbeschullehrer Spannagel unterstützte mich wesentlich beim Lesen der Korrekturbogen. Endlich muß ich noch der Verlagsbuchhandlung für das bereitwillige Entgegenkommen hinsichtlich der kostspieligen Aus-

stattung des Werkes mit einer ungewöhnlich großen Figurenzahl den verbindlichsten Dank aussprechen.

Möge das Buch seinen Zweck erfüllen und namentlich zu einem gesunden Betriebe der neuen Lehrpläne einigermaßen beitragen.

Hagen i/W., im Juli 1894.

Dr. G. Holzmüller.

### Vorwort zur zweiten Auflage.

Abgesehen von der Einschaltung einiger Übungsbeispiele ist in der neuen Auflage nichts Wesentliches geändert worden. So blieben z. B. auch die Nummern der Abschnitte und der Figuren überall dieselben. Beide Auflagen können daher im Unterrichte nebeneinander gebraucht werden.

Bei der überaus großen Zahl wohlwollender Besprechungen, die aus dem In- und Auslande an mich gelangten, fand ich keinen Anlaß, von der eingeschlagenen Methode abzugehen. Nur habe ich auch hier am Schlusse der Hauptabschnitte die wichtigsten Resultate zusammengestellt, damit der unentbehrliche Lehrstoff leicht erkannt und nach Bedürfnis von den bloßen Übungsbeispielen abge sondert werden könne. Daß nicht sämtliche Übungen durchgenommen werden sollen oder müssen, werde noch einmal hervorgehoben. Der reiche Übungsstoff ist zur freien Auswahl gestellt, und diese kann von dem Lehrer je nach der Zahl und Begabung seiner Schüler zweckmäßig getroffen werden. Auch scheint es im Interesse des Lehrers selbst zu liegen, in den aufeinanderfolgenden Jahren mit dem Übungsstoffe zu wechseln.

Hagen i/W., im November 1895.

Prof. Dr. G. Holzmüller.

# Inhalts-Verzeichnis.



## Erste Abteilung.

### Geometrie der Geraden und des Kreises.

	Seite
I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck . . . . .	1
II. Übungen an den Dreieckskreisen . . . . .	8
a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks . . . . .	8
b) Der Radius des Um-Kreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks. . . . .	11
III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkel- halbierenden des Dreiecks. . . . .	17
IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben . . . . .	21
Lösungen mit Hülfe von Lehrsätzen . . . . .	21
Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder . . . . .	24
Methode der Parallelverschiebungen . . . . .	25
Methode der konzentrischen Verschiebung . . . . .	26
Methode der Ähnlichkeit . . . . .	26
Methode der Umkehrung der Aufgabe . . . . .	28
Methode der Drehung . . . . .	29
Methode des geometrischen Ortes . . . . .	30
Methode der algebraischen Analysis . . . . .	32
V. Übergang zur neueren Geometrie . . . . .	33
Satz des Ceva . . . . .	33
Satz des Menelaos . . . . .	35
Anwendungen auf vollständiges Vierseit, Pascalschen Satz und Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise . . . . .	36
VI. Harmonische Punkte und Strahlen . . . . .	40
VII. Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Satz. . . . .	46
VIII. Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise, Pol und Polare. . . . .	52
IX. Die Inversion oder Spiegelung mittels reziproker Radien. . . . .	60
X. Potenz und Potenzlinien . . . . .	67
XI. Einige Berührungsaufgaben . . . . .	73
XII. Kartographische Anwendungen. . . . .	75
Mercatorskarte, Karte der nördlichen und südlichen, der östlichen und westlichen Halbkugel, Halbkugel der größten und kleinsten Wasser- masse nach Hipparch-PTOLEMÄUS . . . . .	75

	Seite
XIII. Der Koordinatenbegriff . . . . .	82
a) Graphische Darstellungen . . . . .	82
b) Die Koordinaten von Punkten . . . . .	86
c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie . . . . .	89
d) Die Gleichung des Kreises . . . . .	94
XIV. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	100

## Zweite Abteilung.

### Arithmetik.

I. Geometrische Reihen . . . . .	102
a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl . . . . .	102
b) Anwendung auf die Rentenrechnung . . . . .	105
c) Die geometrischen Reihen mit unendlich großer Gliederzahl . . . . .	108
II. Arithmetische Reihen . . . . .	114
a) Arithmetische Reihen erster Ordnung . . . . .	114
b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung . . . . .	115
III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten . . . . .	119
IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes . . . . .	124
V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen . . . . .	128
VI. Der Moivre'sche Lehrsatz und einige aus ihm abgeleitete Reihen . . . . .	134
VII. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der $n$ ten Wurzeln aus der Einheit und aus anderen Zahlen . . . . .	141
VIII. Reciproke Gleichungen und Anwendung derselben auf reducierbare Gleichungen höheren Grades . . . . .	148
IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . . .	158
X. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	162

## Dritte Abteilung.

### Trigonometrie.

I. Verallgemeinerung der Grundbegriffe . . . . .	164
II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen . . . . .	172
III. Goniometrische Übungen . . . . .	177
IV. Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks . . . . .	184
V. Dreiecksberechnungen . . . . .	188
VI. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln . . . . .	193

## Vierte Abteilung.

## Stereometrie.

	Seite
I. Begriff der Drehung und Entstehung von Drehungsgebilden . . .	195
II. Ebenen und Gerade im Raume . . . . .	197
III. Die körperlichen Ecken . . . . .	204
IV. Die Fundamentalkonstruktionen und einige Anwendungen derselben. . . . .	209
V. Anleitung zum korrekten stereometrischen Zeichnen . . . . .	212
a) Die schräge Parallelprojektion . . . . .	212
b) Die senkrechte Projektion . . . . .	215
VI. Berechnungsübungen . . . . .	219
a) Körperstumpfe . . . . .	219
b) Kugelberechnungen . . . . .	225
c) Übungsaufgaben. . . . .	231
VII. Der Schwerpunkt, die Guldin'schen Regeln und die Sätze über abgechrägte Körper. . . . .	233
VIII. Die Newton-Simpson'sche Regel und die Summenformel . . . .	239
IX. Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen. . . . .	247
X. Zusammenstellung der wichtigsten Berechnungsformeln der Stereometrie . . . . .	251

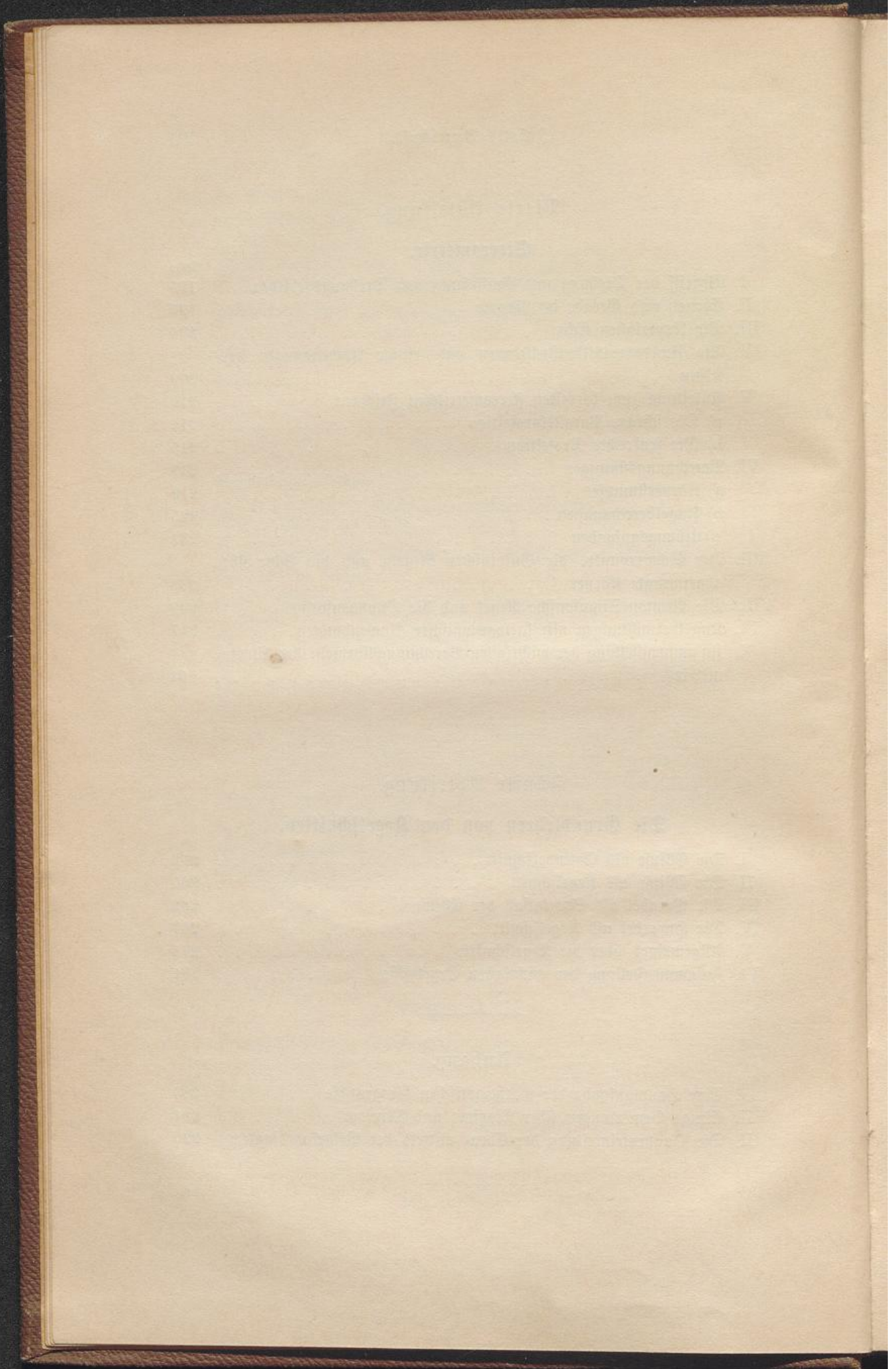
## Fünfte Abteilung.

## Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

I. Die Ellipse als Cylinderschnitt . . . . .	252
II. Die Ellipse als Kegelschnitt . . . . .	260
III. Die Parabel als Spezialfall der Ellipse . . . . .	262
IV. Die Hyperbel als Kegelschnitt . . . . .	267
V. Allgemeines über die Kegelschnitte . . . . .	275
VI. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	281

## Anhang.

I. Eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie . . . . .	283
II. Einige Bemerkungen über Maxima und Minima . . . . .	284
III. Die Quadrateinteilung der Ebene mittels der Polarkoordinaten .	290



# Erste Abteilung.

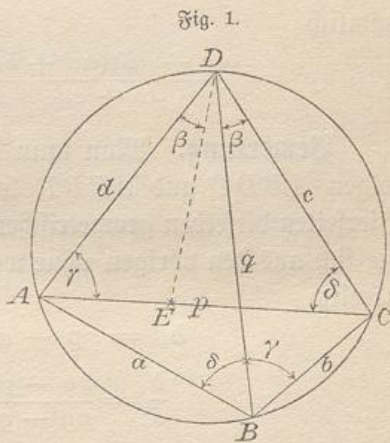
## Geometrie

### der Geraden und des Kreises.

#### I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck.

1) **Satz des Ptolemäus.\*)** Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

**Beweis.** Die Seiten des Sehnenvierecks  $ABCD$  in Fig. 1 seien  $a, b, c, d$ , die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sollen mit  $p$  und  $q$  bezeichnet werden. Legt man den Winkel  $BDC = \beta$  als  $ADE$  an  $AD$  an, dann ist  $\triangle BCD \sim \triangle AED$  (warum?), also  $\frac{AE}{d} = \frac{b}{q}$  und  $AE = \frac{bd}{q}$ . Außerdem ist  $\triangle DEC \sim \triangle DAB$  (warum?), folglich  $\frac{EC}{c} = \frac{a}{q}$  und  $EC = \frac{ac}{q}$ . Folglich ist  $AE + EC = p = \frac{ac + bd}{q}$  und  $pq = ac + bd$ .



2) **Folgerungen.** Setzt man das Dreieck  $ACD$  umgekehrt auf  $AC$ , so daß  $C$  und  $A$  ihre Stellen vertauschen, so entsteht ein Sehnenviereck  $ABCD_1$  mit der Seitenfolge  $abdc$ . Die Diagonale  $p$

\*) Der Satz wird an erster Stelle durchgenommen, um gegebenenfalls bei einem Parallellkursus der Trigonometrie sofort Anwendung zu finden.

bleibt, an Stelle von  $q$  aber tritt eine neue Diagonale  $t$ , und jetzt gilt die Gleichung  $pt = ad + bc$ . Setzt man in diesem neuen Viereck das Dreieck  $BCD_1$  umgekehrt auf  $BD_1$ , so entsteht ein Sehnenviereck  $ABC_1D_1$  mit der Seitenfolge  $adbc$  und den Diagonalen  $t$  und  $q$ , so daß  $qt = ab + cd$  wird. Durch Division folgt aus den beiden letzten Gleichungen der Satz

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Auf das ursprüngliche Viereck übertragen lautet er in Worten: Im Sehnenviereck ist der Quotient der Diagonalen gleich dem Quotienten der Summen aus den Produkten je zweier aneinanderstoßenden Seiten. (Die Reihenfolge ist so zu nehmen, daß jeder Diagonale Seitenpaare entsprechen, die mit ihr in denselben Punkten zusammenstoßen.)

[Satz 1) läßt sich auch mit Hülfe der Dreiecksformel\*)  $F = \frac{abc}{4r}$  beweisen. Nach dieser ist der Inhalt des Sehnenvierecks sowohl  $F = \frac{adq}{4r} + \frac{bcq}{4r}$ , als auch  $F = \frac{abp}{4r} + \frac{cdp}{4r}$ , so daß  $p(ab + cd) = q(ad + bc)$  ist, was der obigen Gleichung entspricht.]

Durch Multiplikation und Division erhält man aus den Gleichungen für  $pq$  und  $\frac{p}{q}$  Formeln zur Berechnung von  $p$  und  $q$  aus den Seiten, nämlich

$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad q^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

**Bemerkung.** Man kann das Sehnenviereck auch in den Reihenfolgen  $ABDC$  und  $ACBD$  lesen. Macht man bei diesen gekreuzten Vierseiten dieselben geometrischen Betrachtungen, so findet man Formeln, die sich aus den vorigen ohne weiteres auf arithmetischem Wege ergeben, nämlich

$$bd = qp - ac, \quad ac = pq - bd,$$

$$\frac{b}{d} = \frac{qa - pc}{pa - qc}, \quad \frac{a}{c} = \frac{qb - pd}{pb - qd}.$$

[Aus  $p(ab + cd) = q(ad + bc)$  folgt z. B.  $a(pb - qd) = c(qb - pd)$ .]

[3] **Aufgabe.** Den Inhalt eines Sehnenvierecks mit den Seiten  $a, b, c$  und  $d$  zu berechnen.

\*) Vergleiche unten Abschnitt 9.

**Auflösung.** Man denke sich zwei Gegenseiten des Sehnenvierecks, z. B.  $a$  und  $c$  in Fig. 1, bis zu ihrem Schnittpunkte  $K$  verlängert. Mit Hilfe der Gleichung  $KB \cdot KA = KC \cdot KD$  läßt sich dann die Ähnlichkeit der Dreiecke  $KBC$  und  $KDA$  nachweisen. Die Flächen beider Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate von  $b$  und  $d$ , folglich ist  $\triangle KBC = \triangle KDA \cdot \frac{b^2}{d^2}$ , also ist Viereck  $ABCD = \triangle KDA - \triangle KBC = \triangle KDA \left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \triangle KDA \frac{d^2 - b^2}{d^2}$ . Setzt man  $KA = x$  und  $KD = y$ , so ist

$$\triangle KDA = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}.$$

Aus  $b : d = (x - a) : y$  folgt 1)  $dx - by = ad$ , aus  $b : d = (y - c) : x$  folgt 2)  $dy - bx = cd$ . Durch Addition folgt aus den Gleichungen 1) und 2)  $d(x+y) - b(x+y) = ad + cd$  oder  $(x+y)(d-b) = d(a+c)$ , durch Subtraktion hingegen  $d(x-y) + b(x-y) = ad - cd$  oder  $(x-y)(d+b) = d(a-c)$ . So ergibt sich  $x+y = \frac{d(a+c)}{d-b}$  und  $x-y = \frac{d(a-c)}{d+b}$ , also

$$x+y \pm d = \frac{d(a+c)}{d-b} \pm d = \frac{d}{d-b} (a+c \pm d \mp b)$$

$$\text{und } d \pm (x-y) = d \pm \frac{d(a-c)}{d+b} = \frac{d}{d+b} (d+b \pm a \mp c).$$

Einführung in die Gleichung für  $\triangle KDA$  giebt

$$\triangle KDA$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{d}{d-b} (a+c+d-b) \frac{d}{d-b} (a+c-d+b) \frac{d}{d+b} (d+b+a-c) \frac{d}{d+b} (d+b-a+c)}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{d^2}{d^2-b^2} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Folglich ist Viereck  $ABCD$

$$= \frac{d^2-b^2}{d^2} \cdot \frac{1}{4} \frac{d^2}{d^2-b^2} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Setzt man  $\frac{a+b+c+d}{2} = s$ , so ist die vereinfachte Formel:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

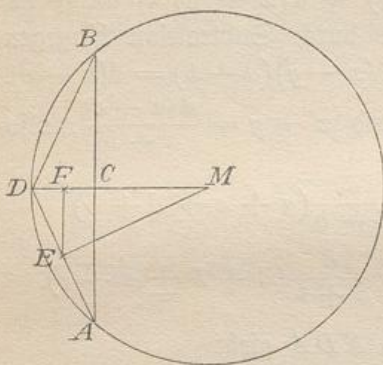
**Bemerkungen.** Ist eine der vier Seiten gleich Null, so handelt es sich um ein Dreieck, dem stets ein Kreis umbeschrieben werden

kann. Die Formel geht dann in die Heronische Dreiecksformel über, die demnach als spezieller Fall in der obigen enthalten ist.

Der interessante Satz wird dem indischen Mathematiker Brahmagupta zugeschrieben, der 598 nach Chr. geboren wurde. Das 12. und 18. Kapitel seines Werkes *Brahma-sphuta siddhanta*, d. h. das verbesserte System des Brahma, sind der Mathematik gewidmet und enthalten unter anderem die Elemente der Goniometrie nebst Sinustabellen und Regeln für die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten.]

4) **Aufgabe.** Aus dem Radius  $r$  eines Kreises und dem Halbmesser  $\rho$  eines einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks den Radius  $\rho'$  des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Fig. 2.



**Auflösung.** In Fig. 2 sei  $AB$  die Seite des dem Kreise mit Radius  $r$  einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks,  $MC = \rho$  der Radius des dem letzteren einbeschriebenen Kreises, also  $D$  der Halbierungspunkt des Bogens  $AB$ ,  $AD$  die Seite des  $2n$ -Ecks und  $ME = \rho'$  der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises. Zieht man  $EF \parallel AB$ , so ist  $F$  der Halbierungs-

punkt von  $CD$ , also  $MF = \frac{r + \rho}{2}$ . Nach Pythagoras ist aber  $ME^2 = MF \cdot MD$ , also  $\rho'^2 = \frac{r + \rho}{2} \cdot r$ , folglich  $\rho' = \sqrt{\frac{r(r + \rho)}{2}}$ .

**Bemerkung.** Ist  $u$  der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks, so ist der des umbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks das  $\frac{r}{\rho}$  fache. Berechnet man nun, vom Quadrat oder Sechseck oder Zehneck ausgehend, die  $\rho$  für das entsprechende  $2n$ -Eck,  $4n$ -Eck,  $8n$ -Eck u. s. w., so erhält man die angenäherte Berechnung von  $\pi$  auf bequemere Art, als nach der im ersten Teile benutzten Methode. (Vergl. Nr. 148.) Geht man vom Sechseck aus, so wird nach beiden Berechnungsarten der Reihe nach  $\rho_6 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ,  $\rho_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $\rho_{24} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ ,  $\rho_{48} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$  u. s. w., so daß bei dem  $6 \cdot 2^n$ -Eck die Zahl 2 im Ganzen  $n$ -mal

unter den Wurzeln steht. Dagegen sind die Vielecksseiten der Reihe nach  $s_6 = 1$ ,  $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ ,  $s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ , u. s. w. Die Seiten des um- beschriebenen  $n$ -Ecks sind der Reihe nach

$$t_6 = 2\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad t_{12} = 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}, \quad t_{24} = 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}},$$

$$t_{48} = 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \quad \text{u. s. w.}$$

5a) **Aufgabe.** Am regelmäßigen Fünfeck mit Seite  $a$  soll be- wiesen werden, daß die Diagonale  $d = \frac{a}{2} [\sqrt{5} + 1]$  ist, daß sie durch eine sie schneidende Diagonale in die Teile  $a$  und  $b = \frac{a}{2} [\sqrt{5} - 1]$ , also stetig geteilt wird, daß die Höhe durch die rechtwinklig schneidende Diagonale in die Teile  $e = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$  und  $f = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ , also ebenfalls stetig geteilt wird, während sie selbst die Länge  $\frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$  hat, daß ferner der Um-Kreis den Radius  $r = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ , der In- Kreis den Radius  $\rho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$  hat, so daß die Fläche

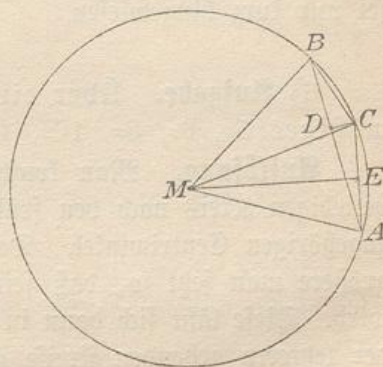
$$F = \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

ist. Am Zehneck lassen sich entsprechende Berechnungen ausführen.

[5b) **Aufgabe.** Die Seite des dem Kreise mit Radius  $r$  ein- beschriebenen Fünfzehneckes zu berechnen.

**Auflösung.** In Figur 3 sei  $AB = r$  die Seite des regelmäßigen 6-Ecks,  $AC = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$  die des regelmäßigen 10-Ecks, also  $BC$  die des regelmäßigen 15-Ecks, außerdem sei  $ME \perp AC$  und  $CD \perp AB$ . Dann ist  $\triangle BCD \sim \triangle MCE$  (denn  $\sphericalangle ABC$

Fig. 3.



$= \frac{1}{2} \sphericalangle AMC)$ , folglich  $BD : BC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} : r$ , also, wenn  $BC = x$  gesetzt wird,  $BD = \frac{x}{r} \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$ . Zugleich ist im Dreieck  $ABC$  nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für den spitzen Winkel  $AC^2 = x^2 + r^2 - 2r \cdot BD$ , also nach Einsetzung des Wertes von  $BD$

$$AC^2 = x^2 + r^2 - 2x \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2},$$

oder

$$x^2 - 2x \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = AC^2 - r^2.$$

Daraus folgt als Lösung

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4} + AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \frac{AC}{2} \sqrt{3}.$$

Einsetzung des Wertes von  $AC$  giebt

$$x = r \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \pm \frac{r}{4} (\sqrt{5}-1) \sqrt{3} = \frac{r}{4} [\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm (\sqrt{15}-\sqrt{3})].$$

Nur das negative Zeichen ist brauchbar, es giebt  $x_1 = 0,4158236 r$  als Seite des nach einem Umgange schließenden 15-Ecks. Das positive Zeichen giebt  $x_2 = 1,48629 r$ , was offenbar zu groß ist, und wozu, wie sich (z. B. goniometrisch) zeigen läßt, der Centriwinkel  $96^\circ = 60^\circ + 36^\circ$  gehört, so daß jetzt das 15-Eck erst nach viermaligem Umgange schließt.]

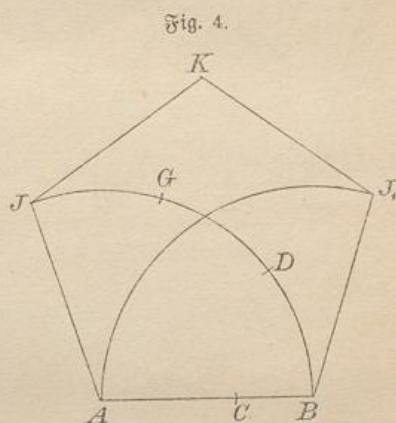
**Bemerkung.** Die Resultate dieses Abschnitts können benutzt werden, die goniometrischen Funktionen der Winkel  $12^\circ, 78^\circ, 24^\circ, 56^\circ, 48^\circ, 42^\circ$  u. s. w. zu berechnen. — Auf die Möglichkeit, Umfang und Inhalt des regelmäßigen 15-Ecks aus  $r$  oder der Seite  $b$  zu berechnen und auch die übrig bleibenden Segmentflächen des Kreises zu ermitteln, sei nur kurz hingewiesen.

6) **Aufgabe.** Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-Eck u. s. w. zu konstruieren.

**Auflösung.** Man konstruiere die  $n$ -Eckseite zunächst für einen beliebigen Kreis nach den früher gelehrteten Methoden und zeichne den zugehörigen Centriwinkel. Das erhaltene gleichschenklige Dreieck vergrößere man jetzt so, daß seine Basis gleich der gegebenen Geraden wird. Diese läßt sich dann in dem konzentrischen durch die Endpunkte der letzteren gehenden Kreise  $n$ -mal abtragen.

**Bemerkungen.** In einzelnen Spezialfällen lassen sich kürzere Wege einschlagen. Das regelmäßige Sechseck läßt sich ohne weiteres mit Hilfe des über der Geraden stehenden gleichseitigen Dreiecks zeichnen. Um das regelmäßige Achteck zu erhalten, kann man an die beiden Verlängerungen der Geraden den Winkel  $45^\circ$  anlegen. Die Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel schneiden sich dann im Mittelpunkt des gesuchten Achtecks.

Zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks teile man  $AB$  nach dem goldenen Schnitt in  $C$ , schlage um  $A$  mit  $AB$  einen Kreis, trage in diesen  $AC$  von  $B$  aus dreimal als Sehne ein, was  $D$ ,  $G$  und  $J$  giebt, wobei  $\sphericalangle BAJ = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$  wird, wie es das Fünfeck verlangt. Um  $B$  schlage man einen Kreisbogen mit  $BA$ , um  $A$  einen solchen mit  $BJ$ , als Schnitt  $J_1$  erhält man dann einen neuen Fünfeckspunkt. Um  $J$  und  $J_1$  sind Bogen mit  $BA$  zu schlagen, die den letzten Punkt  $K$  geben.

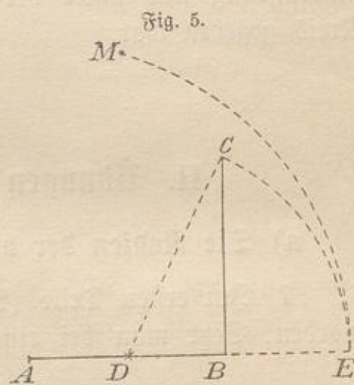


Verseuche folgende Zehneckskonstruktion als richtig nachzuweisen:  
Ist  $AB$  die gegebene Seite, so mache Lot  $BC = AB$ , halbiere  $AB$  in  $D$ , schlage mit  $DC$  um  $D$  einen Kreisbogen, der auf der Verlängerung von  $AB$  den Schnitt  $E$  giebt. Um  $A$  und  $B$  schlage Bogen mit  $AE$ , die den Schnitt  $M$  geben.  $M$  ist Mittelpunkt des gesuchten Zehnecks, welches mit Hilfe des Um-Kreises leicht vollendet wird.

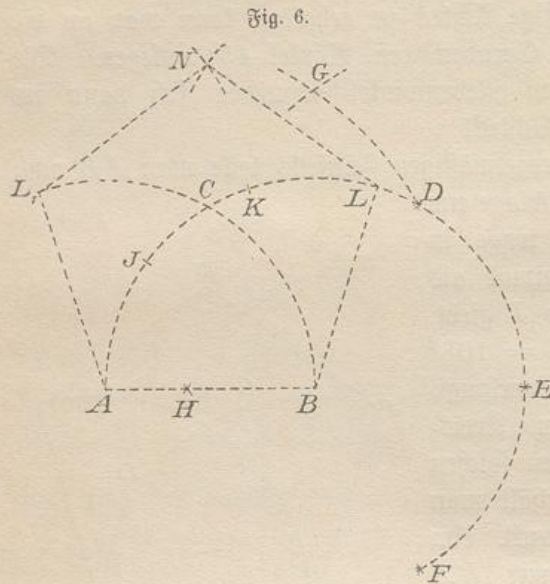
Der Italiener Mascheroni (sprich Maskeroni) hat die Fundamentalkonstruktionen der Planimetrie mit dem Zirkel allein, also ohne Hilfe des Lineals, durchgeführt.

Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks aus zwei Eckpunkten  $A$  und  $B$  giebt er dabei folgendermaßen:

Schlage um  $B$  mit  $AB$  einen Kreis (Fig. 6), trage den Radius von  $A$  aus 4 mal ab, was  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  giebt. Mit  $AD$  schlage Bogen um  $A$  und  $E$ , die den Schnitt  $G$  geben, mit  $BG$



Bogen um  $D$  und  $F$ , die den Schnitt  $H$  geben. Trage von  $A$  aus auf dem Kreise 3mal  $BH$  ab, was  $J$ ,  $K$  und  $L$  giebt, dann ist  $L$  ein Punkt des Fünfecks.



Bogen um  $A$  und  $B$  mit  $AB$  bzw.  $AL$  geben  $L_1$ , Bogen um  $L$  und  $L_1$  mit  $AB$  geben  $N$ . Die Punkte  $ABLNL_1$  sind die Ecken des gesuchten Fünfecks.

Das Zehneck konstruiert man nach ihm folgendermaßen. Wiederhole die vorige Konstruktion bis  $H$  und schlage um  $A$  und  $B$  Bogen mit  $EH$ , die den Schnitt  $M$  geben. Der Kreis um  $M$  mit Radius  $MA$  ist der Umkreis des leicht zu vollendenden Zehnecks.

Versuche beide Konstruktionen als richtig nachzuweisen.

Der große Geometer Steiner hat versucht, die geometrischen Konstruktionen mit dem Lineal allein auszuführen, also ohne den Zirkel. Bei zahlreichen Konstruktionen ergab sich die Möglichkeit dieser Ausführung nur unter der Bedingung, daß in der Ebene ein fester Kreis gegeben war.

## II. Übungen an den Dreieckskreisen.

### a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

7) Im ersten Teile (Nr. 120, 149, 182) ist Folgendes gezeigt worden: Setzt man bei einem Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$

$$1. \quad p = \frac{a + b + c}{2}, \quad p_1 = \frac{-a + b + c}{2},$$

$$p_2 = \frac{a - b + c}{2}, \quad p_3 = \frac{a + b - c}{2},$$

so bedeuten  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  die Längen der Tangenten, die von den Eckpunkten aus an die benachbarten Berührungskreise gelegt sind.

Zugleich ist  $p_1 + p_2 + p_3 = p$ ; die Radien der Berührungskreise berechnen sich aus

$$2. \quad \varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}, \quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}}, \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}}, \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}};$$

dagegen ist der Inhalt des Dreiecks

$$3. \quad F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

**Aufgabe.** Leite daraus durch Rechnung folgende Beziehungen ab:

$$4. \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}.$$

(Setze für  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  die obigen Werte ein, mache die Brüche gleichnamig und forme ihre Summe so um, daß der Ausdruck  $\frac{1}{\varrho}$  entsteht.)

$$5. \quad \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = p p_1 p_2 p_3, \quad \text{also auch } F = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}.$$

$$6. \quad \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = p_1 p_2 + p p_3 = ab, \quad \varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = p_2 p_3 + p p_1 = bc, \\ \varrho\varrho_2 + \varrho_3\varrho_1 = p_3 p_1 + p p_2 = ca.*)$$

(Die Formel ist leicht als Rechtecksatz in Worten auszudrücken. Zu ihrer Ableitung zeige, daß  $\varrho\varrho_3 = p_1 p_2 = \frac{c - (a - b)}{2} \cdot \frac{c + (a - b)}{2} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4}$  ist, bilde ebenso  $\varrho_1\varrho_2 = p p_3 = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4}$ , und bilde die Summe, die  $ab$  giebt.)

$$7. \quad \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{2}{h_1}, \quad \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_2}, \\ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}.$$

(Denn es ist z. B. nach Obigem

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{p_1}{F} + \frac{p_2}{F} = \frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F} = \frac{2c}{ch_3} = \frac{2}{h_3} \text{ u. s. w.})$$

Die Formel läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$7.* \quad h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{2\varrho_2\varrho_3}{\varrho_2 + \varrho_3}, \quad h_2 = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho} = \frac{2\varrho_3\varrho_1}{\varrho_3 + \varrho_1}, \\ h_3 = \frac{2\varrho\varrho_3}{\varrho_3 - \varrho} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

\*) Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices 1, 2 und 3. Die zweite Formel folgt so aus der ersten, daß 2 statt 1, 3 statt 2, 1 statt 3 geschrieben wird. Ebenso folgt die dritte aus der zweiten. Man erspart dadurch alle Rechnungswiederholungen.

$$8. \quad a = F\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) = F\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right), \quad b = F\left(\frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_1}\right) = F\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right), \\ c = F\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = F\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_3}\right).$$

(In der vorigen Beweisführung kam die Gleichung  $\frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F}$  vor, also ist  $\frac{c}{F} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$  u. s. w.) Setzt man in 8. für  $F$  seinen Wert  $\sqrt{\rho \rho_1 \rho_2 \rho_3}$  ein, so wird  $a = \sqrt{\rho \rho_1 \rho_2 \rho_3} \frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho_2 \rho_3} = (\rho_2 + \rho_3) \sqrt{\frac{\rho \rho_1}{\rho_2 \rho_3}}$ . Ebenso folgt  $a = (\rho_1 - \rho) \sqrt{\frac{\rho_2 \rho_3}{\rho \rho_1}}$ . Aus beiden Gleichungen erhält man durch Multiplikation eine einfachere. Das neue System von Gleichungen ist:

$$9. \quad a^2 = (\rho_1 - \rho)(\rho_2 + \rho_3), \quad b^2 = (\rho_2 - \rho)(\rho_3 + \rho_1), \\ c^2 = (\rho_3 - \rho)(\rho_1 + \rho_2).$$

Das Quadrat über jeder Dreiecksseite ist also gleich dem Rechteck aus der Differenz und der Summe je zweier der Radien, die Dreiecksseite selbst ist die mittlere Proportionale zur genannten Summe und Differenz.

Solcher Beziehungen lassen sich noch beliebig viele aufstellen, die zum Teil von weiter gehendem Interesse sind. So kann man z. B. in der Gruppe 2. die  $p$  und  $\rho$  einfach vertauschen, also  $p = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\rho}}$  u. s. w.

### 8) Konstruktive Bemerkungen.

a) Aus Formel 4. erkennt man, daß jeder der vier Radien bestimmt ist, wenn die drei anderen gegeben sind. Um z. B.  $\rho$  aus den übrigen Radien zu konstruieren, kann man mehrere Wege einschlagen.

Aus 4. folgt  $\rho = \frac{\rho_1(\rho_2 \rho_3)}{(\rho_1 \rho_2) + (\rho_2 \rho_3) + (\rho_3 \rho_1)}$ , wo die Klammern Rechtecke sind, die man in Quadrate verwandeln kann. Die des Nenners lassen sich nach Pythagoras addieren, so daß man hat  $\rho = \frac{\rho_1 m^2}{n^2} = \left(\frac{\rho_1 m}{n}\right) \frac{m}{n} = \frac{xm}{n}$ . Hier bestimmt sich  $x$  aus der Proportion  $n : m = \rho_1 : x$ , darauf  $\rho$  aus der Proportion  $n : x = m : \rho$  als vierte Proportionale.

Einfacher und übersichtlicher ist folgender Weg: Man nehme, wenn  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  gegeben sind, eine beliebige Länge als Einheit an, am bequemsten einen der Radien, z. B.  $\rho_3 = 1$ , so daß auch  $\frac{1}{\rho_3} = 1$

ist. Dann findet man  $x = \frac{1}{e_1}$  mit Hilfe der Proportion  $e_1 : 1 = 1 : x$ ,  $y = \frac{1}{e_2}$  aus  $e_2 : 1 = 1 : y$ . Jetzt ist  $\frac{1}{e}$  durch die Summe  $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}$  bestimmt, und  $e$  ergibt sich aus  $e : 1 = 1 : \frac{1}{e}$ . Durch die dem letzteren entsprechende Konstruktion ist der Einfluß der willkürlich gewählten Einheit wieder aufgehoben.

Man kann jetzt annehmen, daß, wenn drei der Radien gegeben sind, der vierte mit gegeben ist.

β) Aus 9. ergibt sich, wie man das Dreieck konstruiert, wenn drei der Radien gegeben sind. Man hat nach der Konstruktion des vierten nur drei mittlere Proportionale zu gewissen Summen und Differenzen zu konstruieren, um die Seiten zu erhalten.

γ) Demnach lassen sich z. B. Dreiecke konstruieren aus  $e, e_1, e_2$ ;  $e_1, e_2, e_3$ ;  $q, e_1, F$ ;  $e_1, e_2, F$ ;  $a, e, e_1$ ;  $a, e, e_2$ ;  $a, e_1, e_2$ ;  $a, e_2, e_3$ ;  $h_1, e, e_2$ ;  $h_1, e, e_3$ ;  $h_1, e_1, e_2$ ;  $h_1, e_1, e_3$ .

δ) Dagegen läßt sich kein Dreieck konstruieren aus  $h_1, e, e_1$ ;  $h_1, e_2, e_3$ ;  $h_2, e, e_2$ ;  $h_2, e_3, e_1$ ;  $h_3, e, e_3$ ;  $h_3, e_1, e_2$ ; denn diese Größen sind nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichungen 7. mit einander verbunden. Ist z. B.  $e$  und  $e_1$  gegeben, so darf  $h_1$  nicht gegeben werden, sondern man hat es aus  $h_1 = \frac{2e e_1}{e_1 - e}$  zu berechnen, oder mittels  $(e_1 - e) : 2e = e_1 : h_1$  als vierte Proportionale zu konstruieren.

**b) Der Radius des Umkreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks.**

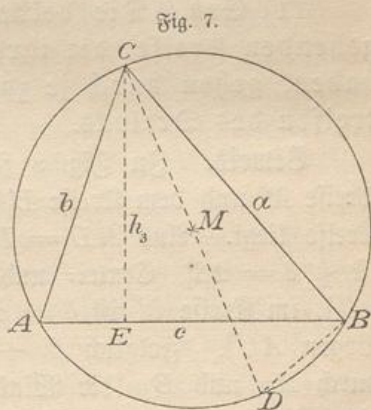
9) Aufgabe. Den Radius  $r$  aus den Seiten  $a, b$  und  $c$  zu berechnen.

Auflösung. In Fig. 7 sei  $CD$  ein Durchmesser  $2r$  und  $CE$  die Höhe  $h_3$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AEC$  und  $DBC$  folgt  $a : 2r = h_3 : b$ , also ist

$$r = \frac{ab}{2h_3} = \frac{abc}{2h_3 c} = \frac{abc}{4F}$$

Daraus ergibt sich

$$10. \quad r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{pp_1p_2p_3}} = \frac{abc}{4\sqrt{ee_1e_2e_3}} = \frac{abc}{4pe} = \frac{abc}{4p_1e_1} \text{ u. f. w.}$$



10) **Aufgabe.** Den Radius  $r$  aus den Radien der Berührungskreise zu berechnen.

**Auflösung.**

$$\begin{aligned} \text{Oben war unter 7. } \frac{1}{q} - \frac{1}{q_3} &= \frac{2}{h_3}, \text{ folglich } q_3 - q = \frac{2q q_3}{h_3} = \frac{2p_1 p_2}{h_3}; \\ \text{" " " } \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} &= \frac{2}{h_3}, \text{ " } q_1 + q_2 = \frac{2q_1 q_2}{h_3} = \frac{2p p_3}{h_3}. \end{aligned}$$

Durch Addition folgt aus den Gleichungen (mit Hilfe des Systems 6)

$$q_1 + q_2 + q_3 - q = \frac{2}{h_3}(p_1 p_2 + p p_3) = \frac{2ab}{h_3} = \frac{2abc}{h_3 c} = \frac{abc}{F} = 4r.$$

$$11. \quad q_1 + q_2 + q_3 - q = 4r.$$

(Faßt man den Radius  $q$  als negative Größe auf, so ist  $r$  das arithmetische Mittel aus den vier anderen Radien.) Sind von den 5 Radien 3 bekannt, so lassen sich die beiden anderen konstruieren und berechnen. In jeder der früheren Aufgaben läßt sich demnach eins der  $q$  durch  $r$  ersetzen. Aus 11. und 9. ergeben sich z. B. Formeln, die mit den Formeln 7. zusammen zur Konstruktion des Dreiecks aus  $r$  und den Radien zweier Berührungskreise dienen:

$$12. \quad \begin{cases} a^2 = (q_1 - q)(4r + q - q_1) = (q_2 + q_3)(4r - q_2 - q_3) \\ b^2 = (q_2 - q)(4r + q - q_2) = (q_3 + q_1)(4r - q_3 - q_1) \\ c^2 = (q_3 - q)(4r + q - q_3) = (q_1 + q_2)(4r - q_1 - q_2). \end{cases}$$

Einige der Konstruktionen vereinfachen sich noch durch den folgenden Satz:

11) **Satz.** Die beiden durch zwei Ecken eines Dreiecks gehenden Kreise, die ihre Mittelpunkte auf dem Umkreise haben, gehen durch je zwei Mittelpunkte von Berührungskreisen des Dreiecks.

**Beweis.** In Fig. 8 sei  $ABC$  das Dreieck mit seinem Umkreise  $M$  und dem Kreise  $D$  durch  $B$  und  $C$ , wobei  $D$  auf dem Umkreise liegt. Aus  $BD = DC$  folgt  $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2$ . Im Kreise  $D$  ist  $\sphericalangle \delta = 2\beta_1$  (Centri- und Peripheriewinkel auf demselben Bogen  $\mu C$ ), im Kreise  $M$  ist  $\delta = \beta_1 + \beta_2$  (Peripheriewinkel auf demselben Bogen  $AC$ ). Folglich  $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_1$ , also  $\beta_1 = \beta_2$ . Da aber durch  $A\mu$  und  $B\mu$  die Winkel bei  $A$  und  $B$  halbiert sind, so ist  $\mu$  der Mittelpunkt des In-Kreises.

Aus  $\sphericalangle \mu B \mu_1 = 90^\circ$  folgt, daß auch der Außenwinkel bei  $B$  halbiert,  $\mu_1$  also Mittelpunkt des Berührungskreises mit Radius  $q_1$  ist.

Entsprechend wird der Beweis für den Kreis geführt, der um den Gegenpunkt  $D_1$  durch  $B$  und  $C$  geschlagen wird, nur treten dabei mehrfach Supplementwinkel statt gleicher Winkel auf. Der neue Kreis wird durch  $AD_1$  in  $\mu_2$  und  $\mu_3$  geschnitten, wobei die Gerade  $\mu_2\mu_3$  als Durchmesser in  $D_1$  halbiert ist.

[Ist  $E$  der Halbierungspunkt des Bogens  $AC$ , so geht der um  $E$  durch  $A$  und  $C$  geschlagene Kreis durch  $\mu$  und  $\mu_2$ , so daß der Durchmesser  $\mu\mu_2$  (die Verlängerung von  $B\mu$ ) in  $E$  halbiert ist.

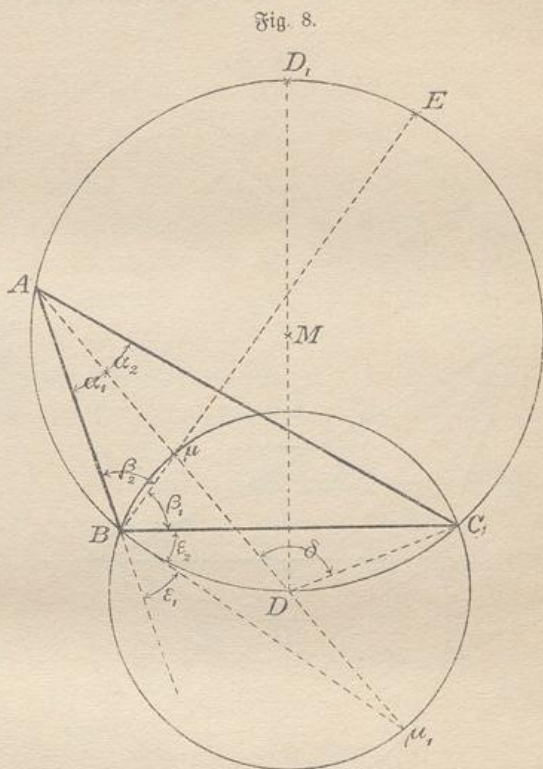
Das Dreieck  $ABC$  ist dann das Höhenfußpunkt-dreieck von  $\mu_1\mu_2\mu_3$  (zugleich auch von  $\mu\mu_1\mu_2$ ,  $\mu\mu_1\mu_3$  und  $\mu\mu_2\mu_3$ ), und die fertige Zeichnung giebt den Satz: Der Kreis

durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks halbiert die Dreiecksseiten und die oberen Abschnitte der Höhen. Er wird der Kreis der neun Punkte oder nach seinem hervorragenden Bearbeiter der Feuerbach'sche Kreis genannt.]

Alle Peripheriewinkel über  $BC$  im Kreise  $M$  geben Dreiecke, bei denen die Mittelpunkte der Berührungskreise auf den Kreisen  $D$  und  $D_1$  liegen; dasselbe gilt auch von den Peripheriewinkeln unter  $BC$ . Wandert also  $A$  von  $B$  über  $D_1$  nach  $C$ , so wandert  $\mu$  auf derselben Seite der Geraden  $BC$  auf dem Kreise  $D$  von  $B$  nach  $C$ ; wandert  $A$  von  $C$  über  $D$  nach  $B$ , so wandert  $\mu$  auf derselben Seite der Geraden  $BC$  auf dem Kreise  $D_1$  von  $C$  nach  $B$ .

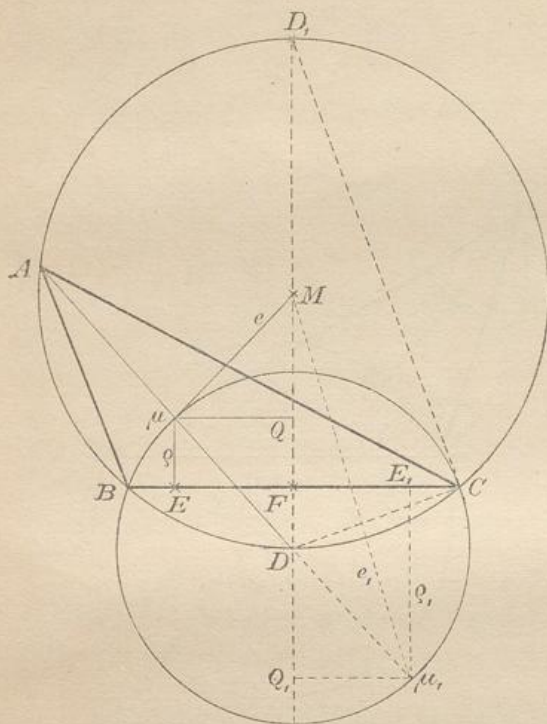
12) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus  $r$ ,  $a$  und  $q$  zu konstruieren.

**Auflösung.** a) Trage in den mit Radius  $r$  geschlagenen Kreis die Sehne  $a$  als  $BC$  ein, halbiere den kleineren Bogen  $BC$  in  $D$ , schlage um  $D$  durch  $B$  (und  $C$ ) den jenseits  $BC$  liegenden Kreis-



bogen  $BC$ , ziehe dort eine Parallele zu  $BC$  im Abstände  $\varrho$ . Schneidet diese den Bogen des Kreises  $D$  in  $\mu$ , so giebt  $D\mu$  verlängert den Schnittpunkt  $A$  auf dem gegebenen Kreise, und  $ABC$  ist das gesuchte Dreieck. (Vgl. Fig. 8.)

Fig. 9.



b) Statt den kleineren Bogen in  $D$  zu halbieren, kann man auch den größeren Bogen in  $D_1$  halbieren und die Konstruktion auf der anderen Seite der Geraden  $BC$  durchführen. Der Winkel bei  $A$  wird jetzt das Supplement des vorigen.

**Bemerkung.** Ebenso geschieht die Konstruktion eines Dreiecks aus  $r$ ,  $a$  und  $\varrho_1$ , nur wird dabei jedesmal auf zwei verschiedenen Seiten von  $BC$  gearbeitet.

13) **Aufgabe.** Wie weit ist der Mittelpunkt des Umkreises

von denen der Berührungskreise entfernt?

**Auflösung.** In Figur 9 ist

$$\begin{aligned} e^2 &= \overline{M\mu}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{\mu Q}^2 = (MD - QD)^2 + (\mu D^2 - QD^2) \\ &= MD^2 - 2MD \cdot QD + \mu D^2 = MD^2 - 2MD \cdot QD + DC^2 \\ &= MD^2 - 2MD \cdot QD + DF \cdot DD_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } e^2 &= r^2 - 2r \cdot QD + 2r \cdot DF = r^2 - 2r(QD - DF) \\ &= r^2 - 2r \cdot QF = r^2 - 2r \cdot \mu E, \quad \text{d. h. } e^2 = r^2 - 2r\varrho. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Setzt man  $M\mu_1 = e_1$ , so beweist man ebenso, daß  $e_1^2 = r^2 + 2r\varrho_1$  ist.

Im Ganzen bestehen also für die Entfernungen von  $M$  nach  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} 13^a. \quad e^2 &= r^2 - 2r\varrho, & e_1^2 &= r^2 + 2r\varrho_1, & e_2^2 &= r^2 + 2r\varrho_2, \\ & & e_3^2 &= r^2 + 2r\varrho_3; \end{aligned}$$

oder

$$13^b. \quad e = \sqrt{r(r - 2\rho)}, \quad e_1 = \sqrt{r(r + 2\rho_1)}, \quad e_2 = \sqrt{r(r + 2\rho_2)}, \\ e_3 = \sqrt{r(r + 2\rho_3)},$$

oder

$$13^c. \quad e^2 = (r + \rho)^2 - \rho^2, \quad e_1^2 = (r + \rho_1)^2 - \rho_1^2, \\ e_2^2 = (r + \rho_2)^2 - \rho_2^2, \quad e_3^2 = (r + \rho_3)^2 - \rho_3^2.$$

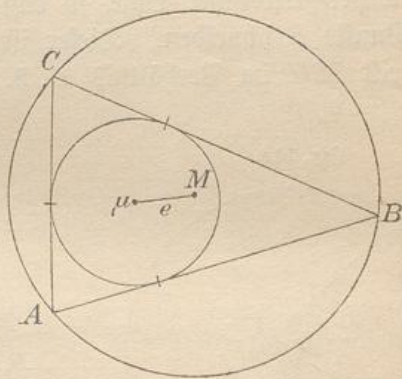
Nach den Formeln  $13^b$  werden die gesuchten Entfernungen als mittlere Proportionalen zwischen den beiden Faktoren unter den Wurzeln konstruiert, nach den Formeln  $13^c$  geschieht die Konstruktion nach Pythagoras. Die Dreieckskonstruktionen geschehen von jetzt ab so, daß man um die Endpunkte der so gefundenen Geraden  $e$  bzw.  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  Kreise mit den betreffenden Radien schlägt.

Damit sind folgende Konstruktionen ermöglicht: Ein Dreieck zu konstruieren aus:  $r, \rho, a$ ;  $r, \rho_1, a$ ;  $r, \rho_2, a$ ;  $r, \rho, \alpha$ ;  $r, \rho_1, \alpha$ ;  $r, \rho_2, \alpha$ ;  $a, \alpha, \rho$ ;  $a, \alpha, \rho_1$ ;  $a, \alpha, \rho_2$ ; auch können rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke mit je zwei solchen Radien verlangt werden. (Die Tangente von  $M$  aus führt auf den rechten Winkel, die Linie  $M\mu$  auf symmetrische Dreiecke.)

14) **Bemerkung.** Ist  $e = \sqrt{r(r - 2\rho)}$  konstruiert, und hat man um die Endpunkte von  $e$  Kreise mit  $r$  und  $\rho$  geschlagen, so sind unendlich viele Dreiecke möglich, denn das dritte Stück ist noch nicht gegeben.

Legt man also von einem beliebigen Punkte  $A$  des Kreises  $M$  aus an den Kreis  $\mu$  eine Tangente, die bis zum Schnittpunkte  $B$  mit dem Kreise  $M$  zu verlängern ist, zieht man ebenso von  $B$  aus eine zweite Tangente  $BC$  und ebenso von  $C$  aus eine dritte Tangente, so trifft diese nach  $A$ . Mit anderen Worten: Führt die Konstruktion von drei solchen Tangenten nach dem Ausgangspunkte  $A$  in einem Falle zurück, so schließt die Reihe der Tangenten stets, wo man auch beginne\*). Daraus ergeben sich neue Konstruktionen

Fig. 10.



\*) Dies ist eins der berühmten Poncelet-Steinerschen Schließungsprobleme, welches durch Projektion auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Für höhere Teile der Mathematik ist es sehr wichtig geworden.

für das Dreieck aus  $r, \varrho, a$ ;  $r, \varrho, a$  u. s. w. Die entsprechenden Bemerkungen für  $r$  und  $\varrho_1$  bieten keine Schwierigkeit.

15) **Bemerkung.** Die Pfeilhöhe  $FD = d_1$  des Bogens  $BC$  in Fig. 9 ist, da  $\mu\mu_1$  in  $D$  halbiert und daher  $DQ = \frac{\varrho_1 + \varrho}{2}$  ist,  $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$ . Man hat also nach Formel 11 die Gleichungen

$$d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_2 + \varrho_3)}{2}, \quad d_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_3 + \varrho_1)}{2},$$

$$d_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_1 + \varrho_2)}{2}.$$

Soll demnach ein Dreieck aus  $r, \varrho$  und  $\varrho_1$  konstruiert werden, so bilde man  $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$  und lege in den Kreis mit Radius  $r$  die entsprechende Sehne  $a$ . In der Entfernung  $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$  ziehe man jenseits  $d_1$  eine Parallele zu  $a$ , die den gesuchten Punkt  $C$  bestimmt. Damit ist gezeigt, wie man aus  $r$  und den Radien zweier beliebigen Berührungskreise das Dreieck konstruieren kann.

15b) **Bemerkungen zum Feuerbachschen Kreise.**

In Fig. 10a ist  $H$  der Schnittpunkt der Höhen,  $M$  der Mittelpunkt des Umkreises. Die Dreiecke  $AHC$  und  $A_1MC_1$  sind ähnlich in perspektivischer Lage, so daß  $AA_1, CC_1$  und  $HM$  sich in einem Punkte  $S$  schneiden. Dieser ist der Schwerpunkt des Dreiecks und teilt  $MH$  im Verhältnis 1:2. (Warum?)

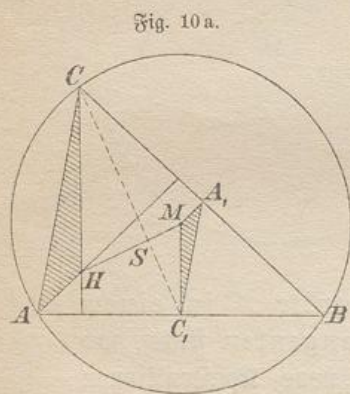


Fig. 10 a.

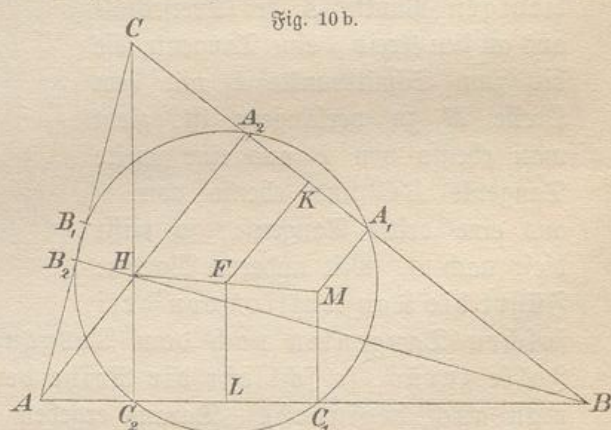


Fig. 10 b.

In Fig. 10b gehen die Mittelsenkrechten von  $A_1A_2$  und  $C_1C_2$  durch den Mittelpunkt  $F$  des Feuerbachschen Kreises, so daß  $HM$

halbiert wird. Demnach sind die Punkte  $H, F, S, M$  harmonische Punkte. Die Gerade  $HM$  heißt die Eulersche Gerade.

Der Radius des Um-Kreises ist doppelt so groß, wie der des Feuerbachschen Kreises.  $S$  und  $H$  sind Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

(Aufgaben:  $\triangle$  aus  $HM = e, r$  und  $a$ , aus  $HM = e, r$  und  $MA_1$  u. s. w.)

### III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks.\*)

16) Aufgabe. Die Seiten  $x, y, z$  eines Dreiecks aus den Höhen  $h_1, h_2, h_3$  zu berechnen.

Auflösung. Aus  $F = \frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$  folgt  $y = \frac{xh_1}{h_2}$ , ebenso ist  $z = \frac{xh_1}{h_3}$ . (Die dritte Gleichung  $y = \frac{zh_3}{h_2}$  würde nichts neues geben.)  
Man setze die Werte von  $y$  und  $z$  in die Gleichung

$$F = \frac{xh_1}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$$

ein, wobei z. B.  $x+y+z = x + \frac{xh_1}{h_2} + \frac{xh_1}{h_3} = x \frac{h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1}{h_2h_3}$  wird. Diese geht dann über in

$$\frac{xh_1}{2} = \frac{x^2}{4h_2^2h_3^2} \sqrt{(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)(-h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)(h_1h_2 - h_2h_3 + h_3h_1)(h_1h_2 + h_2h_3 - h_3h_1)}$$

Nach beiderseitiger Division durch  $x$  folgt, wenn man  $a, b, c$  für  $x, y, z$  setzt:

$$a = \frac{2h_1h_2^2h_3^2}{N}, \quad b = \frac{2h_2h_3^2h_1^2}{N}, \quad c = \frac{2h_3h_1^2h_2^2}{N},$$

wo

$$N =$$

$$\sqrt{(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)(-h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)(h_1h_2 - h_2h_3 + h_3h_1)(h_1h_2 + h_2h_3 - h_3h_1)}$$

17) Aufgabe. Die Seiten eines Dreiecks aus den Höhen  $h_1, h_2$  und  $h_3$  zu konstruieren.

Auflösung. Aus  $\frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$  folgt  $x:y = h_2:h_1$  und  $x:z = h_3:h_1$ . Demnach ist das Verhältnis der Dreiecksseiten bekannt

\*) Dieser Abschnitt hat nur Bedeutung für gelegentliche Übungen im Berechnen. Zu den folgenden Kapiteln steht er nicht in Beziehung.

$(x:y:z = h_2:h_1:\frac{h_1 h_2}{h_3})$ . Man konstruiere ein Dreieck mit beliebiger Seite  $x'$  und den Seiten  $y'$  und  $z'$ , die dieser Proportion entsprechen. Ist dann  $h_1'$  die Höhe dieses Dreiecks auf  $x'$ , so ist  $x = x' \frac{h_1}{h_1'}$ , als Seite des gesuchten Dreiecks leicht zu konstruieren.

Diese Konstruktion ist weit bequemer, als die mit Hilfe der oben berechneten Ausdrücke durchzuführende.

**Bemerkung.** Die umgekehrte Aufgabe, die Höhen aus den Seiten zu berechnen, ist schon in Teil I. gelöst worden. Sie führte auf

$$h_1 = \frac{2F}{a} = \frac{2}{a} \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

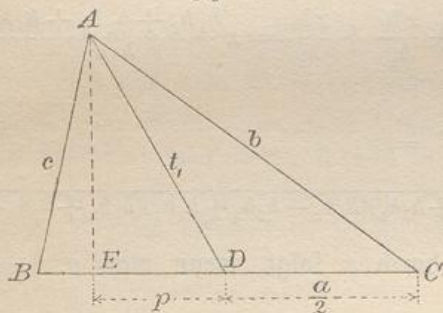
so daß man hat:

$$h_1 = \frac{W}{2a}, \quad h_2 = \frac{W}{2b}, \quad h_3 = \frac{W}{2c},$$

$$\text{wo } W = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

18) **Aufgabe.** Die Mittellinien  $t_1, t_2, t_3$  eines Dreiecks aus den Seiten  $a, b, c$  zu berechnen.

Fig. 11.



**Auflösung.** In Fig. 11 ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für das allgemeine Dreieck

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 + 2 \frac{a}{2} p$$

und

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 - 2 \frac{a}{2} p,$$

also durch Addition

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t_1^2,$$

so daß man hat

$$t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

$$t_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

19) **Aufgabe.** Die Seiten  $x, y$  und  $z$  eines Dreiecks aus den Mittellinien  $t_1, t_2, t_3$  zu berechnen.

**Auflösung.** Aus den letzten Formeln folgt

$$\text{a) } 2y^2 + 2z^2 - x^2 = 4t_1^2, \quad \text{b) } 2z^2 + 2x^2 - y^2 = 4t_2^2,$$

$$\text{c) } 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 4t_3^2.$$

Durch Subtraktion erhält man daraus

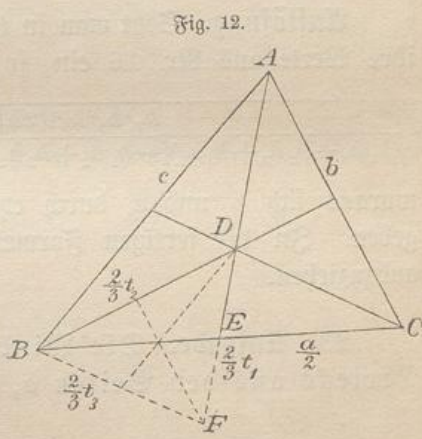
$$x^2 - z^2 = \frac{4}{3}(t_3^2 - t_1^2), \quad y^2 - x^2 = \frac{4}{3}(t_1^2 - t_2^2).$$

Berechnet man  $z^2$  aus der ersten und  $y^2$  aus der zweiten Gleichung, und setzt man ihre Werte in c) ein, so folgt, wenn man  $a, b, c$  statt  $x, y, z$  setzt:

$$\text{d) } a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}, \quad b = \frac{2}{3}\sqrt{2t_3^2 + 2t_1^2 - t_2^2}, \\ c = \frac{2}{3}\sqrt{2t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2}.$$

20) Aufgabe. Ein Dreieck aus den Mittellinien zu konstruieren.

Die Auflösung mit Hilfe der letzten Formeln ist eine einfache Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Noch einfacher ist die in Teil I Geom. Nr. 123 gegebene Konstruktion. In der betreffenden Figur sind  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$  und  $\frac{c}{2}$  Mittellinien des Hilfsdreiecks  $DBF$  (Fig. 12), dessen Seiten  $\frac{2}{3}t_1, \frac{2}{3}t_2, \frac{2}{3}t_3$  sind, so daß nach 18)



$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{2}{3}t_2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}t_3\right)^2 - \left(\frac{2}{3}t_1\right)^2}$$

oder

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}.$$

Die formelle Übereinstimmung der Ausdrücke unter Nr. 18 und 19 klärt sich somit einfach geometrisch auf.

Bemerkung. Nun hat  $\triangle DBF$  den dritten Teil des Inhalts, wie  $\triangle ABC$ , folglich ist

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3\right)\left(-\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3\right)\left(\frac{2}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3\right)\left(\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 - \frac{2}{3}t_3\right)} \\ \text{oder } \frac{9}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ = (t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)\frac{(t_1 + t_2 - t_3)}{2^*}.$$

21) **Aufgabe.** Die Höhen des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken.

**Auflösung.** Formel  $h_1 = \frac{W}{2a}$  in Nr. 17 geht über in

$$h_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3)} = \frac{2}{3a} W',$$

also, wenn man auch  $a$  durch die Mittellinien ausdrückt:

$$h_1 = \frac{W'}{\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}}, \quad h_2 = \frac{W'}{\sqrt{2t_3^2 + 2t_1^2 - t_2^2}},$$

$$h_3 = \frac{W'}{\sqrt{2t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2}},$$

wo

$$W' = \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3)}.$$

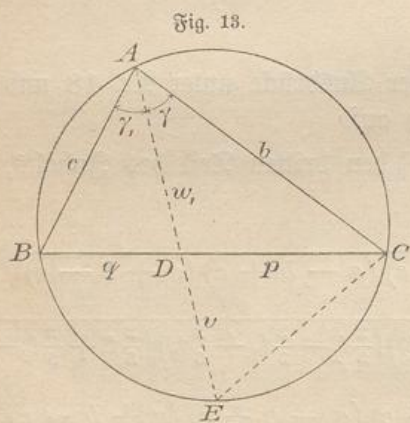
22) **Aufgabe.** Die Mittellinien des Dreiecks durch die Höhen auszudrücken.

**Auflösung.** Setzt man in  $t_1 = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$  für  $b, c$  und  $a$  ihre Werte aus Nr. 16 ein, so erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2 (2h_3^2 h_1^2 + 2h_1^2 h_2^2 - h_2^2 h_3^2)}{(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1)(-h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1)(h_1 h_2 - h_2 h_3 + h_3 h_1)(h_1 h_3 + h_2 h_3 - h_3 h_1)'}}$$

woraus sich  $t_2$  und  $t_3$  durch cyklische Vertauschung des Indices ergeben. In der fertigen Formel ist aus  $h_1^2 h_2^2 h_3^2$  noch die Wurzel auszuführen.

23) **Aufgabe.** Die Winkelhalbierenden  $w_1, w_2, w_3$  eines Dreiecks aus den Seiten  $a, b, c$  zu berechnen.



$AE \cdot w_1 = bc$ . Dies in 3) eingesetzt giebt

**Auflösung.** Nach Teil I Nr. 169 ist in Fig. 13  $p : q = b : c$ , also  $p = \frac{qb}{c}$  und  $a = p + q = \frac{qb}{c} + q = q \frac{b+c}{c}$ , also 1)  $q = \frac{ac}{b+c}$  und 2)  $p = \frac{ab}{c+b}$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $DCE$  und  $DAB$  folgt  $w_1 : q = p : v$ , oder  $pq = w_1 v = w_1(AE - w_1)$ , also 3)  $w_1^2 = w_1 \cdot AE - pq$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AEC$  und  $ABD$  folgt  $AE : b = c : w_1$  oder

$$\begin{aligned} w_1^2 &= bc - pq = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc \left( 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \\ &= bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c+a)(b+c-a). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{b+c}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a-b+c)}}{b+a}, \\ w_3 &= \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Aus

$$w_1^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \quad \text{folgt} \quad a = (b+c) \sqrt{\frac{bc - w_1^2}{bc}},$$

so daß ein Dreieck aus  $w_1$ ,  $b$  und  $c$  konstruiert werden kann, letzteres z. B. mittels der Proportion  $\sqrt{bc} : \sqrt{bc - w_1^2} = (b+c) : a$ .

Aus derselben Gleichung folgt  $bc = \frac{w_1^2}{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$ , so daß ein

Dreieck auch aus  $a$ ,  $w_1$  und der Seitensumme  $(b+c)$  berechnet und konstruiert werden kann. Aus  $b+c = s$  und  $bc = k$ , wo  $k$  der eben berechnete Wert ist, lassen sich  $b$  und  $c$  bestimmen.

Die Halbierende des Außenwinkels bei  $A$  berechnet sich in ähnlicher Weise wie  $w_1$  als

$$w_1' = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{b-c}}.$$

#### IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben.

24) Aus den früheren Übungen und Bemerkungen ergibt sich, daß die geforderten Konstruktionen entweder auf rein geometrischem Wege oder mit Hilfe von Berechnungen ausgeführt werden. Bezeichnet man also das Auffuchen des zur Lösung führenden Weges als die Analyse der Aufgabe, so kann man einerseits von geometrischer Analyse, andererseits von algebraischer Analyse sprechen. Bei der letzteren handelt es sich nämlich um die Auflösung von Gleichungen niederen Grades, eine Kunst, die man als Algebra zu bezeichnen pflegt.

25) Die geometrische Analysis sucht entweder Sätze auf aus denen sich die Lösung ohne weiteres ergibt, oder sie wendet gewisse Methoden an, mit deren Hülfe die Konstruktion ermöglicht wird.

Im ersteren Falle handelt es sich nur selten um eine planmäßige Untersuchung, die mit zwingender Notwendigkeit zum Ziele führt, sondern in der Regel darum, aus der großen Menge der vorher bearbeiteten Sätze mit geschicktem Griffe diejenigen herauszufinden, die sich im gegebenen Falle als brauchbare Werkzeuge bewähren. Auf den weniger Geübten machen daher solche Lösungen häufig den Eindruck, als habe es sich mehr um einen Kunstgriff oder ein geistreiches Kombinieren gehandelt, als um das Ergebnis einer planmäßigen Überlegung.

Man erkennt z. B. leicht, daß die Aufgabe: „einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt“, mit Hülfe des Satzes gelöst wird, „daß das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte ist“. Dagegen staunt man bisweilen die von Geometern wie Steiner gegebenen Lösungen als Leistungen eines außergewöhnlichen Scharffsinnes an. Ein Beispiel dieser Art sei angegeben:

26) **Aufgabe.** In einem gegebenen Dreieck den Punkt aufzufinden, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Wert hat.

**Analysis.** Im gleichseitigen Dreieck ist die Summe der von einem

beliebigen Punkte aus auf die drei Seiten gefällten Lote stets gleich der Höhe, also  $p + q + r = h$ , was rein geometrisch abgeleitet werden kann, aber auch aus der Inhaltsformel

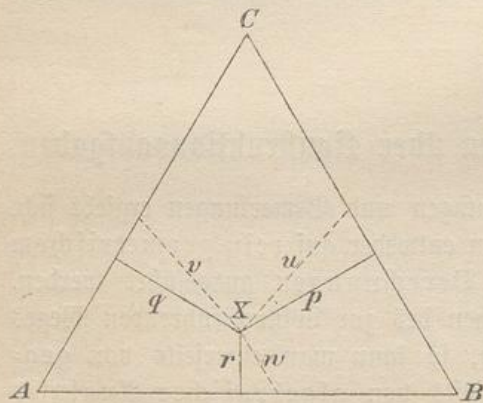
$$F = h \frac{a}{2} = (p + q + r) \frac{a}{2}$$

folgt. Zieht man dagegen von dem Punkte  $X$  aus beliebig gerichtete Gerade nach den drei Seiten, so ist ihre Summe  $u + v + w > p + q + r$ , also auch größer als  $h$ .

Die Lote aber bilden miteinander stets Winkel von je  $120^\circ$ .

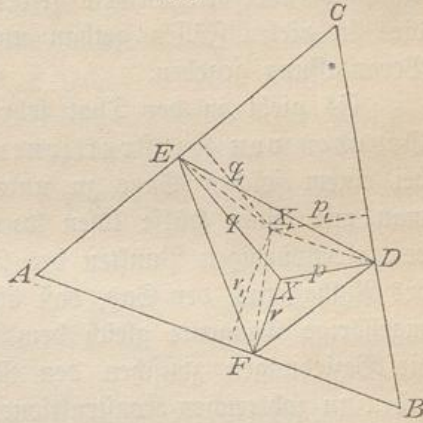
Ist nun  $DEF$  ein beliebiges Dreieck, und denkt man sich,  $X$

Fig. 14.



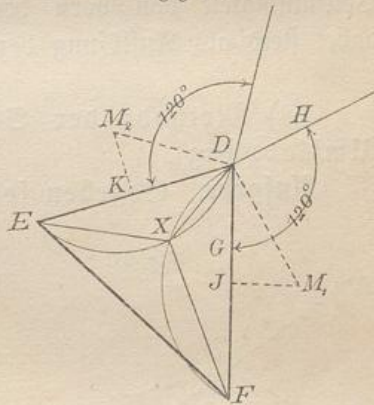
sei der Punkt, dessen Ecktransversalen unter Winkeln von je  $120^\circ$  zusammenstoßen, so erkennt man, daß die in den Eckpunkten auf den Transversalen errichteten Lote ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  bilden. Fällt man von einem anderen Punkte  $X_1$  aus auf die Seiten von  $ABC$  Lote  $p_1, q_1, r_1$ , so ist  $p_1 + q_1 + r_1 = p + q + r$ . Verbindet man aber  $X_1$  mit  $D, E$  und  $F$ , so ist  $X_1D + X_1E + X_1F > p_1 + q_1 + r_1$ , also auch größer als  $p + q + r$ . Da dies von jedem beliebigen Punkte  $X_1$  gilt, so folgt, daß der Punkt  $X$ , in dem die Ecktransversalen sich unter  $120^\circ$  treffen, derjenige ist, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Wert hat.

Fig. 15.



Die Konstruktion des gesuchten Punktes ist einfach. Schlage um  $D$  einen Bogen und trage auf ihm von  $DF$  aus zweimal den Radius ab, was den Punkt  $H$  giebt. Errichte in  $D$  auf  $HD$  und ebenso im Halbpunkt  $J$  auf  $DF$  Lote. Um den Schnittpunkt  $M_1$  der letzteren schlage einen durch  $D$  (und  $F$ ) gehenden Kreis. Wiederhole diese Konstruktion an der Seite  $DE$ , was den Punkt  $M_2$  als Mittelpunkt eines Kreises  $DE$  giebt. Beide Kreise schneiden sich in dem gesuchten Punkte  $X$ .

Fig. 16.



Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion bleibe dem Schüler überlassen, ebenso die Untersuchung, wie es wird, wenn  $X$  außerhalb des Dreiecks fällt.

27) An solchen und ähnlichen Lösungen erkennt man, daß beanlagte und geübte Geometer Brücken zu schlagen verstehen, wo weniger geübte die Möglichkeit einer Verbindung gar nicht erkennen. In vielen Fällen steht zu vermuten, daß die Lösung auch nicht auf analytischem Wege gefunden ist, sondern auf Grund des umgekehrten Verfahrens. Der Geometer fand auf synthetischem Wege einen

gewissen Zusammenhang und erkannte, daß durch denselben eine gewisse Gruppe von Aufgaben lösbar wird. Er konnte z. B. die Konstruktion veröffentlichen und es den Mathematikern überlassen, die Analysis und den Beweis selber aufzufinden. Steiner z. B. hat dies in vielen Fällen gethan und damit zu zahlreichen Forschungen Veranlassung gegeben.

Es giebt in der That sehr ergiebige Quellsätze für größere Gruppen von Konstruktionen, und es ist eine nützliche Aufgabe, bei einem solchen Satze zu untersuchen, welche Art von Problemen man mit seiner Hülfe lösen kann. Solche Sätze sind z. B. die von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks handelnden, ferner der Satz des Pythagoras, der Satz, daß die Sekante stetig geteilt ist, wenn die zugehörige Tangente gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Auch die Beziehungen zwischen den Radien der Hauptkreise des Dreiecks geben zu zahlreichen Konstruktionen Anlaß. Sätze von hervorragender Wichtigkeit, wie der Satz vom vollständigen Viereck, die Sätze von Pascal und Brianchon werden noch zur Sprache kommen.

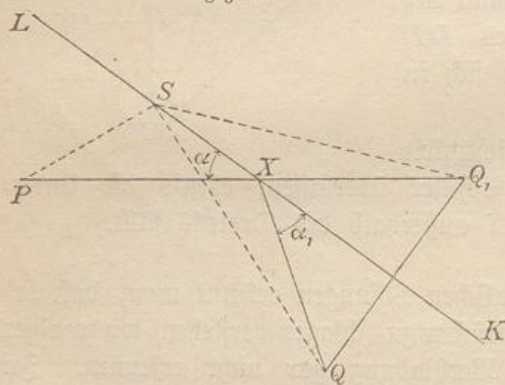
Kommt man mit Lehrsätzen nicht zum Ziele, so versucht man die Lösung der Aufgabe mit Hülfe gewisser Methoden. Einige davon sollen durch Beispiele erläutert werden, wobei auf systematische Vollständigkeit von vorn herein verzichtet wird. Die Analysis sei dabei stets als Auflösung bezeichnet.

28) Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder (Umklappung).

**Aufgabe.** Gegeben sei eine Gerade  $KL$  und zwei Punkte

$P$  und  $Q$  auf derselben Seite von  $KL$ . Der kürzeste Weg von  $P$  zur Geraden und nach  $Q$  soll gefunden werden.

Fig. 17.



**Auflösung.** Bildet man das Spiegelbild  $Q_1$  von  $Q$  und ist  $S$  ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist jedesmal  $PS + SQ = PS + SQ_1$ . Statt also zu untersuchen, wann  $PS + SQ$  ein Minimum (kleinster Wert) ist,

kann man untersuchen, wann  $PS + SQ_1$  ein solches ist. Dies geschieht aber, wenn  $PQ_1$  als Gerade gezogen wird, was den Schnitt  $X$  giebt.

Folglich ist  $PX + XQ$  der gesuchte kürzeste Weg. (Dabei ist  $\alpha = \alpha_1$ ; vergl. Reflexion der Lichtstrahlen. Die Aufgabe kommt bei der Ellipse zu wichtiger Anwendung. Sie kann dahin verallgemeinert werden, daß man nach dem kürzesten Wege von einem Punkte  $P$  nach einer Geraden  $KL$ , nach einer zweiten Geraden  $K_1L_1$ , nach einer dritten  $K_2L_2$  und nach einem Punkte  $Q$  sucht.)

Liegen  $P$  und  $Q$  auf verschiedenen Seiten der Geraden, so handelt es sich um die Auffindung der größten möglichen Differenz  $PS - SQ$ , wobei ebenfalls  $\alpha = \alpha_1$  wird. (Die Aufgabe ist wichtig für die Hyperbel.)

An Stelle von  $Q$  kann man einen um  $Q$  geschlagenen Kreis treten lassen und z. B. den Weg eines Lichtstrahles suchen, der von  $P$  zur Geraden geht, dort unter demselben Winkel zurückgeworfen wird und den Kreis um  $Q$  berührt.

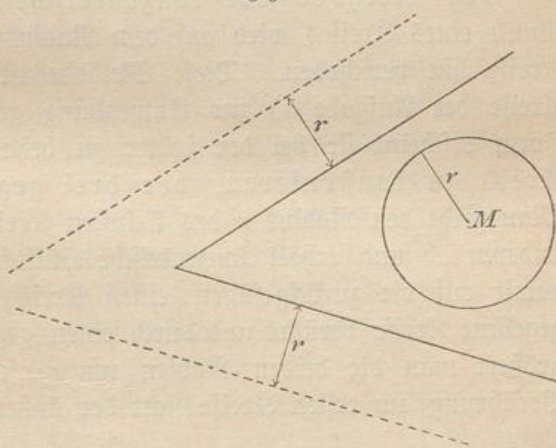
Häufig ist an der Aufgabe ohne weiteres die Symmetrie der fertigen Zeichnung gegen irgend eine Gerade zu erkennen, woraus sich sofort neue Elemente für die Konstruktion ergeben. Soll z. B. ein Kreis gezeichnet werden, der zwei Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, so findet Symmetrie gegen die Halbierungslinie des Winkels statt, was sofort einen zweiten Punkt giebt. Darauf beruht eine der verschiedenen Konstruktionen.

### 28) Methode der Parallelverschiebungen.

**Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Gerade berührt.

Fig. 18.

**Auflösung.** Man verschiebt jede der Geraden parallel zu sich selbst um  $r$ . Gelingt es dann, den Kreis zu zeichnen, der die Hilfslinien berührt und durch  $M$  geht, so hat man den Mittelpunkt des wirklich gesuchten Kreises gefunden.



Verschiebt man beide Geraden in entgegengesetzter Richtung, wie in der Figur, so erhält man die innere Berührung an Stelle der äußeren.

Bisweilen kann man die Figur durch parallele Verschiebung einzelner Geraden in günstiger Weise umgestalten. Dies geschah z. B. bei der Konstruktion des Dreiecks aus den drei Mittellinien. (Vergl. Teil I, Nr. 123.)

**Aufgabe b)** Gegeben seien zwei auseinanderliegende Kreise. Von der Peripherie des einen soll zu der des anderen eine Gerade von gegebener Richtung und Länge gelegt werden.

**Auflösung.** Man verschiebe den einen der Kreise um die entsprechende „Strecke“. Die beiden Schnittpunkte sind die Ausgangspunkte der gesuchten Geraden.

Auch Parallelverschiebung mehrerer Punkte führt bisweilen zum Ziele, z. B. bei folgender

**Aufgabe c)** Gegeben seien zwei Gerade und ein zwischen ihnen liegender Punkt. Durch den Punkt von der einen Geraden zur anderen eine Gerade zu legen, die durch den Punkt in gegebenem Verhältnis geteilt ist.

**Auflösung.** Angenommen, eine durch den Punkt von Linie zu Linie gelegte Gerade sei in dem verlangten Verhältnis geteilt. Legt man dann durch den Punkt eine Parallele zu der einen der gegebenen Geraden, so ist der Abschnitt der anderen ebenfalls im gegebenen Verhältnis geteilt. (Handelt es sich z. B. um das Verhältnis 3 : 5, so ist der Abschnitt in 8 gleiche Teile zerlegt, und die Parallele schneidet 3 von den Teilen ab.) Aus dieser Bemerkung folgt die Konstruktion.

29) Methode der konzentrischen Verschiebung. Jeder Punkt eines Kreises wird auf dem Radius nach einem konzentrischen Kreise hin verschoben. Diese Methode ist eigentlich schon bei dem Kreise der Aufgabe a) zur Anwendung gekommen. In allgemeiner Form erscheint sie bei der später zu behandelnden Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Man zieht den Radius  $r$  des kleinsten Kreises von denen der beiden anderen ab und erhält konzentrische Hilfskreise. Die Aufgabe wird damit auf die zurückgeführt, einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Vergrößert man die beiden Radien um  $r$ , so erhält man die innere Berührung am ersten Kreise statt der äußeren.

30) Methode der Ähnlichkeit. Man konstruiert statt des verlangten Gebildes zunächst ein ihm ähnliches. So kann z. B. die Konstruktion eines regelmäßigen Polygons über einer gegebenen Ge-

raden erfolgen, indem man ein solches zunächst in einen beliebigen Kreis einzeichnet und dann die Figur auf den richtigen Maßstab bringt.

**Aufgabe a)** In ein gleichschenkliges Dreieck ein Quadrat einzuzichnen. Man zeichnet erst ein beliebiges Quadrat (auf der Grundlinie) mit der Höhe als Symmetrieachse und projiziert die Ecken von  $A$  aus auf die Schenkel. (Fig. 19.)

Fig. 19.

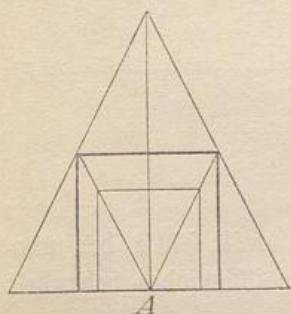
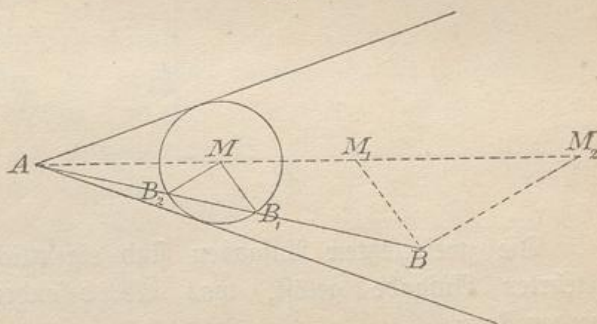


Fig. 20.



**Aufgabe b)** Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt  $B$  geht.

**Auflösung.** Man zeichne zunächst einen beliebigen Berührungskreis. Die Gerade  $AB$  giebt Schnittpunkte  $B_1$  und  $B_2$  und Radien  $B_1M$  und  $B_2M$ . Setzt hat man die der gesuchten ähnliche Zeichnung. Die Parallelen  $BM_1$  und  $BM_2$  zu jenen beiden Radien sind die gesuchten Radien. (An dieser Aufgabe erkennt man die Wichtigkeit der perspektivischen Lage.)

**Aufgabe c)** Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken in drei gegebenen Parallelen  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  liegen.

**Auflösung.** Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck  $DEF$  (Fig. 22) von beliebiger Größe und teile  $DE$  im Verhältnis  $h_1:h_2$ , wo  $h_1$  und  $h_2$  die zu den gegebenen Parallelen gehörigen Abstände sind. Zieht man durch  $D$  und  $E$  Parallele zur Teilungstransversale  $FG$ , so hat man die zur gesuchten ähnliche Zeichnung. Eintragung des Winkels  $\alpha$  in die gegebene Figur 21 genügt zur Vollendung der Aufgabe. (Später andere Konstruktion.)

Auf entsprechende Weise gelingt die Lösung der Aufgabe, ein gegebenes gleichseitiges Dreieck mit den Ecken in drei von einem Punkte ausgehende Strahlen zu legen. Es ist nur nötig, über zwei Seiten des Dreiecks Kreisbogen zu schlagen, die den von den Strahlen gebildeten Winkeln entsprechen. Die in diesem Falle

kongruente Figur ist dann in die richtige Lage zu bringen. (Auch dafür folgt später eine andere Lösung.)

Fig. 21.

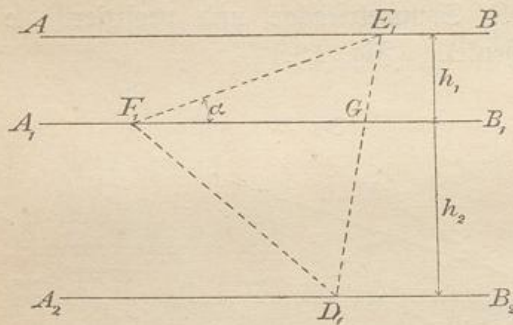
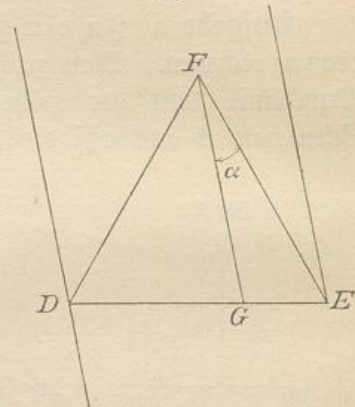


Fig. 22.



Die zwei letzten Aufgaben sind eigentlich mit Hülfe der umgekehrten Aufgabe gelöst, was als besondere Methode behandelt werden kann.

**Aufgabe d)** Durch einen der Schnittpunkte zweier sich schneidenden Kreise eine Sekante zu legen, die in gegebenem Verhältnis geteilt ist.

**Auflösung.** Jede Sekante  $AB$ , die durch den Schnittpunkt  $P$  der Kreise geht, giebt mit dem anderen Kreis Schnitte  $Q$  ein Dreieck. Alle diese Dreiecke sind ähnlich wegen der übereinstimmenden Peripheriewinkel  $\alpha$  und  $\beta$  über  $PQ$ . Man zeichne ein beliebiges Dreieck  $A_1B_1Q_1$  mit den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , teile  $A_1B_1$  in dem gegebenen Verhältnis, was den Punkt  $P_1$  giebt und ziehe  $P_1Q_1$ . Der Winkel  $P_1Q_1A_1$  ist an  $PQ$  anzutragen und giebt die Lösung.

31) Methode der Umkehrung der Aufgabe.

**Aufgabe a)** Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck von derselben Fläche zu verwandeln.

**Auflösung.** Man verwandelt zunächst ein gleichseitiges Dreieck von beliebiger Größe in ein Rechteck und dieses in ein Quadrat. Jetzt hat man das Verhältnis zwischen Quadrat- und Dreiecksseite für den Fall der Flächengleichheit. Die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks kann daher als vierte Proportionale konstruiert werden.

Entsprechend läßt sich jedes Quadrat in ein Vieleck verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich ist; also jedes Vieleck in ein flächengleiches, welches einem beliebigen anderen Vieleck ähnlich ist.

**Aufgabe b)** Eine gegebene Gerade so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei die erstere der kleinere (bezw. größere) Teil sein soll.

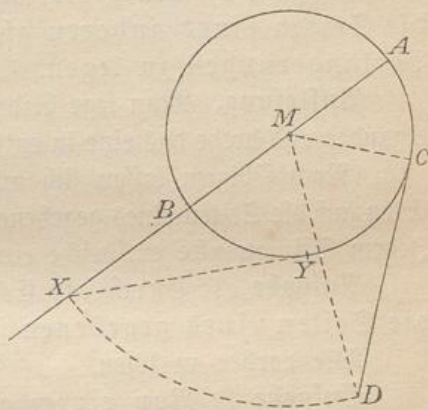
**Auflösung.** Man teile eine beliebige Gerade nach dem goldenen Schnitt und konstruiere das fehlende Stück der gegebenen als vierte Proportionale.

Die Lösungen mit Hülfe der Umkehrung der Aufgabe sind in der Regel nicht als elegant zu bezeichnen.

### 32) Methode der Drehung.

Die vorige Aufgabe, eine gegebene Gerade  $AB$  so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei sie selbst der größere Teil sein soll, kann folgendermaßen gelöst werden: Man schlage über  $AB$  als Durchmesser einen Kreis, lege an einen beliebigen Punkt  $C$  eine Tangente  $CD = AB$ , und schlage um  $M$  mit  $MD$  einen Kreis, der die Verlängerung von  $AB$  in dem gesuchten Punkte  $X$  schneidet. (Die Tangente  $CD$  ist dabei in die Lage  $YX$  gedreht worden, was der früheren Konstruktion des goldenen Schnittes entspricht.)

Fig. 23.

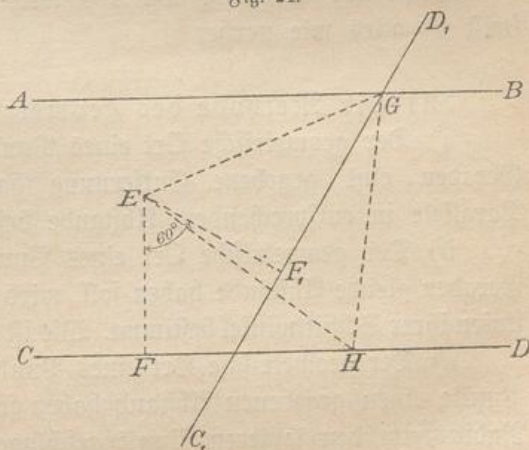


**Aufgabe a)** Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, welches mit den Ecken auf zwei gegebenen Parallelen  $AB$  und  $CD$  und einem gegebenen Punkte  $E$  liegt.

**Auflösung.** Man ziehe das Lot  $EF$ , drehe  $EF$  um  $60^\circ$  in die Lage  $EF_1$ , errichte in  $F_1$  auf  $EF_1$  ein Lot, welches  $AB$  in  $G$  schneidet.  $EG$  ist Basis des gesuchten Dreiecks.

Dreht man nämlich die Gerade  $C_1D_1$  um  $E$  in die ursprüngliche Lage zurück, so fällt  $G$  nach  $H$ , und  $\sphericalangle GEH$  ist gleich  $60^\circ$ .

Fig. 24.



Dieselbe Lösung gilt für zwei beliebige Gerade und einen Punkt  $E$ . (Vergleiche Abschnitt 30.)

**Aufgabe b)** Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf einem gegebenen Kreise, einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte  $E$  liegen.

**Auflösung.** Man drehe die Gerade um  $E$ , und zwar um  $60^\circ$ . Die Schnittpunkte  $K$  und  $K_1$  mit dem Kreise geben die Grundlinien  $EK$  und  $EK_1$  für zwei verschiedene Dreiecke der gesuchten Art. — Man kann auch den Kreis um den Punkt  $E$  drehen (ebenfalls um  $60^\circ$ ).

**Aufgabe c)** Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf zwei gegebenen Kreisen und einem Punkte liegen. (Ebenfalls zwei Lösungen nach derselben Art.)

**Aufgabe d)** Ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken auf die Seiten eines anderen gleichseitigen Dreiecks oder deren Verlängerungen zu legen.

**Auflösung.** Man lege beide Dreiecke mit den Mittelpunkten aufeinander und drehe das eine in entsprechender Weise um den Mittelpunkt.

(Nach Obigem lassen sich unzählige gleichseitige Dreiecke mit den Ecken auf die Seiten eines gegebenen Dreiecks von beliebiger Gestalt legen. Jedem Seitenpunkte entspricht ein bestimmtes gleichseitiges Dreieck.)

**Aufgabe e)** Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks die Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks zu legen.

Wie vorher zu lösen.

**Aufgabe f)** Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade (oder an zwei gegebene Kreise, oder an zwei gegebene Gerade) zwei gleichlange Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel (z. B. von  $30^\circ$ ) einschließen.

Statt der Drehung um  $60^\circ$  wird eine um  $30^\circ$  vorgenommen, sonst ist alles wie vorher.

### 33) Die Methode des geometrischen Ortes.

a) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben soll, wird durch zwei Parallele in entsprechendem Abstände bestimmt.

b) Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Geraden gleiche Abstände haben soll, wird durch die beiden Halbierungslinien ihrer Schnittwinkel bestimmt. Wie ist es im Falle des Parallelismus?

c) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben soll, ist ein mit entsprechendem Radius um den letzteren Punkt geschlagener Kreis.

d) Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben soll, ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

e) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Kreise einen gegebenen Abstand haben soll, ist durch zwei konzentrische Kreise von entsprechendem Radius bestimmt.

f) Der geometrische Ort für die Scheitel gleicher Winkel, deren Schenkel Tangenten eines gegebenen Kreises sind, ist ein konzentrischer Kreis.

g) Der geometrische Ort für die Scheitel gleicher Winkel über einer gegebenen Geraden ist ein Kreisbogen durch ihre Endpunkte.

h) Der geometrische Ort eines Punktes, für den die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten einen gegebenen Wert haben soll, ist ein gewisses Lot auf ihre Verbindungslinie.

(Denn  $e_1^2 - e_2^2 = (b_1^2 + h^2) - (b_2^2 + h^2) = b_1^2 - b_2^2$ , wie hoch auch der Punkt  $X$  liegen mag. Also ist das Lot der geometrische Ort.) Der Fußpunkt des Lotes bestimmt sich mit Hülfe der Gleichungen  $b_1 + b_2 = a$ ,  $b_1^2 - b_2^2 = d^2$ , also durch  $b_1 = \frac{a^2 + d^2}{2a}$ . (Fig. 25.)

i) Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus die Tangenten an zwei gegebene Kreise gleich lang sein sollen, steht senkrecht auf der Centrale. Schneiden sich die Kreise, so handelt es sich um die gemeinschaftliche Sekante; liegen sie auseinander, so handelt es sich um das Lot, welches vom Halbierungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente aus auf die Centrale gefällt ist. Wird der eine vom anderen umschlossen, so findet man das Lot folgendermaßen.

Man zieht von dem kleineren Kreise aus eine Tangente, die über den größeren hinausragt; eine gleich große Tangente lege man an den größeren Kreis. Die Endpunkte beider Tangenten drehe man um den Mittelpunkt des zu jeder gehörigen Kreises. Wo sich die beiden Hilfskreise schneiden, dort ist der Punkt, von dem aus das Lot auf die Centrale zu fallen ist.

k) Der geometrische Ort eines Punktes  $P$ , für den die Summe

Fig. 25.

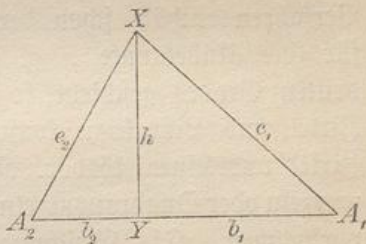
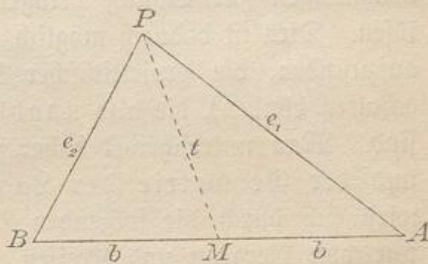


Fig. 26.



der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist, ist ein Kreis um den Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie.

(In Fig. 26 ist  $M$  der Halbierungspunkt von  $AB$ , also  $e_1^2 = t^2 + b^2 + 2pt$  und  $e_2^2 = t^2 + b^2 - 2pt$ , wo  $p$  die Projektion von  $t$  auf  $AB$  ist. Folglich ist  $e_1^2 + e_2^2 = 2t^2 + 2b^2$  und  $t = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 - 2b^2}{2}}$ , d. h.  $t$  eine konstante Länge.)

**Bemerkung.** In der Elementargeometrie handelt es sich nur um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Der geometrische Ort für einen zu konstruierenden Punkt ist also stets eine Gerade oder ein Kreis. Wir werden noch einige andere Fälle kennen lernen, wo beide als geometrischer Ort auftreten. Die obigen Fälle genügen zur Lösung zahlreicher Aufgaben.

34) Führen die angegebenen geometrischen Wege nicht zum Ziele, so versucht man es mit der oben besprochenen Methode der algebraischen Analysis, d. h. man betrachtet ein geeignetes Stück als Unbekannte  $x$ , versucht eine Gleichung aufzustellen, welche die Unbekannte enthält und löst die Gleichung auf. (Beispiele zu diesem Verfahren enthält schon der erste Teil.) Enthält nun der Ausdruck für die Unbekannte  $x$  z. B. Kubikwurzeln, was bei Gleichungen dritten Grades geschieht, so ist es im allgemeinen unmöglich, ihn mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, d. h. die Aufgabe ist nicht mit Zirkel und Lineal lösbar. Dagegen ist sie lösbar, wenn nur Quadratwurzeln oder Quadraturwurzeln aus Quadraturwurzeln oder gar keine Wurzeln vorkommen. Die Gleichungen dürfen allerdings nicht transzendente sein. Über die zu konstruierenden Ausdrücke ist das Nötige im ersten Teil gesagt. —

Der neueren Geometrie ist es gelungen, eine große Anzahl von Aufgaben, die man früher gar nicht oder nur mit Hilfe komplizierter Rechnungen zur Lösung bringen konnte, in sehr einfacher Weise zu lösen. Dies ist dadurch möglich geworden, daß es gelang, Beziehungen aufzufinden, die projektivischer Natur sind (d. h. bei jeder Projektion erhalten bleiben), die also unabhängig von den Maßbeziehungen sind. Man unterscheidet daher zwischen der Geometrie des Maßes und der Geometrie der Lage. Der Unterschied zwischen beiden wird sich durch die folgenden Abschnitte aufklären, obwohl vorläufig nur von Geraden und Kreisen, nicht aber von den Projektionen des Kreises gesprochen werden soll. —

**Bemerkung.** Hat man eine Aufgabe grundsätzlich (im Prinzip) gelöst, so gebe man sich nicht ohne weiteres zufrieden, sondern suche

jetzt erst eine möglichst kurze (elegante) Lösung. In diesem Sinne unterschied Steiner zwischen der Lösung mit dem Munde und der Lösung mit der Hand.

### V. Übergang zur neueren Geometrie.\*)

35) **Satz des Ceva.** Die von den Ecken eines Dreiecks aus durch einen Punkt gezogenen Transversalen\*\*) teilen die Gegenseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind.

**Beweis.** In Fig. 27 verhalten sich die Inhalte der auf derselben Grundlinie  $AG$  stehenden Dreiecke  $AGB$  und  $AGC$  wie die zugehörigen Höhen. Die letzteren, d. h. die von  $B$  und  $C$  aus auf  $AG$  gefällten Lote, verhalten sich aber wie  $x$  und  $x_1$ . (Warum?) Demnach bestehen im ganzen folgende Beziehungen:

$$\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} = \frac{x}{x_1}, \quad \frac{\triangle BGC}{\triangle BGA} = \frac{y}{y_1}, \quad \frac{\triangle CGA}{\triangle CGB} = \frac{z}{z_1}.$$

Multipliziert man die linken und ebenso die rechten Seiten dieser Gleichungen mit einander, so entsteht eine Gleichung, auf deren linker Seite sich alles hebt, also

$$1 = \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1}, \quad \text{oder} \quad xyz = x_1 y_1 z_1.$$

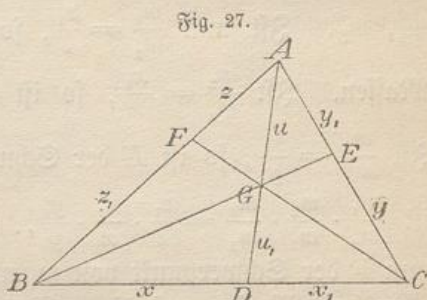
(Der Punkt  $G$  darf auch außerhalb des Dreiecks liegen.)

36) **Umkehrung.** Teilt man die Dreiecksseiten so, daß die Produkte aus je dreineicht zusammenhängenden Stücken einander gleich sind, so gehen die Verbindungslinien der Teilpunkte mit den Gegenecken durch einen Punkt.

(Der Beweis wird indirekt geführt. Man nimmt an, die dritte Transversale  $CF'$  ginge nicht durch  $G$ , obwohl  $xyz = x_1 y_1 z_1$  ist.

\*) Dieses Übergangskapitel ist aus historischen Gründen eingeschaltet. Die späteren Betrachtungen sind unabhängig davon.

\*\*) Eine Transversale ist eine Gerade, die willkürlich quer durch ein System gegebener Geraden gelegt wird.



Man zieht dann  $CGF$ , wobei  $xyz' = x_1y_1z'_1$  wird. Durch Division folgt aus beiden Gleichungen  $\frac{z}{z'} = \frac{z_1}{z'_1}$  oder  $\frac{z}{z_1} = \frac{z'}{z'_1}$ . Da aber die innere Teilung von  $AB$  im Verhältnis  $\frac{z}{z_1}$  und im Sinne der Fig. 27 nur einen einzigen Teilpunkt giebt, so müssen  $F$  und  $F'$  zusammenfallen, und auch  $CF'$  muß durch  $G$  gehen.)

37) [Beweis auf Grund der Schwerpunktslehre (barycentrischer Beweis). Man denke sich in  $A$ ,  $B$  und  $C$  willkürliche Massen  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Ist nun  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{z_1}{z}$ , so ist  $F$  der Schwerpunkt der beiden Massen. Ist  $\frac{m_2}{m_3} = \frac{x_1}{x}$ , so ist  $D$  der Schwerpunkt dieser Massen. Ist  $\frac{m_3}{m_1} = \frac{y_1}{y}$ , so ist  $E$  der Schwerpunkt der letzteren Massen. Dabei ist  $\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_3} \cdot \frac{m_3}{m_1} = \frac{z_1}{z} \cdot \frac{x_1}{x} \cdot \frac{y_1}{y}$ , oder  $1 = \frac{x_1 y_1 z_1}{xyz}$ , wie oben. Weil nun  $F$  der Schwerpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  ist, so liegt der Schwerpunkt  $G$  aller drei Massen auf  $FC$ . Aus demselben Grunde liegt er auch auf  $DA$  und auf  $EB$ . Da es aber nur einen einzigen gemeinschaftlichen Schwerpunkt giebt, müssen sich die drei Geraden in einem einzigen Punkte schneiden. Aus  $x_1 y_1 z_1 = xyz$  folgt also das Schneiden der drei Geraden in demselben Punkte. — Statt der Massen in  $A$ ,  $B$  und  $C$  kann man sich auch parallele Kräfte denken. Ist eine davon zu den beiden anderen entgegengesetzt gerichtet, so erhält man einen von den Fällen, wo  $G$  außerhalb des Dreiecks liegt.

$$\text{Zugleich ist nach dem Schwerpunktsgeetze } \frac{AG}{DG} = \frac{m_2 + m_3}{m_1} \\ = \frac{z}{z_1} + \frac{y_1}{y} = \frac{yz + y_1 z_1}{y z_1}.$$

Setzt man  $AG = u$ ,  $DG = u_1$  und entsprechend die Abschnitte der anderen Transversalen gleich  $v$ ,  $v_1$ ,  $w$ ,  $w_1$ , so hat man mit Hülfe cyklischer Vertauschung die Gleichungen:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{yz + y_1 z_1}{y z_1}, \quad \frac{v}{v_1} = \frac{zx + z_1 x_1}{z x_1}, \quad \frac{w}{w_1} = \frac{xy + x_1 y_1}{x y_1}.$$

Aus  $xyz = x_1 y_1 z_1$  folgt  $y = \frac{x_1 y_1 z_1}{xz}$ . Dies, in die erste der Gleichungen eingesetzt, verwandelt sie in  $\frac{u}{u_1} = \frac{(x + x_1)z}{x_1 z_1}$ , oder in  $x_1 u z_1 = (x + x_1) u_1 z$ . So ergibt sich für das von der Transversale  $FC$  geschnittene Dreieck  $ABD$  eine neue Beziehung: der nachstehend geometrisch bewiesene Satz des Menelaos.]

38) **Bemerkungen.** Sind die Dreiecksseiten halbiert, so erhält man aus dem Satze des Ceva die Sätze von den Mittellinien und dem gewöhnlichen Dreiecksschwerpunkte. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des In-Kreises mit den Gegenecken des Dreiecks müssen sich ebenfalls nach Ceva in einem Punkte schneiden, da je zwei Tangenten gleich sind. Entsprechendes gilt von den An-Kreisen. Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, denn aus der Ähnlichkeit gewisser Dreiecke folgen in obiger Bezeichnung die Gleichungen  $xy = y_1 z_1$ ,  $yz = z_1 x_1$ ,  $zx = x_1 y_1$ , aus denen man durch Multiplikation u. s. w.  $x_1 y_1 z_1 = xyz$  erhält. —

Durch Parallel- oder Centralprojektion geht die Fig. 27 in eine andere über, von der wiederum der Satz des Ceva gilt. Die durch den letzteren ausgesprochene Eigenschaft des Dreiecks bleibt also bei jeder Projektion des Dreiecks erhalten. Man nennt solche Eigenschaften der Figuren projektivische Eigenschaften.

39) **Satz des Menelaos.** Werden die Seiten eines Dreiecks (oder ihre Verlängerungen) durch eine Transversale geschnitten, so sind die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich. (Vgl. 37.)

**Beweis.** In Fig. 28 sei  $KL$  die das Dreieck  $ABC$  schneidende Transversale. Die Schnittpunkte mit den Seiten seien  $D$ ,  $E$  und  $F$ . Die Entfernungen der Ecken von der Transversale seien  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Aus der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke folgt

$$\frac{AF}{BF} = \frac{x}{y}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{y}{z}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{z}{x},$$

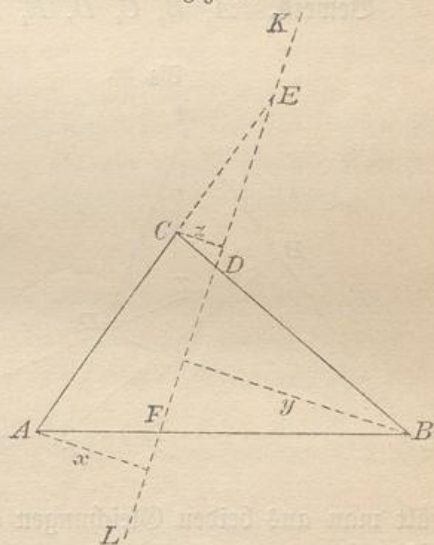
durch Multiplikation wird demnach

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{BF \cdot CD \cdot AE} = \frac{xyz}{yzx} = 1,$$

oder

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

Fig. 28.



40) **Umkehrung.** Wählt man auf den Seiten eines Dreiecks (bzw. den Verlängerungen der einen oder aller drei Seiten) Teilpunkte so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind, so liegen die Teilpunkte auf einer Geraden.

Der Beweis ist indirekt in derselben Weise zu geben, wie bei der Umkehrung des Satzes von Ceva.

41) **Bemerkungen.** Aus dem Satze des Menelaos folgt der des Ceva. Betrachtet man nämlich in Fig. 27 das Dreieck  $ABD$  als von  $FC$  geschnitten und das Dreieck  $ACD$  als von  $BE$  geschnitten, so ergeben sich nach Menelaos zwei Gleichungen, aus denen durch Division die des Ceva folgt.

Auch der Satz des Menelaos ist eine Eigenschaft, die bei beliebigen Projektionen der zugehörigen Figur erhalten bleibt.

Unter vollständigem Vierseit versteht man vier Gerade mit ihren sechs Schnittpunkten, so daß es hier drei Diagonalen giebt. (Unter vollständigem Viereck versteht man vier Punkte mit ihren sechs Verbindungslinien, so daß es hier drei Schnittpunkte von Gegenseiten giebt.) Aus den Sätzen des Menelaos und Ceva ergibt sich über das vollständige Vierseit der folgende wichtige (projektivische) Satz, von dem später ein von aller Rechnung unabhängiger Beweis gegeben werden soll:

42) **Satz vom vollständigen Vierseit.** Die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits teilen einander harmonisch.

**Beweis.**  $A, B, C, D, E, F$  seien die Ecken des vollständigen

Vierseits,  $X, Y, Z$  die Schnittpunkte der Diagonalen. Nach Ceva ist im Dreieck  $AEF$

$$1. \frac{AB \cdot EX \cdot FD}{BE \cdot XF \cdot DA} = 1.$$

Nach Menelaos ist in demselben durch  $BY$  geschnittenen Dreieck

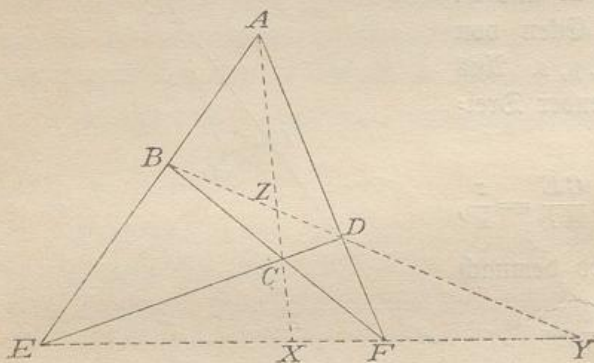
$$2. \frac{AB \cdot EY \cdot FD}{BE \cdot FY \cdot DA} = 1.$$

Durch Division erhält man aus beiden Gleichungen eine neue, in der sich alles weghebt, bis auf

$$3. \frac{EX}{XF} = \frac{EY}{FY}.$$

Demnach ist zunächst die Diagonale  $EF$  in  $X$  und  $Y$  harmonisch geteilt. ( $E$  und  $F$ , ebenso  $X$  und  $Y$  sind nach Teil I Nr. 168 zugeordnete Punkte.)

Fig. 29.



Wird nun Fig. 29 in irgend einer Weise auf eine andere Ebene projiziert, so bleiben nach 38 und 41 die Gleichungen 1. und 2. bestehen, folglich auch Gleichung 3. Ist also eine Gerade harmonisch geteilt, so ist auch ihre Projektion durch die projizierten Teilpunkte harmonisch geteilt. Die harmonische Teilung ist demnach eine projektivische Eigenschaft. Zieht man nun in Fig. 29  $AY$ , so sind die Punkte  $EFXY$  von  $A$  aus auf  $BY$  projiziert, folglich sind  $BDZY$  harmonische Punkte. Zieht man noch  $EZ$ , so sind die Punkte  $BDZY$  von  $E$  aus auf  $AX$  projiziert, folglich sind auch  $ACZX$  harmonische Punkte.

**Aufgabe.** Zu drei Punkten  $E, F, X$  (oder  $E, F, Y$ ), von denen  $E$  und  $F$  zugeordnet sind, mit dem Lineal allein den vierten harmonischen zu konstruieren.

Die Lösung erfolgt durch Wiederherstellung der Fig. 29 aus  $E, F$  und  $X$  unter beliebiger Annahme von  $A$  u. s. w.

**Bemerkung.** Gerade der Umstand, daß auch dieser Satz von Maßbeziehungen unabhängig ist und die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ohne den Zirkel gestattet, läßt vermuten, daß noch eine andere Art von Beweisführung möglich ist, die aus dem Bereiche der (Euklidischen) Geometrie des Maßes ganz herausgeht. Die wichtigen Folgerungen dieses Satzes bleiben daher bis zum späteren Beweise vorbehalten. (Vom vollständigen Viereck gilt der entsprechende Satz: Verbindet man die drei Schnittpunkte der Gegenseiten des vollständigen Vierecks mit einander, so entstehen drei Gruppen harmonischer Strahlen. Dies folgt sofort aus Fig. 29.)

Aus dem Satze des Menelaos läßt sich der nachstehende Pascalsche Satz vom Sehnensechseck ableiten, der als ein grundlegender Satz der neueren Geometrie zu betrachten ist. Später soll er unabhängig von den ersteren Sätzen bewiesen werden.

43) **Satz des Pascal.** Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

**Beweis.** In Fig. 30 sei  $ABCDEF$  das Sehnensechseck,  $P, Q$  und  $R$  seien die Schnittpunkte der Gegenseiten,  $X, Y$  und  $Z$  die Schnittpunkte der nicht zusammenstoßenden (alternierenden) Seiten  $BC, DE$  und  $FA$ .

Das Dreieck  $XYZ$  wird von drei Transversalen  $AB, CD$  und  $EF$  geschnitten. Nach Menelaos gelten also für jede derselben folgende Gleichungen:

$$AX \cdot BY \cdot PZ = AZ \cdot BX \cdot PY$$

$$CY \cdot DZ \cdot QX = CX \cdot DY \cdot QZ$$

$$EZ \cdot FX \cdot RY = EY \cdot FZ \cdot RX;$$

durch Multiplikation folgt

$$1. \quad \frac{AX \cdot BY \cdot PZ \cdot \underline{CY} \cdot \underline{DZ} \cdot QX \cdot \underline{EZ} \cdot \underline{FX} \cdot RY}{= \underline{AZ} \cdot \underline{BX} \cdot \underline{PY} \cdot \underline{CX} \cdot \underline{DY} \cdot QZ \cdot \underline{EY} \cdot \underline{FZ} \cdot RX.}$$

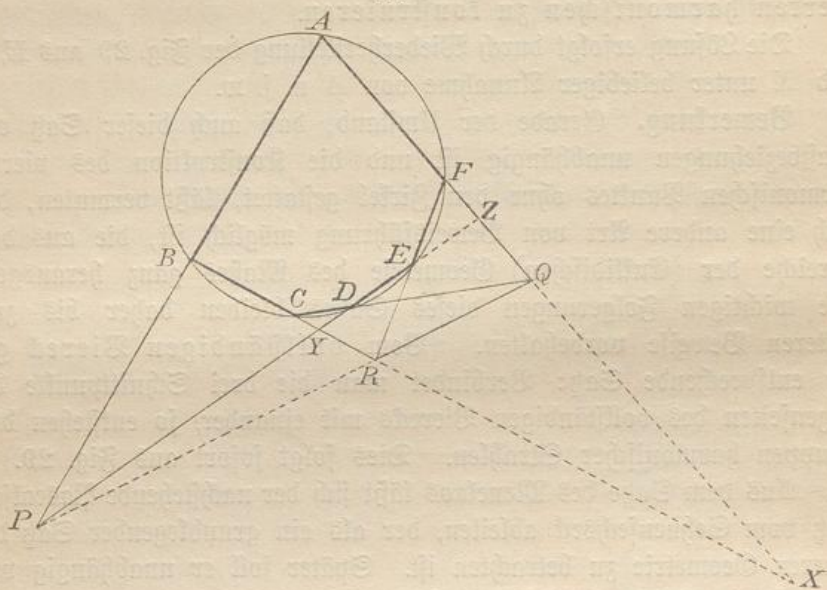
Außerdem ist nach dem Sekantenfaze:

$$XA \cdot XF = XB \cdot XC, \quad YB \cdot YC = YD \cdot YE, \quad ZD \cdot ZE = ZA \cdot ZF,$$

also durch Multiplikation

$$2. \quad XA \cdot XF \cdot YB \cdot YC \cdot ZD \cdot ZE = XB \cdot XC \cdot YD \cdot YE \cdot ZA \cdot ZF.$$

Fig. 30.



Aus 1. und 2. folgt durch Division (und Hebung der unterstrichenen Faktoren)  $PZ \cdot QX \cdot RY = PY \cdot QZ \cdot RX$ .

Fig. 30 a.

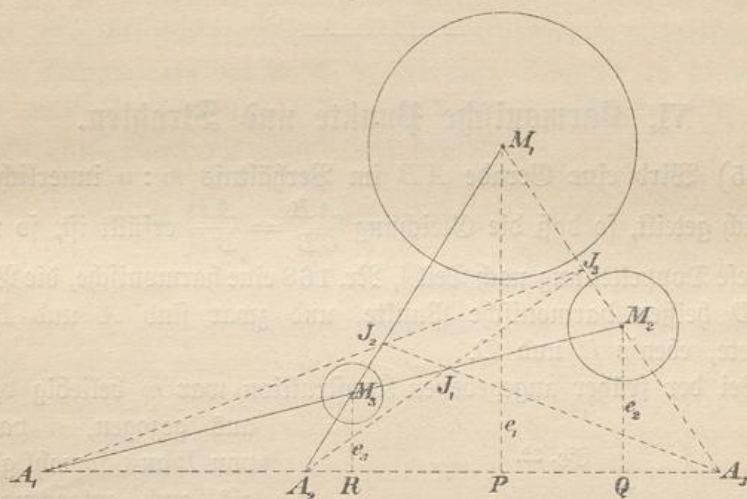


Dies entspricht wiederum dem Satze des Menelaos. Folglich liegen  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auf einer Geraden, der sogenannten Pascalschen Linie des Sehnensechsecks.

**Bemerkung.** Die Seiten des Sehnensechsecks dürfen sich auch gegenseitig schneiden, wie in Fig. 30a, nur muß die Figur eine geschlossene sein. Auch die wichtigen Folgerungen dieses Satzes werden auf später verschoben. Dasselbe soll mit folgendem Satze über die Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen (vgl. Teil I. Nr. 166) geschehen.

44) **Satz.** Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier geraden Linien.

Fig. 31.



**Beweis.** Es ist nach Teil I. Nr. 166 und 168 (äußere Teilung von  $M_1M_2$  u. s. w. im Verhältnis der Radien)

$$\frac{M_1A_3}{M_2A_3} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2A_1}{M_3A_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3A_2}{M_1A_2} = \frac{r_3}{r_1},$$

folglich durch Multiplikation

$$\frac{M_1A_3 \cdot M_2A_1 \cdot M_3A_2}{M_2A_3 \cdot M_3A_1 \cdot M_1A_2} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2 r_3 r_1} = 1,$$

was dem Satze des Menelaos entspricht, so daß  $A_1, A_2, A_3$  auf gerader Linie liegen müssen.

In derselben Weise wird bewiesen, daß  $A_1J_2J_3, A_2J_3J_1$  und  $A_3J_1J_2$  auf gerader Linie liegen. Die vier Geraden heißen Ähnlichkeitsachsen.

**Bemerkung.** Nach Art des Satzes des Menelaos läßt sich der Beweis direkt folgendermaßen führen:

Man fälle von  $M_1, M_2$  und  $M_3$  aus Lote  $e_1, e_2, e_3$  auf die Gerade  $A_3A_2$ . Weil  $A_2A_3$  durch den Ähnlichkeitspunkt  $A_3$  geht, so folgt aus  $\frac{e_1}{e_2} = \frac{M_1A_3}{M_2A_3}$ , daß  $\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . Ebenso folgt, weil  $A_2A_3$  durch  $A_2$  geht,  $\frac{e_3}{e_1} = \frac{r_3}{r_1}$ . Folglich erhält man durch Multiplikation  $\frac{e_3}{e_2} = \frac{r_3}{r_2}$ . Weil aber die von  $M_3$  und  $M_2$  ausgehenden Parallelen  $e_3$  und  $e_2$  sich wie die Radien der Kreise  $M_3$  und  $M_2$ , also auch wie  $M_3A_1$  zu  $M_2A_1$  verhalten, so muß die Verbindungslinie der Endpunkte von  $e_3$  und  $e_2$

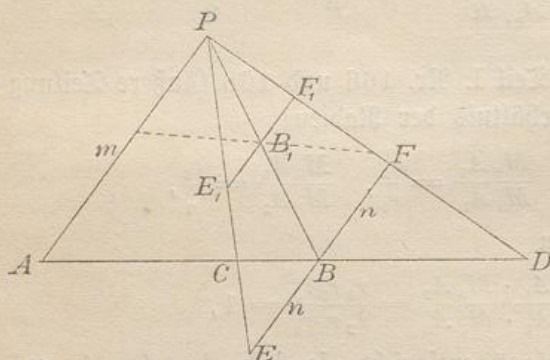
durch den Ähnlichkeitspunkt  $A_1$  gehen. Diese Verbindungslinie fällt aber mit  $A_2A_3$  zusammen, also liegen  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  auf einer Geraden. Ebenso ist der Beweis für die anderen Gruppen.

## VI. Harmonische Punkte und Strahlen.

45) Wird eine Gerade  $AB$  im Verhältnis  $m:n$  innerlich und äußerlich geteilt, so daß die Gleichung  $\frac{A \dot{B} C}{C B} = \frac{A D}{B D}$  erfüllt ist, so nennt man diese Doppelteilung nach Teil I, Nr. 168 eine harmonische, die Punkte  $ABCD$  heißen harmonische Punkte, und zwar sind  $A$  und  $B$  zugeordnete, ebenso  $C$  und  $D$ .

Bei der früher angegebenen Konstruktion war  $m$  beliebig von  $A$  aus gezogen,  $n$  parallel von  $B$  aus, sowohl gleich-, als auch entgegengesetztgerichtet, worauf die Endpunkte von  $m$  mit denen der beiden  $n$  verbunden wurden, was auf die Schnittpunkte  $C$  und  $D$  führte.

Fig. 32.



Ist  $m = n$ , so ist  $AB$  durch  $C$  halbiert, und  $D$  liegt in unendlicher Entfernung. Ist  $m > n$ ,

so liegt  $D$  rechts von  $AB$ , ist  $m < n$ , so liegt  $D$  links von  $AB$ . Wandert  $C$  von dem Halbierungspunkte der Geraden  $AB$  aus nach  $B$ , so wandert der Punkt  $D$  rechts von  $AB$  aus unendlicher Entfernung nach  $B$ . Wandert  $C$  von der Mitte nach  $A$ , so wandert  $D$  links von  $AB$  aus unendlicher Entfernung nach  $A$ . Für jede Lage von  $C$  existiert also eine und nur eine bestimmte Lage von  $D$ .

Aus  $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{BD}$  folgt  $\frac{DB}{BC} = \frac{DA}{CA}$ , so daß die Teilung auch von rechts nach links gelesen eine harmonische ist, selbstverständlich aber mit einem anderen Teilungsverhältnis der Linie  $DC$ . Die zugeordneten Punkte  $C$  und  $D$  sind also gleichberechtigt mit  $A$  und  $B$ .

46) Legt man in Figur 32 durch einen beliebigen Punkt  $B_1$  der Geraden  $PB$  (oder ihrer beiderseitigen Verlängerungen) eine

Parallele  $E_1F_1$ , so sind auf ihr aus Gründen der Ähnlichkeit ebenfalls gleiche Stücke  $E_1B_1$  und  $B_1F_1$  abgeschnitten. Jeder Strahl durch  $B_1$  ist durch die Strahlen  $P(ABCD)$ , d. h. durch die Strahlen von  $P$  nach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  harmonisch geteilt, denn die neue Figur entspricht ganz der Konstruktionsfigur für den vierten harmonischen Punkt. Durch Herumdrehen des durch  $B_1$  gehenden Strahles um diesen Punkt kann man die Reihenfolge der neuen harmonischen Punkte beliebig ändern, nur bleibt die Zuordnung erhalten.

47) Das Gesagte gilt aber nicht nur für die von  $P$  aus nach den harmonischen Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  gehenden Strahlen, sondern auch für Strahlen, die von einem beliebigen Punkte  $P_1$  der Ebene nach  $ABCD$  gezogen werden. Bezeichnet man nämlich in der neuen Figur  $P_1A$  mit  $m_1$  und zieht dazu eine Parallele  $E_2F_2$  durch  $B$ , so muß  $E_2B = BF_2 = n_1$  sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man zu  $A$ ,  $B$  und  $C$  einen anderen vierten harmonischen Punkt  $D_1$  konstruieren, indem man  $BF_3 = n_1$  macht und  $P_1F_3$  zieht. Dann wäre aber  $D$  gar nicht der vierte harmonische Punkt gewesen.

Strahlen, die von einem beliebigen Punkte aus nach vier harmonischen Punkten gezogen werden, nennt man harmonische Strahlen. Von ihnen gilt also, wie auch durch Rechnung gezeigt werden kann, Folgendes:

Zieht man zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele, so halbiert der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen zugeordneten liegende Stück der Parallelen.

(Aufgabe. Zu drei harmonischen Strahlen den vierten zu konstruieren. Die Auflösung ergibt sich durch Halbierung bezw. Verdoppelung einer Parallelen.)

Jede Gerade wird durch harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten.

Parallel- und Centralprojektion harmonischer Punkte und Strahlen giebt stets wieder harmonische Punkte bezw. Strahlen.

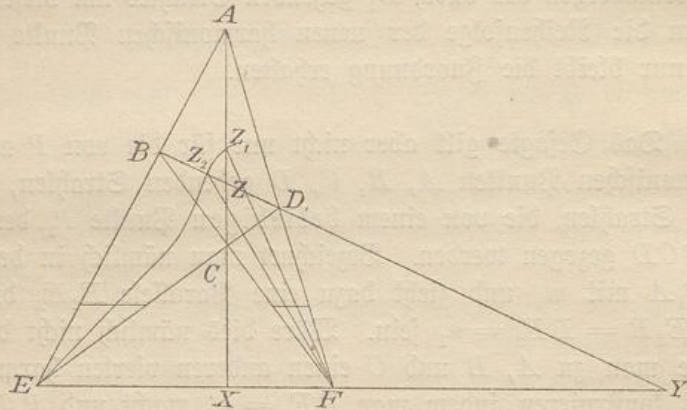
Daß durch Halbierung eines Winkels und seines Nebenwinkels harmonische Strahlen entstehen, folgt aus Nr. 169 in Teil I.

48) Satz vom vollständigen Vierseit: Die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind harmonisch geteilt.

Zweiter Beweis.  $ABCDEF$  sei das vollständige Vierseit mit den Diagonalen  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$ , deren Schnittpunkte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sind.

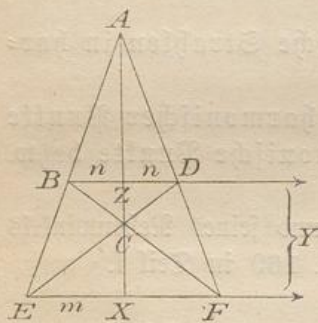
Man denke sich in  $E$  den vierten harmonischen Strahl konstruiert, der  $EF$  zugeordnet ist (z. B. durch Halbierung der Parallelen zu  $EF$ ). Angenommen, dieser Strahl ginge nicht durch  $Z$ , sondern er schneide die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  in  $Z_1$  bzw.  $Z_2$ , dann würden  $ACZ_1X$

Fig. 33.



harmonische Punkte und  $F(ACZ_1X)$  harmonische Strahlen sein, und zwar würde  $FZ_1$  die Parallele zu  $EF$  halbieren. Aber auch  $BDZ_2Y$  würden harmonische Punkte und  $F(BDZ_2Y)$  harmonische Strahlen sein, und auch  $FZ_2$  würde die Parallele zu  $EF$  halbieren. Diese Parallele würde also in zwei getrennten Punkten halbiert sein. Da dies nicht möglich ist, müssen  $Z_1$  und  $Z_2$  zusammenfallen, d. h.  $ACZX$  und  $BDZY$  sind harmonische Punkte. Dasselbe gilt von  $EFXY$ , denn diese Punkte sind als Projektionen der Punkte  $BDZY$  von  $A$  aus zu betrachten.

Fig. 34.



lich im Verhältnis  $m : n$  geteilt.

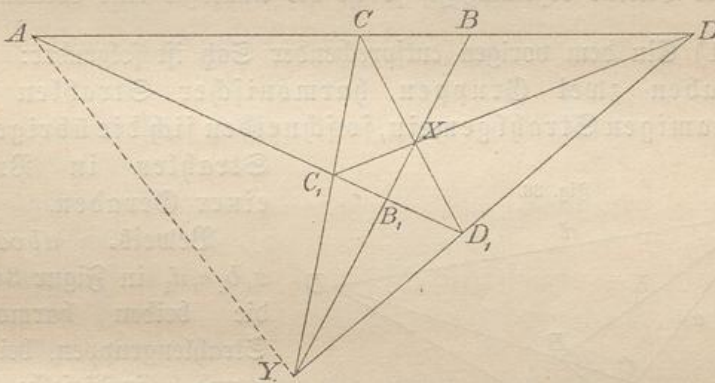
Durch Parallel- oder Centralprojektion kann man diese Figur auf eine beliebige Ebene übertragen, wobei die Symmetrie des voll-

[49] **Dritter Beweis.** In Figur 34 ist  $ABCDEF$  ein vollständiges Vierseit, welches symmetrisch gegen die Achse  $AX$  ist.  $BD$  und  $EX$  sind parallel und durch die Symmetrieachse halbiert. Bezeichnet man den unendlich fernen Schnittpunkt der Parallelen mit  $Y$ , so sind  $BDZY$  und  $EFXY$  nach Nr. 45 harmonische Punkte. Dasselbe gilt von  $XZCA$ , denn wenn  $EX = m$ ,  $BZ = ZD = n$  gesetzt wird, so ist die Gerade  $XZ$  in  $C$  und  $A$  innerlich und äußer-

ständigen Vierseits im allgemeinen aufhört. Bei der letzteren Projektionsart hört auch der Parallelismus von  $BD$  und  $EF$  auf, so daß der Schnittpunkt  $Y$  ins Endliche fällt. Dann entsteht eine Figur nach Art von Figur 33. Bei der Projektion sind aber die drei harmonischen Punktgruppen harmonische Punkte geblieben. Demnach teilen sich die Diagonalen des vollständigen Vierseits harmonisch.]

50) **Satz.** Gehen von einem Punkte  $A$  zwei Gruppen harmonischer Punkte  $ABCD$  und  $AB_1C_1D_1$  aus, und verbindet man die gleichnamigen, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte  $Y$ . Verbindet man die zugeordneten Punkte über Kreuz, so schneiden sich diese Verbindungslinien mit der dritten ebenfalls in einem Punkte  $X$ . Ist das Teilungsverhältnis bei der ersten Gruppe  $m_1:m_2$ , bei der zweiten Gruppe  $m_1:m_3$ , so ist die Verbindungslinie  $BB_1$  im Verhältnis  $m_2:m_3$  harmonisch geteilt.

Fig. 35.



**Beweis.** In Figur 35 sind  $ABCD$  und  $AB_1C_1D_1$  die beiden von  $A$  ausgehenden harmonischen Punktgruppen. Die Verbindungslinien  $BB_1$  und  $CC_1$  schneiden sich in  $Y$ . Zieht man  $YD_1$ , so muß diese Gerade durch  $D$  gehen, weil sonst durch Projektion auf  $AD$  ein anderer harmonischer Punkt als  $D$  entstehen würde, was unmöglich ist. Also geht  $DD_1$  auch durch  $Y$ .

Ebenso wird der Beweis mit  $CD_1$ ,  $BB_1$  und  $C_1D$  geführt.

Es handelt sich also in Figur 35 um ein vollständiges Vierseit  $ACXC_1DD_1$ , dessen Diagonale  $CC_1$  durch  $AX$  und  $AY$  harmonisch geteilt ist, so daß auch  $BB_1$  in  $X$  und  $Y$  harmonisch geteilt sein muß.

Um das Verhältnis der Teilung von  $BB_1$  zu finden, falle man

von  $A, B$  und  $B_1$  Lote  $e_1, e_2$  und  $e_3$  auf  $DY$ . Dann ist  $\frac{AD}{BD} = \frac{e_1}{e_2}$  und  $\frac{AD_1}{B_1D_1} = \frac{e_1}{e_3}$ , oder nach obiger Annahme der Verhältnisse  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{e_1}{e_2}$ ,  $\frac{m_1}{m_3} = \frac{e_1}{e_3}$ . Daraus folgt aber durch Division  $\frac{m_2}{m_3} = \frac{e_2}{e_3}$ . Da aber  $\frac{BY}{B_1Y} = \frac{e_2}{e_3}$  ist, so ist das Teilungsverhältnis von  $BB_1$ , wie behauptet war,  $m_2 : m_3$ .

[**Bemerkung.** Schlägt man um  $A, B$  und  $B_1$  Kreise, deren Radien in folgenden Verhältnissen stehen:

$$r_1 : r_2 = AC : CB = AD : BD; \quad r_1 : r_3 = AC_1 : C_1B_1 = AD_1 : B_1D_1$$

so sind  $C$  und  $D, X$  und  $Y, C_1$  und  $D_1$  die Ähnlichkeitspunkte je zweier dieser Kreise. Der Satz, daß die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise in Gruppen zu dreien auf einer Geraden liegen, ist also eine unmittelbare Folge des Satzes vom vollständigen Vierseit. (Vgl. Fig. 31.) Statt der Kreise kann man auch ähnliche und ähnlich liegende Polygone, z. B. Dreiecke nehmen und ihre Ähnlichkeitspunkte untersuchen. Sind die Vielecke regelmäÙige, so ist die Analogie eine vollkommene.]

51) Ein dem vorigen entsprechender Satz ist folgender:

Haben zwei Gruppen harmonischer Strahlen einen gleichnamigen Strahlgemein, so schneiden sich die übrigen drei Strahlen in Punkten einer Geraden.

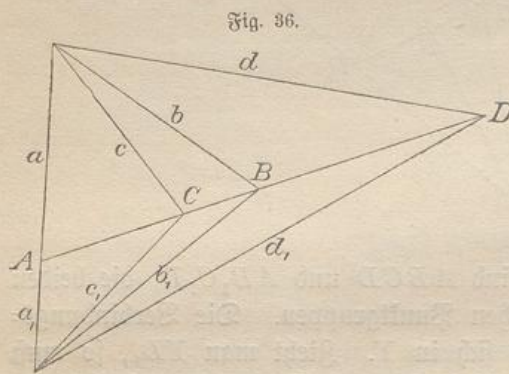


Fig. 36.

**Beweis.**  $abcd$  und  $a_1b_1c_1d_1$  in Figur 36 seien die beiden harmonischen Strahlengruppen, bei denen  $a$  und  $a_1$  in dieselbe Gerade fallen, während  $b$  und  $b_1$  sich in  $B, c$  und  $c_1$  sich in  $C$  schneiden. Zieht man  $BC$ , was den Schnitt  $A$  giebt, so müssen sich die vierten

Strahlen  $d$  und  $d_1$  in einem Punkte  $D$  dieser Geraden schneiden, denn sonst würde der vierte harmonische Punkt zu  $A, B$  und  $C$  doppelt vorhanden sein.

Wie ist es mit dem Schnitte von  $c$  und  $d_1$  und mit dem von  $c_1$  und  $d$ ?

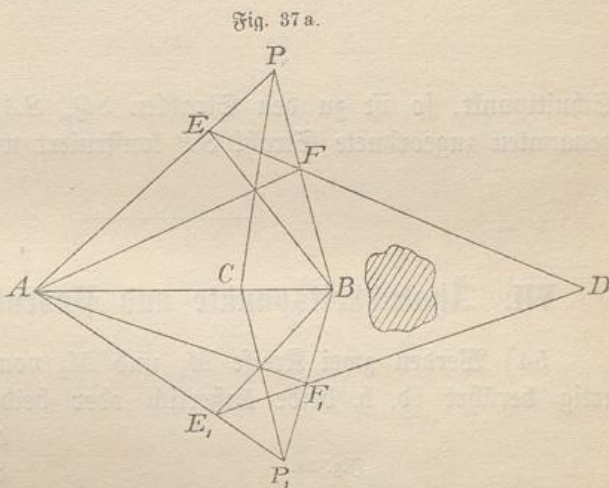
52) Beide Sätze sind spezielle Fälle von folgenden allgemeineren, die in entsprechender Weise bewiesen werden:

Gehen bei zwei Gruppen harmonischer Punkte die Verbindungslinien von drei gleichnamigen Paaren durch einen Punkt, so geht die vierte Verbindungslinie durch denselben Punkt.

Schneiden sich bei zwei Gruppen harmonischer Strahlen drei gleichnamige Paare in Punkten einer Geraden, so schneiden sich die vierten Strahlen in einem Punkte derselben Geraden.

53) **Aufgabe a)** Eine gegebene Gerade mit dem Lineal allein über ein Hindernis hinaus zu verlängern.

**Auflösung.** In Figur 37 sei  $AB$  die gegebene Gerade. Die schattierte Fläche sei das unübersteigliche Hindernis. Man nehme auf  $AB$  rechts von der Mitte einen beliebigen Punkt  $C$  an. Mit Hilfe des Lineals allein läßt sich über und unter der Linie die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ausführen, denn die Geraden  $EF$  und  $E_1F_1$  schneiden sich in diesem.  $D$  ist demnach ein Punkt der gesuchten Ver-

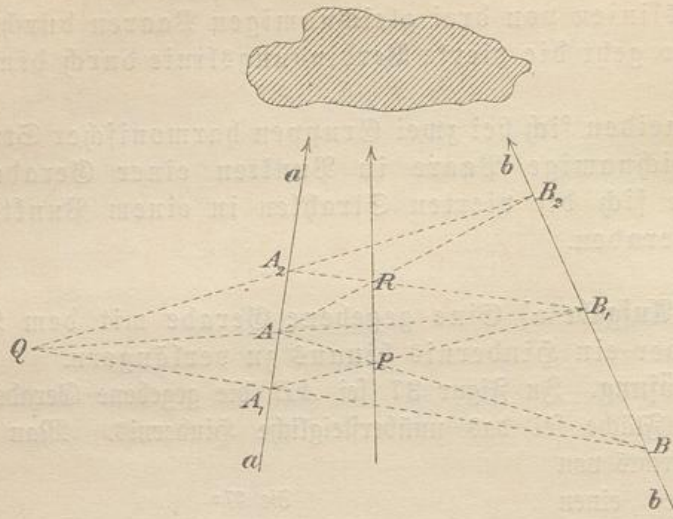


längerung. Wiederholt man die Konstruktion mit einem zweiten Punkte  $C$ , auf  $AB$ , so findet man einen zweiten Punkt  $D_1$ , u. s. w. Die Konstruktion läßt sich noch vereinfachen. Inwiefern?

**Aufgabe b)** Gegeben seien zwei Gerade  $a$  und  $b$ , deren Schnittpunkt jenseits eines unübersteiglichen Hindernisses liegt. Durch einen gegebenen Punkt  $P$  soll eine Gerade gelegt werden, die durch jenen unerreichbaren Schnittpunkt geht.

**Auflösung.** Zwei beliebige Strahlen durch  $P$ , z. B.  $AB$  und  $A_1B_1$ , geben durch die Verbindungslinien  $AB_1$  und  $A_1B$  einen dem Punkte  $P$  entsprechenden Schnittpunkt  $Q$ . Die beliebige Gerade  $QA_2B_2$  giebt mit Hilfe der Geraden  $A_2B_1$  und  $AB_2$  einen Schnittpunkt  $R$ . Jetzt ist  $PR$  die gesuchte Gerade. Ist nämlich  $S$  der unerreichbare

Fig. 37b.

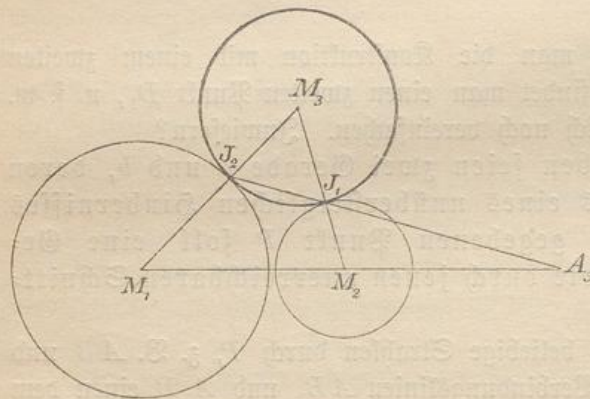


Schnittpunkt, so ist zu den Strahlen  $SQ$ ,  $SA_1$ ,  $SB$  der zum erstgenannten zugeordnete Strahl  $SP$  konstruiert worden.

### VII. Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Lehrsatz.

54) Werden zwei Kreise  $M_1$  und  $M_2$  von einem dritten gleichartig berührt (d. h. beide äußerlich oder beide innerlich), so geht

Fig. 38.



die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt von  $M_1$  und  $M_2$ . Bei ungleichartiger Berührung dagegen geht die Verbindungslinie durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Die Berührungspunkte sind nämlich bei äußerlicher Berührung innere, bei innerlicher Berührung äußere Ähnlichkeitspunkte, bilden also jedesmal mit  $A_3$  bzw.  $J_3$  eine gerade Linie.

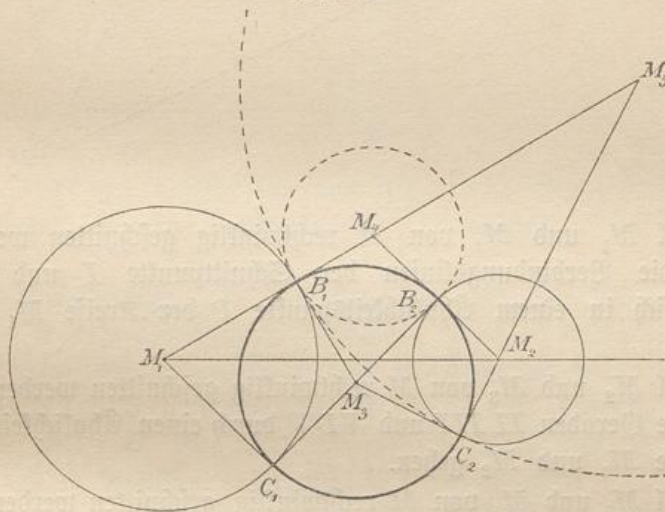
**Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise

gleichartig (bezw. ungleichartig) berührt, und zwar einen davon in einem gegebenen Punkte. (Auflösung einfach.)

55) **Satz.** Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig geschnitten, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte des ersten Kreises mit denen des zweiten durch die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

**Beweis.** In Figur 39 werden die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  von dem Kreise  $M_3$  in  $B_1, B_2, C_1, C_2$  rechtwinklig geschnitten, so daß  $M_1B_1$  und  $M_2B_2$  Tangenten an  $M_3$  sind, die sich in  $M_4$  schneiden, wobei zugleich  $M_4B_1$  und  $M_4B_2$  als Tangenten an  $M_3$  einander gleich sind.  $M_4$  ist also Mittelpunkt eines Kreises, der  $M_1$  und  $M_2$  in  $B_1$  und  $B_2$  gleichartig berührt, so daß  $B_1B_2$  durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt  $A$  von  $M_1$  und  $M_2$  gehen muß.

Fig. 39.

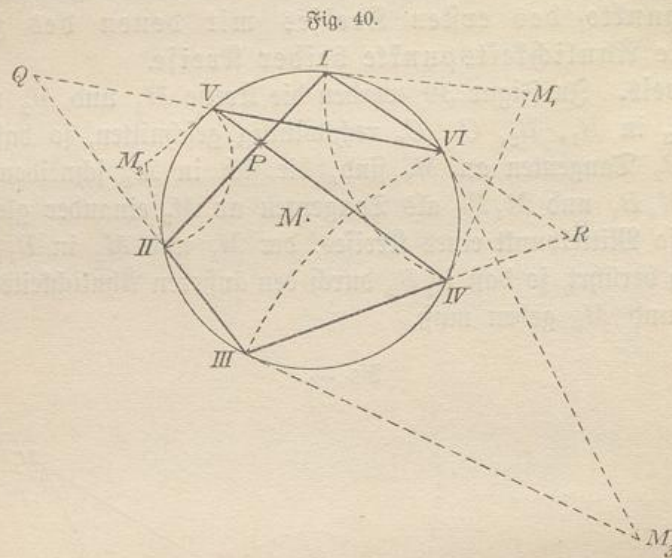


Ebenso schneiden sich  $M_1B_1$  und  $M_2C_2$  in  $M_5$ , letzterer Punkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der  $M_1$  und  $M_2$  ungleichartig berührt, so daß die Gerade  $B_1C_2$  durch  $J$ , den inneren Ähnlichkeitspunkt von  $M_1$  und  $M_2$  gehen muß.

Ebenso geht  $C_1C_2$  durch  $A$  und  $C_1B_2$  durch  $J$ . — Die Berührungskreise entscheiden darüber, ob der Schnittpunkt der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt ist.

56) **Pascalscher Satz.** Die Gegenseiten des Sehnen-sechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

**Zweiter Beweis.\*)** In Figur 40 sei  $M$  der Kreis mit dem Sehnensechseck  $I III III IV V VI$ . Die Tangenten in den Gegenpunkten  $I$  und  $IV$ ,  $II$  und  $V$ ,  $III$  und  $VI$  geben die Mittelpunkte von Kreisen  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ , die den Kreis  $M$  rechtwinklig schneiden.



Weil  $M_1$  und  $M_2$  von  $M$  rechtwinklig geschnitten werden, so müssen die Verbindungslinien der Schnittpunkte  $I$  und  $II$ ,  $IV$  und  $V$  sich in einem Ähnlichkeitspunkte  $P$  der Kreise  $M_1$  und  $M_2$  schneiden.

Weil  $M_2$  und  $M_3$  von  $M$  rechtwinklig geschnitten werden, müssen ebenso die Geraden  $II III$  und  $VI V$  durch einen Ähnlichkeitspunkt  $Q$  der Kreise  $M_1$  und  $M_2$  gehen.

Weil  $M_3$  und  $M_1$  von  $M$  rechtwinklig geschnitten werden, müssen ebenso  $I VI$  und  $III IV$  durch einen Ähnlichkeitspunkt  $R$  der Kreise  $M_3$  und  $M_1$  gehen. Untersucht man die Ähnlichkeitspunkte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  nach Art der Fig. 39 mit Hilfe von Berührungskreisen, so ergibt sich, daß es solche sind, die auf einer Geraden liegen.

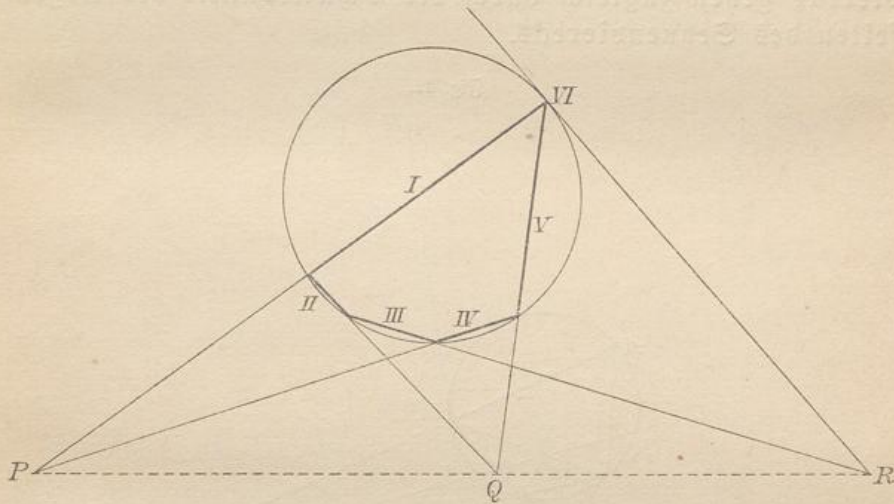
57) **Folgerung.** Nennt man die Seiten des Sehnenfünfecks  $I, II, III, IV, V$ , so kann man es als ein Sechseck mit unendlich kleiner Seite  $VI$  betrachten, deren Verlängerung eine Tangente des Kreises geben muß. Demnach schneiden sich die Fünfecksseiten  $I$  und  $IV$ ,

\*) Der erste Beweis findet sich auf S. 37.

*II* und *V* und außerdem die Seite *III* und die Tangente *VI* in Punkten *P*, *Q*, *R* einer Geraden. (Fig. 41.)

**Aufgabe.** Die Tangenten in den Ecken eines gegebenen Kreis-sehnenfünfecks mit dem Lineal allein zu konstruieren.

Fig. 41.



Die Auflösung ergibt sich aus Figur 41. Bemerkenswert ist, daß der Kreis gar nicht vorhanden zu sein braucht.

58) **Folgerung.** In ähnlicher Art läßt sich das Sehnen-viereck im Kreise als Sechseck betrachten, jedoch in mehrfacher Weise.

In Figur 42 sei  $ABCD$  das Kreissehnenviereck. Betrachtet man  $A$  und  $C$  als Doppelpunkte, so ist es ein Sechseck, und die Seiten  $AB$  und  $CD$ ,  $BC$  und  $AD$  und die Tangenten in  $A$  und  $C$  schneiden sich in Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  einer Geraden.

Betrachtet man  $B$  und  $D$  als Doppelpunkte, so schneiden sich  $AB$  und  $CD$ ,  $BC$  und  $AD$  und die Tangenten in  $B$  und  $D$  in Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $S$  einer Geraden.

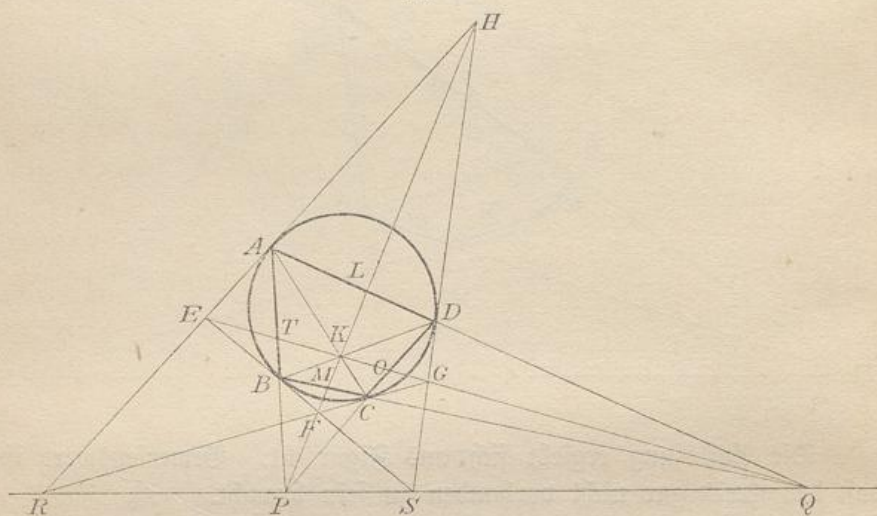
Denkt man sich das Viereck übers Kreuz gezeichnet, z. B. als  $ACBD$ , und betrachtet man  $A$  und  $B$  als Doppelpunkte, so schneiden sich die in  $A$  und  $B$  gezogenen Tangenten, die Geraden  $AC$  und  $BD$ , und die Geraden  $AD$  und  $BC$  in Punkten  $E$   $K$   $Q$  einer Geraden.

In demselben Viereck betrachte man  $C$  und  $D$  als Doppelpunkte, dann findet man ebenso, daß  $KGQ$  auf einer Geraden liegen.

Dieselbe Betrachtung am gekreuzten Viereck  $ABDC$  führt darauf, daß die Punkte  $HKFP$  einer Geraden angehören. Also gilt folgender Satz:

**Satz.** Die gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks im Kreise und des durch seine Ecken gelegten Tangentenvierecks schneiden sich paarweise in vier Punkten, die auf einer Geraden liegen. Die Diagonalen beider Vierecke schneiden sich sämtlich in einem Punkte, die des Tangentenvierecks gehen zugleich durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sehnenvierecks.

Fig. 42.



**Bemerkung.** Betrachtet man in Figur 42  $EFGH$  als vollständiges Vierseit mit den Ergänzungsseiten  $R$  und  $S$ , so ergeben sich  $P, Q, R, S$ , ebenso  $E, G, K, Q$  und  $H, F, K, P$  als harmonische Punktgruppen. Durch Projektion von  $H$  bzw.  $F$  aus liegen auch auf  $AQ$  und  $BQ$  harmonische Punktgruppen. Entsprechende Betrachtungen für das Viereck  $ABCD$  geben auch auf  $DP$  und  $AP$  harmonische Punkte. Demnach sind auch die Diagonalen beider Vierecke harmonische Strahlen.

[Steht  $AC$  senkrecht auf  $BD$ , so ist das äußere Viereck ein bicentrisches, d. h. ein Tangentensehnenviereck. Hieraus ergeben sich für bicentrische Vierecke zahlreiche interessante Eigenschaften. Der Fall der Symmetrie ist besonders leicht zu behandeln.]

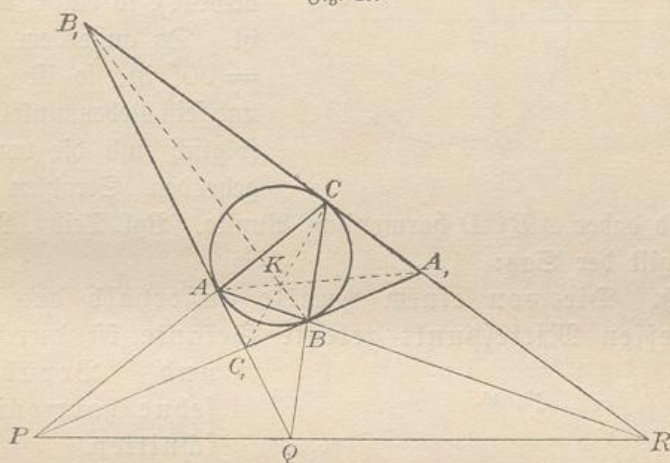
59) **Folgerung.** Betrachtet man die Ecken des Sehnedreiecks (Fig. 43) als Doppelpunkte, so schneidet sich nach dem Sechsecksatz jede Seite mit der Tangente des Gegenpunktes so, daß die Schnittpunkte  $P, Q, R$  auf einer Geraden liegen.

Da auch die Berührungstransversalen  $AA_1, BB_1$  und  $CC_1$  sich

nach Nr. 38 in einem Punkte  $K$  schneiden, so ergibt sich durch Projektion der Figur unter Weglassung des Kreises eine entsprechende, bei der jedoch nicht mehr der Um-Kreis von  $ABC$  zugleich der In-Kreis von  $A_1B_1C$  ist. Aus der neuen Figur aber erkennt man den

**Satz:** Zieht man in einem Dreieck von den Ecken aus Gerade durch einen Punkt bis zu den Gegenseiten, und verbindet man die Schnittpunkte auf den Gegenseiten mit einander, so schneiden die Seiten des neuen Dreiecks die entsprechenden des ursprünglichen in Punkten  $P, Q, R$ , die auf einer Geraden liegen.

Fig. 43.



**Bemerkung.** Der Beweis ergibt sich ohne Projektion aus Folgendem: Betrachtet man  $AKBC_1$  als vollständiges Vierseit, so sind  $B_1, A_1, C, R$  harmonische Punkte. Ebenso giebt das Vierseit  $A_1CKB$  die harmonischen Punkte  $B_1, C_1, A, Q$ . Von  $B_1$  gehen also zwei Gruppen harmonischer Punkte aus, so daß die Geraden  $CA, A_1C_1$  und  $RQ$  sich in demselben Punkte  $P$  schneiden müssen.

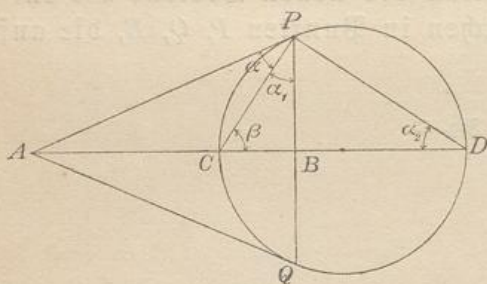
60) **Bemerkung.** Bezeichnet man jede Parallel- und Centralprojektion des Kreises als einen Kegelschnitt, so geht die Pascalsche Figur am Kreise durch die Projektion in die entsprechende Pascalsche Figur am Kegelschnitte über. Da die Geraden dabei Gerade bleiben, so gilt der Pascalsche Satz mit seinen Folgerungen von jedem Kegelschnitte.

## VIII. Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise.

(Pol und Polare.)

61) In Fig. 44 sind von  $A$  aus Tangenten  $AP$  und  $AQ$  an einen Kreis gezogen, so daß die Berührungsehne  $PQ$  senkrecht auf der durch den Mittelpunkt gelegten Sekante  $AD$  steht. Dabei

Fig. 44.

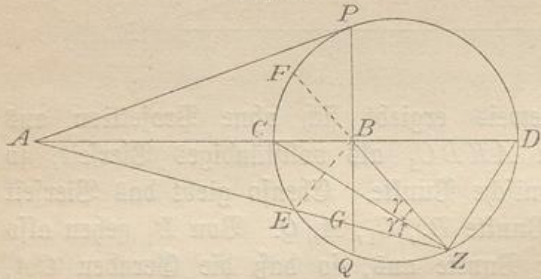


ist, wenn man noch  $PC$  und  $PD$  zieht,  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_2$  und  $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_1$  (warum beides?), so daß  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$  ist. Da außerdem  $\sphericalangle CPD = 90^\circ$  ist, so ist  $\sphericalangle APB$  und sein Nebenwinkel halbiert, folglich sind die von  $P$  ausgehenden Strahlen harmo-

nische, und daher  $ABCD$  harmonische Punkte. (Vgl. Teil I. Nr. 169.) Folglich gilt der Satz:

**Satz.** Die von einem Punkte außerhalb des Kreises durch dessen Mittelpunkt gelegte Sekante ist durch Kreis und Berührungsehne harmonisch geschnitten.

Fig. 45.



62) Verbindet man nun einen beliebigen Punkt  $Z$  der Peripherie mit den besprochenen Punkten  $ABCD$ , so sind  $Z(ABCD)$  harmonische

Strahlen. Weil aber die zugeordneten Strahlen  $CZ$  und  $DZ$  auf einander senkrecht stehen, so ist  $\sphericalangle AZB$  halbiert, folglich  $\frac{AZ}{BZ} = \frac{AC}{BC}$ . Wo also auch der Punkt  $Z$  auf der Peripherie liege, stets ist das Verhältnis  $\frac{AZ}{BZ}$  dasselbe. Bezeichnet man  $AZ$  jedesmal mit  $p$ ,  $BZ$  mit  $q$  und das konstante Verhältnis mit  $c$ , so kann man abgekürzt sagen:

Der Kreis ist die Kurve konstanten Verhältnisses oder die Kurve  $\frac{p}{q} = c$ .

63) Aus  $\gamma = \gamma_1$  folgt ferner  $\widehat{EC} = \widehat{CF}$  (gleiche Peripheriewinkel, gleiche Bogen), also ist aus Gründen der Symmetrie gegen den Durchmesser  $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CBE$ . Da ferner  $PQ \perp CD$ , so sind die von  $B$  ausgehenden Strahlen harmonische, also  $AGEZ$  harmonische Punkte. Folglich:

**Satz.** Jede durch  $A$  gehende Sekante wird durch die zu  $A$  gehörige Berührungssehne harmonisch geteilt.

64) Zieht man von  $A$  aus beliebige Sekanten  $AF$  und  $AC$ , die den Kreis in  $G$  und  $E$  schneiden, und verbindet man die Schnittpunkte auf alle Arten, so entsteht ein vollständiges Vierseit  $BCDEFG$ , dessen Diagonalen harmonisch geteilt sind. Demnach sind  $AJGF$  und  $AHEC$  harmonische Punkte. Folglich muß die Berührungssehne von  $A$  durch  $H$  und  $J$  gehen, d. h.  $BD$  ist zugleich die Berührungssehne  $PQ$ . Demnach gilt der

**Satz.** Zieht man von einem Punkte  $A$  außerhalb des Kreises zwei Sekanten, so schneiden sich die Verbindungslinien der Kreis Schnittpunkte paarweise auf der Berührungssehne von  $A$ .

65) Legt man beide Sekanten unendlich nahe aneinander, so giebt das eine Paar von Verbindungslinien unendlich kurze Sehnen, deren Verlängerungen Tangenten sind. Auch diese müssen sich auf der Berührungssehne schneiden. Folglich:

**Satz.** Zieht man von einem Punkte  $A$  außerhalb des Kreises beliebig viele Sekanten, so liegen die Schnittpunkte aller zugehörigen Tangentenpaare auf einer geraden Linie, der Berührungssehne von  $A$ . (Fig. 47.)

**Aufgabe.** Von einem Punkte  $A$  außerhalb des Kreises an diesen mit dem Lineal allein Tangenten zu konstruieren.

Fig. 46.

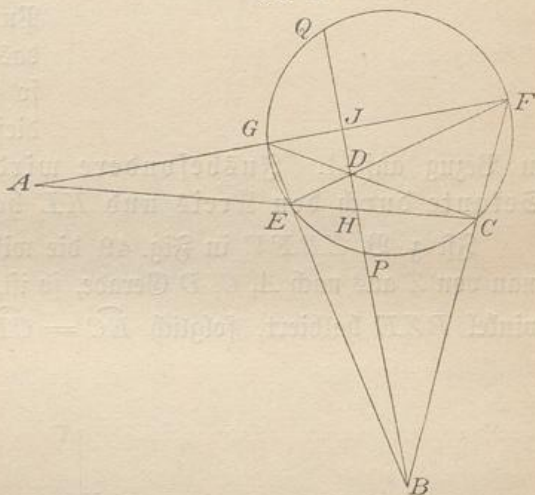
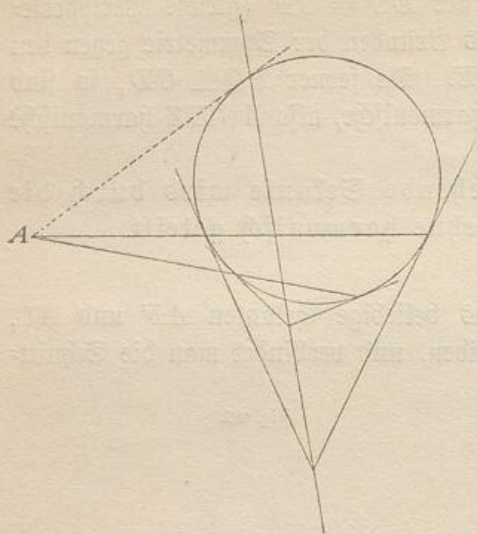


Fig. 47.



**Auflösung.** Man ziehe zwei Sekanten  $AGF$  und  $AEC$  (Fig. 46).  $GC$  und  $EF$  geben einen Schnittpunkt  $D$ ,  $GE$  und  $FC$  einen Schnittpunkt  $B$ .  $BD$  schneidet den Kreis in  $P$  und  $Q$ .  $AP$  und  $AQ$  sind die gesuchten Tangenten.

66) Sind in Fig. 48  $ABCD$  dieselben harmonischen Punkte wie vorher, und ist  $KL$  das Lot im Punkte  $A$  auf  $AD$ , so spielt  $KL$  in Bezug auf  $B$  dieselbe Rolle, wie vorher  $PQ$  in Bezug auf  $A$ . Insbesondere wird jede durch  $B$  gelegte Sekante durch den Kreis und  $KL$  harmonisch geteilt.

Ist z. B.  $ZBFV$  in Fig. 49 die willkürliche Sekante, und zieht man von  $Z$  aus nach  $A, C, D$  Gerade, so ist, wie vorher, der Peripheriewinkel  $BZE$  halbiert, folglich  $\widehat{EC} = \widehat{CF}$ , folglich, wenn man  $AF$

Fig. 48.

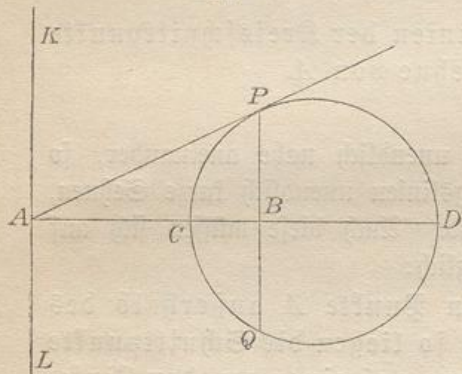
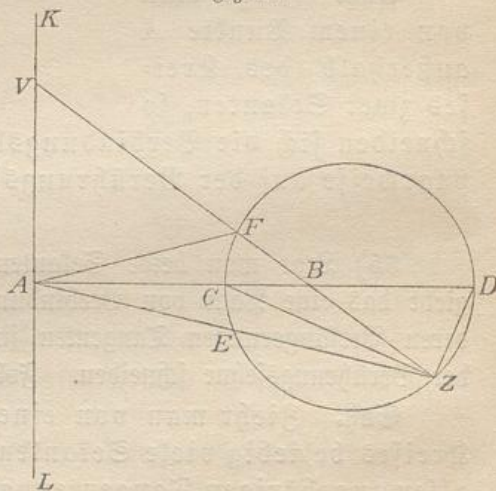


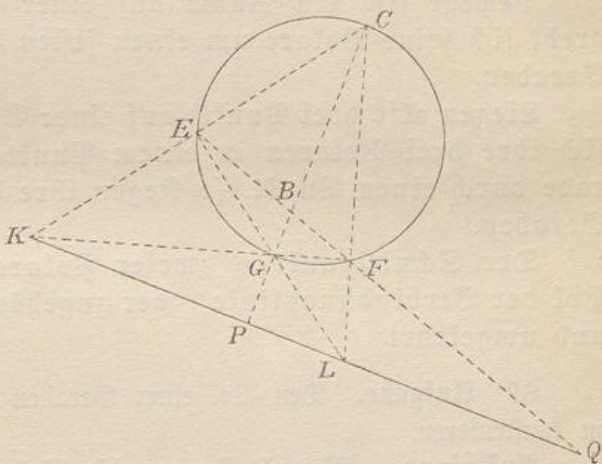
Fig. 49.



zieht,  $\sphericalangle FAE$  aus Symmetriegründen halbiert. Da außerdem  $KL \perp AD$ , so sind die von  $A$  ausgehenden Strahlen harmonische, folglich auch  $VBFZ$  harmonische Punkte.

67) Zieht man durch einen innerhalb des Kreises liegenden Punkt  $B$  zwei beliebige Sehnen, und verbindet man ihre Kreisschnittpunkte auf alle Arten, so erhält man Schnittpunkte  $K$  und  $L$  außerhalb des Kreises. Im vollständigen Vierseit  $CEGFKL$  ist die Diagonale  $GC$  harmonisch geteilt, ebenso  $EF$ . Weil aber  $CGBP$  und  $EFBQ$  harmonische Punkte sind, so muß  $KL$  die Linie sein, die man erhält, wenn man auf dem durch  $B$  gelegten Durchmesser im vierten harmonischen Punkte  $A$  ein Lot errichtet.

Fig. 50.



Legt man die Sekanten durch  $B$  unendlich nahe aneinander, so erhält man, wie oben, in den Endpunkten Tangenten, die sich auf  $KL$  schneiden.

68) Nennt man nun einen Punkt  $P$ , mag derselbe innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, einen Pol, und bezeichnet man das auf dem durch  $P$  gehenden Durchmesser im zugeordneten harmonischen Punkte errichtete Lot als Polare, so kann man die obigen beiden Gruppen von Sätzen und Aufgaben einheitlich in folgende zusammenfassen:

Jede durch den Pol gehende Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

Zieht man durch den Pol zwei Sekanten, und verbindet man ihre Kreisschnittpunkte auf alle Arten, so schneiden sich die Verbindungslinien paarweise auf der Polare.

Darauf beruht die Konstruktion der Polare zu einem gegebenen Pol mit dem Lineal allein.

Zieht man durch den Pol beliebige Sekanten, so liegen die Schnittpunkte zusammengehöriger Tangenten auf der Polare.

Nun ist aber der Schnittpunkt jedes Tangentenpaares der Pol zur Berührungsehne desselben Paares, die nun als Polare zu betrachten ist. Folglich:

Dreht sich die Polare um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare des festen Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden.

Liegen also drei Punkte auf einer Geraden, so schneiden sich ihre drei Polaren in einem Punkte. Gehen drei Gerade durch einen Punkt, so liegen ihre drei Pole auf einer Geraden.

Der Schnittpunkt  $R$  zweier Polaren  $p$  und  $q$  ist der Pol der Verbindungslinie  $r$  der zugehörigen Pole  $P$  und  $Q$ , und umgekehrt.

69) **Aufgabe.** Den Pol einer Geraden mit dem Lineal allein zu konstruieren.

**Auflösung.** Man konstruiere die Polaren  $p$  und  $q$  zu zwei beliebigen Punkten  $P$  und  $Q$  der Geraden. Der Schnitt von  $p$  und  $q$  ist der gesuchte Pol.

Zu jedem aus Punkten und Geraden bestehenden Gebilde kann man also mit Hilfe eines Kreises ein anderes Gebilde konstruieren, indem man zu jedem Punkte die zugehörige Polare, zu jeder Geraden den zugehörigen Pol bestimmt. Man nennt dieses neue Gebilde die Polarfigur des gegebenen Gebildes (oder auch die reciproke Figur).

[Da jedem Punkte außerhalb des Kreises eine den Kreis schneidende Polare entspricht, jedem innerhalb gelegenen eine den Kreis nicht schneidende Polare, so gilt als Zwischenfall der eines auf dem Kreise liegenden Punktes, dessen Polare den Kreis weder schneidet noch gar nicht trifft, d. h. die Tangente im Punkte selbst. Der Mittelpunkt des Kreises hat seine Polare in unendlicher Entfernung. (Eigentlich müßte man ihn als unendlich kleinen Kreis betrachten und ihm unendlich viele Polaren zuschreiben, die in unendlicher Entfernung liegen.) Ebenso hat jeder Durchmesser seinen Pol in unendlicher Entfernung, aber auf dem senkrecht auf dem ersteren stehenden Durchmesser.]

Aus den Eigenschaften jeder Figur kann man Schlüsse auf die Polarfigur ziehen. Aus gewissen Sätzen über Punkte auf einer Geraden kann man solche über Gerade durch einen Punkt (und umgekehrt) ableiten.

70) [Eine merkwürdige Beziehung ergibt sich, wenn man zur Figur des vollständigen Vierseits mit seinen harmonischen Punkten und

Strahlen die reciproke Figur bildet. Den 9 Punkten  $ABCDEFXYZ$  in Fig. 51 entsprechen 9 Gerade  $a, b, c, d, e, f, x, y, z$  in Fig. 52; den Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 entsprechen Punkte  $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII$ . In der Urfigur sind 1, 4, 5, 7 harmonische Strahlen, in der Polarfigur entsprechen diesen die Punkte  $I, IV, V, VII$ , die harmonische sind, weil es sich um des Viereck  $II VI III VIII$  mit den Ergänzungssecken  $I$  und  $IV$  handelt.

Folglich gilt ganz allgemein der Satz: Harmonischen Strahlen entsprechen in der Polarfigur stets harmonische Punkte; harmonischen Punkten der ersteren entsprechen harmonische Strahlen der anderen.]

Fig. 51.

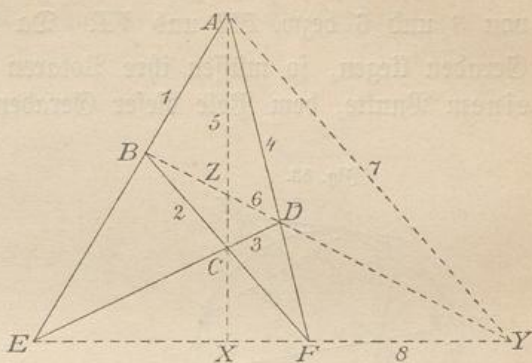
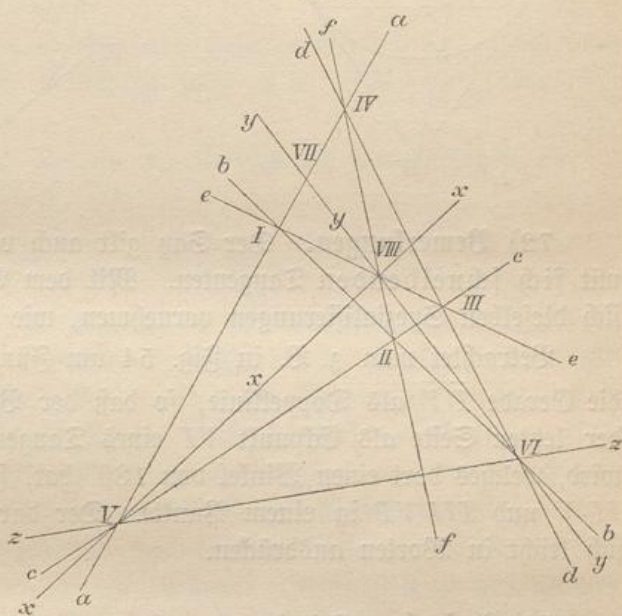


Fig. 52.



71) **Satz des Brianchon.** Die Verbindungslinien der Gegenseiten des Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkte.

**Beweis.** Die Polarfigur zu  $I II III IV V VI$  in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis (Fig. 53) ist das Sechseck der Berührungspunkte mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Gegenseiten 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 des letzteren schneiden sich nach Pascal in drei Punkten  $P, Q$  und  $R$ , die auf einer Geraden liegen. Dem Schnittpunkte von 1 und 4 entspricht aber als Polare die Verbindungslinie

von  $I$  und  $IV$ , dasselbe gilt von 2 und 5 bzw.  $II$  und  $V$ , dasselbe von 3 und 6 bzw.  $III$  und  $VI$ . Da aber  $P, Q$  und  $R$  auf einer Geraden liegen, so müssen ihre Polaren  $IIV, II V, III VI$  sich in einem Punkte, dem Pole dieser Geraden, schneiden.

Fig. 53.

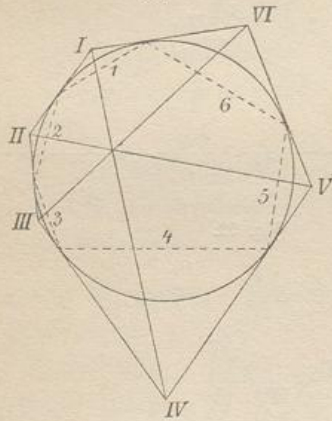
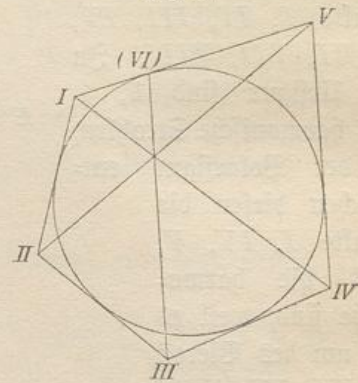


Fig. 54.



72) **Bemerkungen.** Der Satz gilt auch vom Tangentensechseck mit sich schneidenden Tangenten. Mit dem Brianchon-Satze lassen sich dieselben Spezialisierungen vornehmen, wie mit dem Pascalschen.

Betrachtet man z. B. in Fig. 54 am Fünfeck  $I II III IV V$  die Gerade  $I V$  als Doppellinie, so daß der Berührungspunkt  $(VI)$  der letzten Seite als Eckpunkt  $VI$  eines Tangentensechsecks betrachtet wird, welches dort einen Winkel von  $180^\circ$  hat, so schneiden sich  $I IV, II V$  und  $III VI$  in einem Punkte. Der darin liegende Satz läßt sich leicht in Worten ausdrücken.

73) **Aufgabe.** Bei einem gegebenen Kreistangentenfünfeck sollen die Berührungspunkte des nicht gezeichneten Kreises mit dem Lineal allein konstruiert werden.

**Bemerkung.** Sieht man das Tangentenvierseit und des Tangentendreiheit am Kreise als Spezialisierungen des Sechsecks an, so ergeben sich die früheren Figuren und Sätze, jedoch von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet.

Die außerordentliche Bedeutung der Lehre von den reciproken Polaren und des Pascalschen und Brianchonschen Satzes beruht darin, daß beide bei der Projektion erhalten bleiben, obwohl der Kreis dabei in einem Kegelschnitt übergeht. Daraus werden sich später anderweitige Sätze und eine Fülle von Konstruktionen ergeben.

74) **Bemerkung.** Aus der ersten Figur dieses Kapitels ergibt sich noch eine merkwürdige Beziehung. In der Proportion

$$AC : CB = AD : BD$$

Fig. 55.

setze man

$$AC = AM - r,$$

$$AD = AM + r,$$

$$CB = r - BM,$$

$$BD = BM + r,$$

so daß man erhält:

$$\begin{aligned} & (AM - r) : (r - BM) \\ &= (AM + r) : (BM + r). \end{aligned}$$

Die Produkte der inneren und äußeren Glieder sind gleich, und aus der entsprechenden Gleichung folgt  $AM \cdot BM = r^2$ , oder auch  $MA \cdot MB = r^2$ .

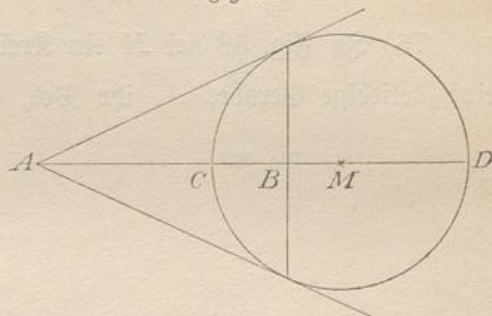
Nimmt man den Radius des Kreises als Längeneinheit an, so hat man  $MA \cdot MB = 1$ , also

$$MA = \frac{1}{MB} \quad \text{und} \quad MB = \frac{1}{MA}.$$

Jedem Punkte  $A$  außerhalb des Kreises entspricht also ein innerhalb des Kreises gelegener  $B$ , dessen „Radius“ den umgekehrten Wert hat, und umgekehrt entspricht jedem inneren Punkte ein äußerer nach demselben Gesetze. Der zweite Punkt liegt jedesmal auf der Polare des ersten und auf dem zugehörigen Durchmesser. Er ist also leicht zu konstruieren.

Dieses Abbildungsprinzip bezeichnet man als die Abbildung oder Spiegelung mittels reziproker Radien. Es trägt auch den Namen der Inversion. Den Mittelpunkt des spiegelnden Kreises nennt man das Centrum der Inversion. Einige Sätze darüber sollen in Folgendem\*) abgeleitet werden.!

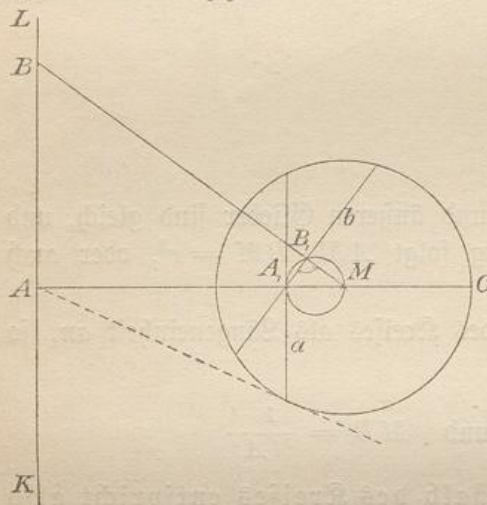
\*) Kapitel IX und X und die sich anschließenden Berührungsaufgaben und kartographischen Betrachtungen können am Gymnasium selbstverständlich überschlagen werden. Es handelt sich aber dabei um einen Übungsstoff so anregender Art, daß der Versuch, durch ihn eine Reihe veralteter und geisttötender Konstruktionsaufgaben zu ersetzen, dringend anzuraten ist, besonders auch im Hinblick auf die mathematische Geographie und Kartographie.



### IX. Die Inversion oder Spiegelung\*) mittels reziproker Radien.

75) In Fig. 56 sei  $M$  ein Kreis mit Radius  $MC = 1$ ,  $KL$  eine beliebige Gerade,  $A_1$  ihr Pol, also nach 74)  $MA_1 = \frac{1}{MA}$ .

Fig. 56.



Die Polare  $b$  jedes Punktes  $B$  auf der Geraden geht durch  $A_1$ . Dabei ist  $b \perp BM$ , folglich liegt  $B_1$ , das reciproke Bild von  $B$ , auf einem Kreise, der  $MA_1$  zum Durchmesser hat. Der unendlich ferne Bereich der Geraden  $KL$  entspricht dem Punkte  $M$ , denn  $\frac{1}{\infty} = 0$ . Also:

Das reciproke Bild jeder Geraden in Bezug auf einen Kreis ist ein Kreis, der durch den Mittelpunkt  $M$  des spiegelnden Kreises und den Pol  $A_1$  der Ge-

raden geht und die Verbindungslinie  $A_1M$  zum Durchmesser hat.

Liegt die Gerade ganz außerhalb des spiegelnden Kreises, so liegt das Inversionsbild ganz innerhalb desselben. Schneidet sie den Kreis, so geht der entsprechende Kreis durch dieselben Schnittpunkte. Berührt die Gerade den spiegelnden Kreis, so berührt der Bildkreis in demselben Punkte. Geht die Gerade durch  $M$ , so entspricht sie sich selbst, so daß der innere Teil das Bild des äußeren ist.

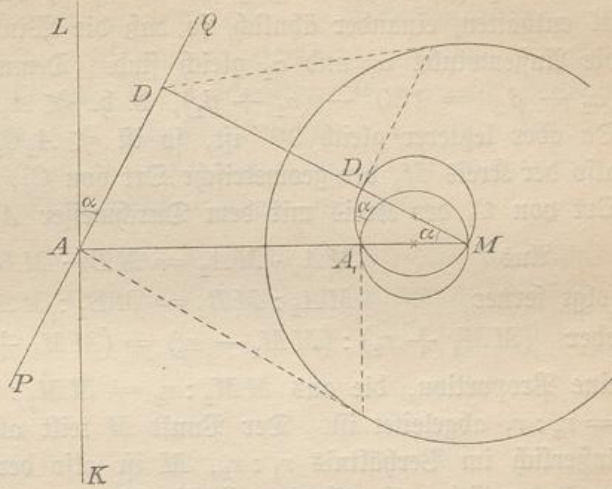
76) Schneiden sich in  $A$  zwei Gerade  $KL$  und  $PQ$  unter einem Winkel  $\alpha$ , so entsprechen ihnen bei dieser Abbildung zwei Kreise durch  $A_1$  und  $M$ , die sich dort unter demselben Winkel  $\alpha$  schneiden,

\*) Der Name Spiegelung empfiehlt sich aus physikalischen Gründen. Man vergleiche die isothermische Spiegelung und die Methode der elektrischen Bilder. Mit der optischen Spiegelung hat allerdings die reciproke Spiegelung nichts zu thun, sie entspricht aber ganz der optischen Spiegelung gegen die Gerade, was sich sofort zeigen wird. Man sagt statt Inversion auch umgekehrte Abbildung.

weil auch ihre Durchmesser bei  $M$  diesen Winkel bilden. Weil die Winkel der Geraden durch  $A$  und die der entsprechenden Kreise durch  $A_1$  gleich sind, nennt man diese Art von Abbildung eine winkeltreue (isogonale).

Dem Strahlenbüschel durch  $A$  entspricht das Kreisbüschel durch  $A_1$  und  $M$ . Die sich entsprechenden Winkel stimmen überein.

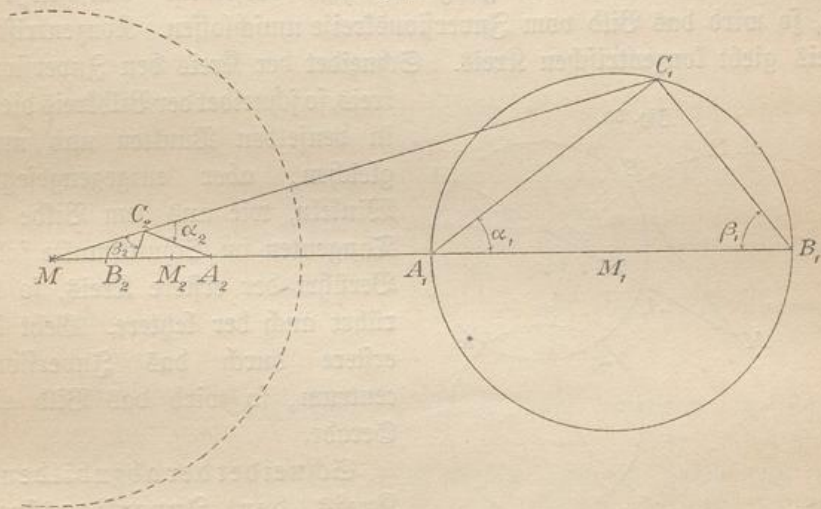
Fig. 57.



77) Aufgabe. Was entspricht bei der reziproken Spiegelung einem beliebigen Kreise der Ebene?

Auflösung. In Fig. 58 sei  $M$  der spiegelnde Kreis mit Radius 1,  $M_1$  der gespiegelte mit Radius  $r_1$ . Man ziehe die Centrale  $MM_1$ .

Fig. 58.



bis  $B_1$  und durch  $M$  die beliebige Sekante  $MC_1$ , worauf man  $C_1$  mit  $A_1$  und  $B_1$  verbinde. Man bilde die reziproken Bilder  $A_2, B_2, C_2$  von  $A_1, B_1$  und  $C_1$  und verbinde  $C_2$  mit  $A_2$  und  $B_2$ . Da  $MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2 = MC_1 \cdot MC_2 = 1$  ist, so sind die Dreiecke  $MA_2C_2$

und  $MA_1C_1$ , ebenso  $MB_2C_2$  und  $MB_1C_1$ , die sämtlich den Winkel  $M$  enthalten, einander ähnlich, so daß die Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , ebenso die Außenwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gleich sind. Demnach ist auch  $180^\circ - (\alpha_2 + \beta_2) = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1)$ , d. h.  $\sphericalangle A_2C_2B_2 = \sphericalangle A_1C_1B_1$ . Da aber letzterer gleich  $90^\circ$  ist, so ist  $\sphericalangle A_2C_2B_2$  ein Rechter. Ist also der Kreis  $M_1$  der geometrische Ort von  $C_1$ , so ist der geometrische Ort von  $C_2$  der Kreis mit dem Durchmesser  $A_2B_2$ .

$$\text{Aus} \quad MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2$$

$$\text{folgt ferner} \quad MA_2 : MB_2 = MB_1 : MA_1,$$

$$\text{oder} \quad (MM_2 + r_2) : (MM_2 - r_2) = (MM_1 + r_1) : (MM_1 - r_1),$$

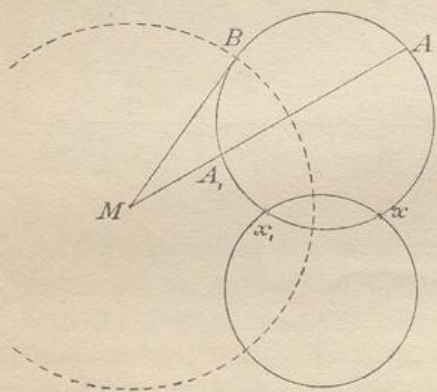
eine Proportion, die aus  $MM_2 : r_2 = MM_1 : r_1$  oder  $MM_2 : MM_1 = r_2 : r_1$  abgeleitet ist. Der Punkt  $M$  teilt also die Gerade  $M_1M_2$  äußerlich im Verhältnis  $r_1 : r_2$ ,  $M$  ist also der äußere Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise  $M_1$  und  $M_2$ . Folglich:

Jeder Kreis geht durch Inversion in einen anderen Kreis über, und zwar ist das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise.

Dies folgt auch ohne Rechnung aus der perspektivischen Lage der einander entsprechenden Punkte.

78) Liegt der abzubildende Kreis ganz außerhalb des Inversionskreises, so fällt sein Bild ganz innerhalb desselben. Umschließt er ihn, so wird das Bild vom Inversionskreise umschlossen. Konzentrischer Kreis giebt konzentrischen Kreis. Schneidet der Kreis den Inversions-

Fig. 59.



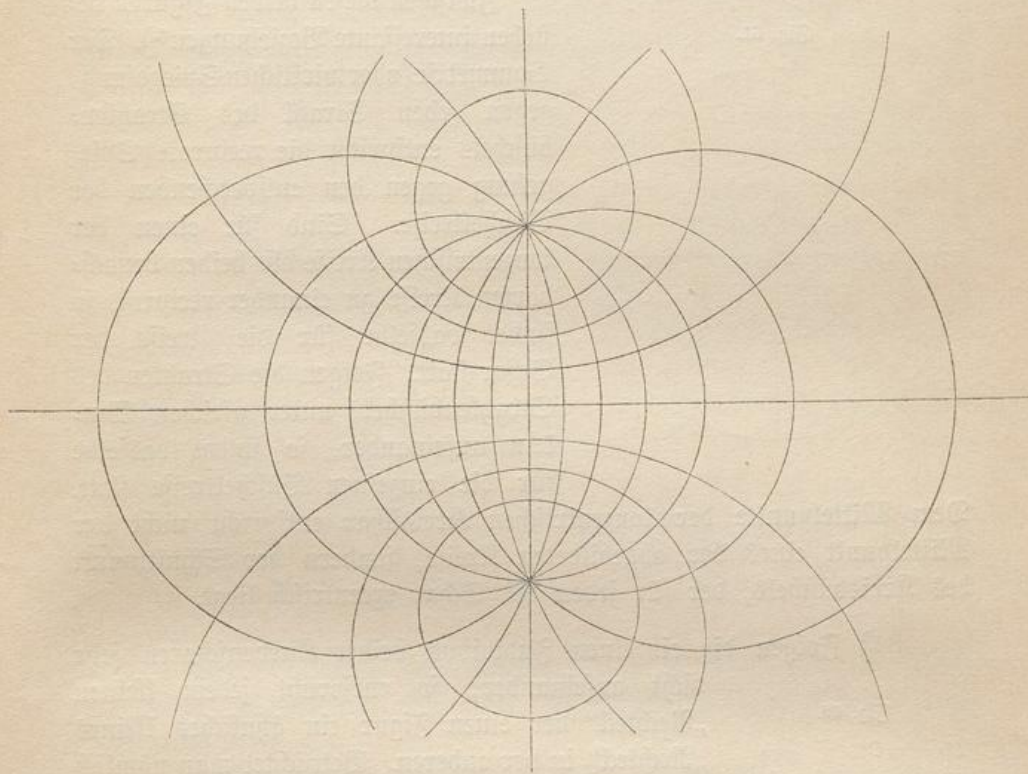
kreis, so schneidet der Bildkreis diesen in denselben Punkten und unter gleichen, aber entgegengesetzten Winkeln, wie aus dem Bilde der Tangenten im Schnittpunkte folgt. Berührt der erstere Kreis, so berührt auch der letztere. Geht der erstere durch das Inversionscentrum, so wird das Bild eine Gerade.

Schneidet der abzubildende Kreis den Inversionskreis rechtwinklig (orthogonal), so entspricht der erstere sich selbst. In Fig. 59 ist nämlich für die beliebige Sekante  $MA$   $MA_1 = \frac{1}{MA}$ , da  $MA_1 \cdot MA = MB^2 = 1^2 = 1$  ist. Beide Kreise können ihre Rolle vertauschen. Jeder

Durchmesser des einen ist infolge der Polarenbeziehung durch den anderen harmonisch geteilt. — Wird der Inversionskreis  $M$  von zwei anderen rechtwinklig geschnitten, und schneiden sich diese beiden in einem Punkte  $X$ , so schneiden sie sich auch in dem zu  $A$  reciproken Punkte  $X_1$ . Alle Kreise durch  $X$  und  $X_1$  schneiden den Inversionskreis rechtwinklig. Die Tangenten von  $M$  an die Kreise durch  $X$  und  $X_1$  sind also sämtlich von gleicher Länge.

79) Werden zwei sich schneidende Kreise durch einen Inversionskreis abgebildet, so schneiden sich die Bildkreise unter demselben Winkel,

Fig. 60.



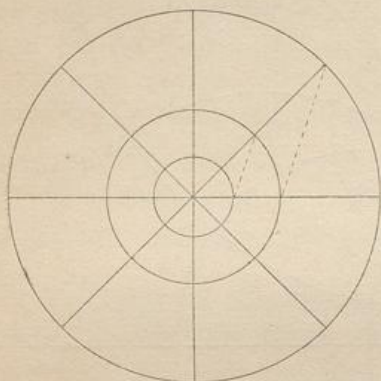
denn die Bilder der Tangenten im Schnittpunkte behalten den Winkel bei. Folglich:

Hat man ein Kreisbüschel durch zwei Punkte und die zugehörige orthogonale Kreisschar, und macht man irgend einen der Büschelkreise zum Inversionskreise, so geht jeder Büschelkreis in den Büschelkreis über, der den Inversionskreis unter dem entgegengesetzten Winkel schneidet, und jeder Kreis der Schar geht in sich selbst über. In diesem

Sinne ist die Gesamtfigur zu sich selbst reciprok. Macht man einen der Kreise der Schar zum Inversionscentrum, so entspricht jeder Büschelkreis sich selbst, und jeder Kreis der Schar geht in einen anderen der Schar so über, daß das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt für je zwei sich entsprechende Kreise ist.

80) Macht man einen der Büschelpunkte zum Inversionscentrum, so geht durch reciproke Spiegelung das Kreisbüschel nebst der zugehörigen Kreisschar in ein Strahlenbüschel mit der zugehörigen konzentrischen Kreisschar über.

Fig. 61.

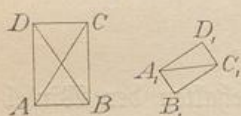


Zwischen diesen beiden Figuren bestehen interessante Beziehungen\*). Der Symmetrie (oder wirklichen Spiegelung) gegen jeden Strahl des Strahlenbüschels entspricht die reciproke Spiegelung gegen den entsprechenden der Büschelkreise. Sind für einen der konzentrischen Kreise die beiden benachbarten Kreise zu einander reciprok, so findet dasselbe für die Kreise der Schar statt. Folgen die Strahlen des Strahlenbüschels unter gleichen Winkeln aufeinander, so findet dasselbe für die einzelnen Büschelkreise statt.

Dem Mittelpunkte der konzentrischen Kreisschar entspricht nicht der Mittelpunkt eines der abgebildeten Kreise, sondern der Schnittpunkt des Kreisbüschels, der für jeden der Schar excentrisch liegt.

81) Folgen die einzelnen Individua beider Kurvenscharen sehr dicht aufeinander, so entspricht jedem kleinen „Rechteck“ der einen Figur ein ähnliches kleines „Rechteck“ in der anderen.

Fig. 62.



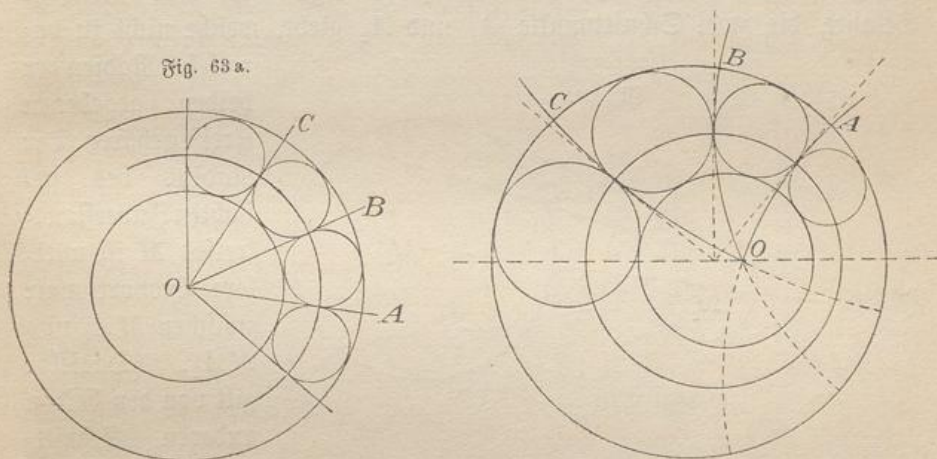
Betrachtet man nämlich die Begrenzungen der kleinen Rechtecke und ihre Diagonalen als gerade Linien, so sind wegen der Winkeltreue die kleinen Dreiecke, also auch die Rechtecke, ähnliche Figuren. Sind die kleinen Rechtecke der Fig. 61

\*) Fig. 60 ist auch in Bezug auf physikalische Verhältnisse von Wichtigkeit, z. B. läßt man in einem der Büschelpunkte einen elektrischen Strom in eine große Metallplatte eintreten, im anderen austreten, so geben die Büschelkreise die Stromlinien an, während jeder der anderen Kreise die Punkte gleicher elektrischer Spannung angiebt.

unter einander ähnlich, so gilt es auch von Fig. 60. Darf man sie z. B. in der einen als kleine Quadrate\*) betrachten, so ist dies auch in der anderen der Fall. [Beide Zeichnungen sind also in den kleinsten Teilen ähnlich, während bei größeren Teilen die Ähnlichkeit aufhört. Diese „Konformität“ ist eine Folge der Winkeltreue.]

82) Auch anderen Kreisen der Fig. 60 entsprechen Kreise der Fig. 61. Zeichnet man z. B. zwischen zwei konzentrischen Kreisen der Fig. 63a eine Reihe von Berührungskreisen, so liegen ihre gegenseitigen Berührungspunkte auf einem Kreise, der der Inversionskreis für die gesamte neue Figur ist. Macht man also dasselbe bei zwei nichtkonzentrischen Kreisen der Fig. 63b, so liegen auch jetzt die Berührungspunkte auf dem Inversionskreise. Dem Tangentenbüschel

Fig. 63b.



in Fig. 63a entspricht das berührende Kreisbüschel in Fig. 63b, den konstanten Winkeln des einen entsprechen konstante Winkel beim

\*) Folgen die Strahlen in Fig. 61 unter dem Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  aufeinander, so darf man die kleinen Rechtecke als Quadrate betrachten, sobald die Radien be-

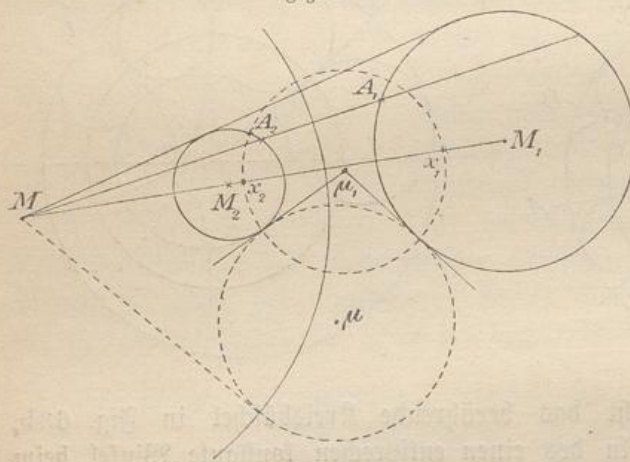
nachbarter konzentrischer Kreise im Verhältnis  $1:e^n$  stehen, wo  $e = 2,7182818\dots$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Ist dieses Verhältnis berechnet und ein einziges Mal konstruiert, so ergibt sich das gesamte Netz von Quadraten durch einfache Ähnlichkeitskonstruktion, denn jeder Radius ist die mittlere Proportionale zwischen zwei benachbarten. Den elementaren Beweis für diese wichtige Beziehung, die den Zusammenhang zwischen der Mercatorkarte und der Polarkarte nach Hipparch-Ptolemäus ergibt, findet man anhangsweise am Schlusse des Buches.

anderen. (Auch die gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch einen Punkt, ohne jedoch gleiche Winkel zu bilden.) Schließt in Fig. 63 a die gezeichnete Kreisreihe nach einem Umfange, so schließt sie jedesmal, wenn man auch anders anfängt. Dasselbe gilt auch von der nicht-konzentrischen Fig. 63 b, was auf anderem Wege nur schwer zu beweisen ist. Jeder andere Kreis der Schar, der die Kreisreihe schneidet, schneidet sämtliche Berührungskreise unter konstantem Winkel. (Die entsprechenden Sätze über die Berührungskreise zwischen zwei Büschelkreisen werden dem Schüler überlassen.)

83) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen denjenigen Inversionskreis zu finden, der den einen in den anderen verwandelt.

**Auflösung.** Man suche zu den beiden Kreisen  $M_1$  und  $M_2$  den äußeren Ähnlichkeitspunkt  $M$ . Durch  $M$  lege man eine beliebige Sekante, die zwei Schnittpunkte  $A_1$  und  $A_2$  giebt, welche nicht zu parallelen Radien der

Fig. 64.



beiden gegebenen Kreisegehören. Der Radius des gesuchten Inversionskreises  $M$  ist mittlere Proportionale zwischen  $MA_1$  und  $MA_2$ . (Dasselbe gilt von den beiden anderen Schnittpunkten der Sekanten.)

**Bemerkung.**

Der Inversionsradius ist zugleich die Länge der Tangente von  $M$  aus an jeden Kreis  $\mu$ , der die beiden gegebenen gleichartig berührt; ebenso an jeden Kreis  $\mu_1$ , der die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet.

84) **Aufgabe.** Zu zwei sich schneidenden Kreisen den Inversionskreis zu konstruieren, der den einen in den anderen verwandelt.

**Auflösung.** Man konstruiere denjenigen durch die beiden Schnittpunkte gehenden Kreis, der den dortigen äußeren Schnittwinkel halbiert. Oder:

Man schlage um den äußeren Ähnlichkeitspunkt beider den durch die Schnittpunkte gehenden Kreis.

**Bemerkung.** Hat man einen Kreis in einen anderen verwandelt, so entspricht das Innere des einen entweder dem Inneren oder dem Äußeren des anderen. Macht man ihn selbst zu einem neuen Inversionscentrum, so verwandelt sich sein Inneres in sein Äußeres, und die vorigen Beziehungen wechseln.

85) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen einen Inversionskreis zu finden, der beide in konzentrische Kreise verwandelt.

**Auflösung.** Man ziehe durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt eine Sekante, die in Punkten  $A_1$  und  $A_2$  schneidet, die nicht zu parallelen Radien gehören. Die Tangenten in diesen Punkten geben nach 55) den Radius eines rechtwinklig schneidenden Kreises. Dieser schneidet die Centrale in den Büschelpunkten  $X_1$  und  $X_2$  des orthogonalen Kreisbüschels. Macht man einen dieser Punkte zum Inversionscentrum, so entstehen aus den beiden gegebenen Kreisen konzentrische Kreise, denn das Kreisbüschel durch  $X_1$  und  $X_2$  geht in ein Strahlenbüschel über.

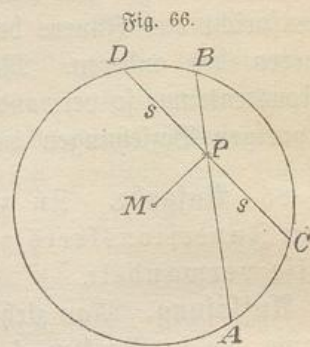
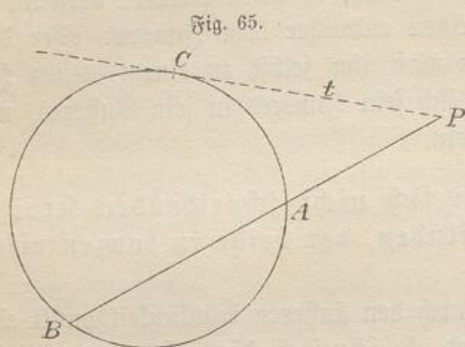
86) **Bemerkung.** Die besprochene Inversion beruhte auf der Beziehung  $AX_1 \cdot AX_2 = 1$ . Man kann auch  $AX_1 \cdot AX_2 = -1$  setzen, dann liegen  $X_1$  und  $X_2$  auf verschiedenen Seiten von  $A$ . Daraus ergeben sich entsprechende Kreisbeziehungen, wie vorher, jedoch tritt stets der innere Ähnlichkeitspunkt an Stelle des äußeren. Wesentlich neues ergibt sich dabei nicht. Es handelt sich nur um die frühere Inversion verbunden mit Umklappungen um zwei aufeinander senkrechte, durch das Inversionscentrum gehende Achsen, so daß man die Operation als die negative Inversion bezeichnen kann. (Jede Strecke der Inversionszeichnung wird in die entgegengesetzte verwandelt.)

## X. Potenz und Potenzlinien.

87) Liegt ein Punkt  $P$  außerhalb des Kreises, so ist für jede von ihm ausgehende Sekante  $PA \cdot PB = t^2$ , also eine konstante positive Größe, nämlich das Quadrat der von  $P$  aus gezogenen Tangente (Fig. 65).

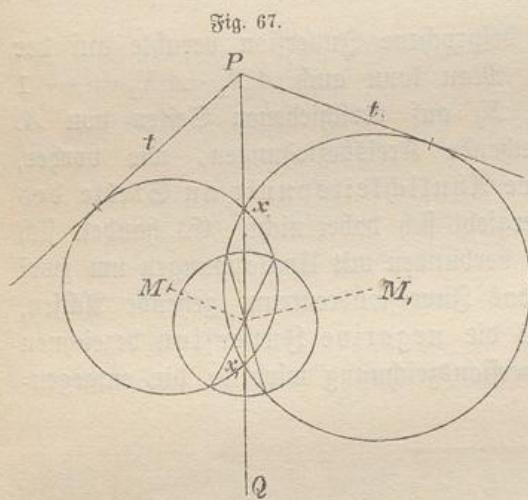
Liegt er dagegen innerhalb, so ist für jede durch ihn gehende Sehne  $PA \cdot PB = -s^2$ , wo  $s$  die Hälfte der kleinsten durch  $P$  gehenden Sehne ist (die durch  $P$  halbiert wird). Das negative Zeichen

ist deshalb genommen, weil  $PA$  und  $PB$  Strecken von entgegengesetzter Richtung sind, während beide im vorigen Falle gleichgerichtet



waren. Also auch jetzt ist  $PA \cdot PB$  konstant, aber gleich einer gewissen negativen Größe (Fig. 66).

In beiden Fällen bezeichnet man das genannte Produkt als die Potenz des Punktes  $P$  in Bezug auf den Kreis. Die Punkte mit positiver Potenz liegen also außerhalb, die mit negativer innerhalb des Kreises, die von der Potenz Null auf ihm. Die Punkte gleicher Potenz liegen auf einem konzentrischen Kreise.



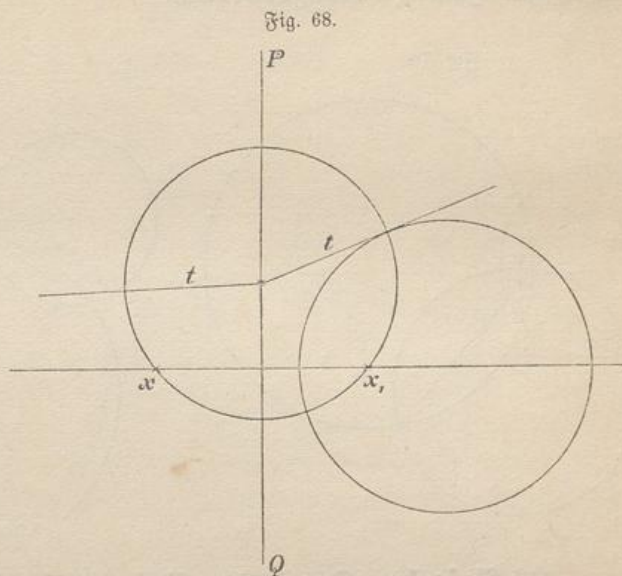
88) Ist  $PQ$  die gemeinschaftliche Sekante zweier Kreise, so gilt  $PX \cdot PX_1 = t^2$  für beide Kreise, d. h. die zugehörigen Tangenten sind gleich, und  $P$  hat in Bezug auf beide Kreise und das gesamte Kreisbüschel durch  $X$  und  $X_1$

dieselbe Potenz  $t^2$ . Dies gilt für jeden äußeren Punkt der Sekante.

Für jeden inneren Punkt der Sekante ist  $PX \cdot PX_1 = -s^2$ , d. h. die kürzeste Sehne durch einen inneren Punkt der Sekante hat in beiden Kreisen und in allen des Büschels dieselbe Länge. (Die Endpunkte der kürzesten Sehnen durch  $P_1$  liegen auf einem Kreise.)

Man nennt daher die gemeinschaftliche Sekante die Potenzlinie des Kreisbüschels durch  $X$  und  $X_1$ .

89) Schneiden sich zwei Kreise nicht, so haben sämtliche Kreise, die beide zugleich rechtwinklig schneiden, nach Nr. 79 auf der Centrale die für beide Kreise reciproken Büschelpunkte  $X$  und  $X_1$ . Da die Mittelpunkte des Büschels auf dem Mittellote von  $X$  und  $X_1$  liegen, so sind die Tangenten von jedem Punkte dieses Lotes aus nach beiden Kreisen gleich. Demnach ist dieses Lot  $PQ$  die Potenzlinie der beiden sich nicht schneidenden Kreise und für die ganze Kreis-schar, die das Büschel orthogonal schneidet.

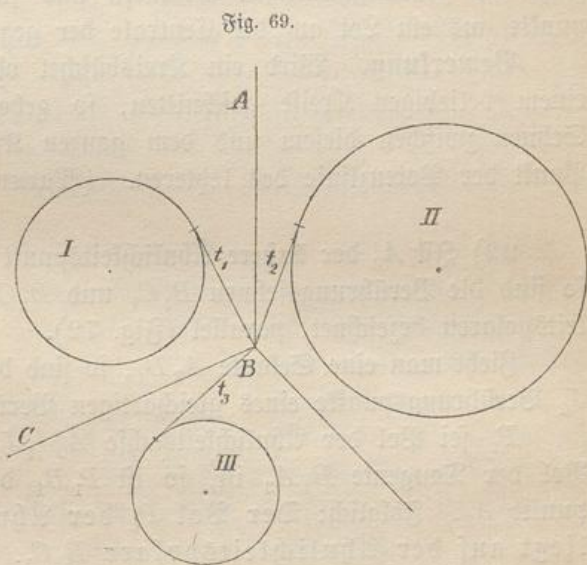


Die Potenzlinien zweier orthogonaler Kreis-scharen stehen also aufeinander senkrecht, und die der einen Schar ist die Centrale der anderen.

Berühren sich zwei Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte die Potenzlinie.

90) **Satz.** Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

**Beweis.** In Fig. 69 sei  $AB$  Potenzlinie für die Kreise  $I$  und  $II$ ,  $CB$  für die Kreise  $I$  und  $III$ , also  $t_1 = t_2$  und  $t_1 = t_3$ . Daraus folgt  $t_2 = t_3$ , folglich ist  $B$  auch ein Punkt der Potenzlinie von  $II$  und  $III$ . Ebenso ist der Beweis bei Kreisen, die so liegen, daß jener Schnitt-



punkt  $B$  ins Innere fällt (Fig. 70), nur sind dann statt der gleichen Tangenten gleiche kürzeste Sehnen zu nehmen. Der Schnittpunkt heißt in beiden Fällen Potenzcentrum.

Fig. 70.

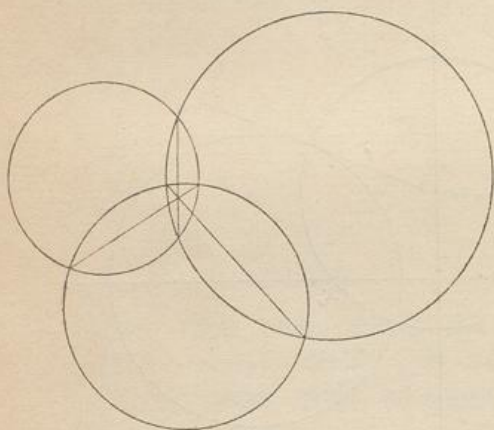
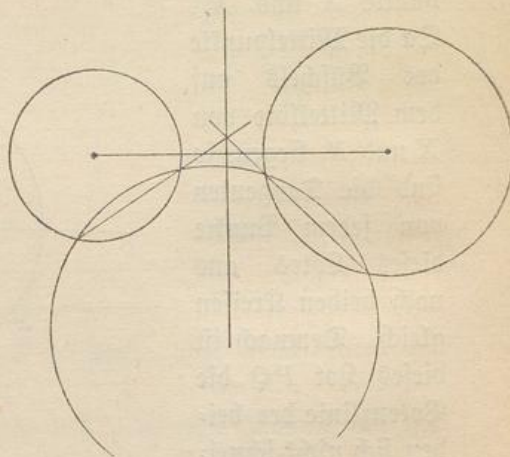


Fig. 71.



91) **Aufgabe.** Die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise zu konstruieren.

**Auflösung.** Man schlage einen Kreis, der beide Kreise schneidet, ziehe die gemeinschaftlichen Sekanten und falle von ihrem Schnittpunkte aus ein Lot auf die Centrale der gegebenen Kreise (Fig. 71).

**Bemerkung.** Wird ein Kreisbüschel oder eine Kreisschar von einem beliebigen Kreise geschnitten, so gehen die gemeinschaftlichen Sehnen zwischen diesem und dem ganzen Kreisysteme durch einen Punkt der Potenzlinie des letzteren. (Warum?)

92) Ist  $A_3$  der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $M_1$  und  $M_2$ , so sind die Berührungsehnen  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$ , die man als Ähnlichkeitspolaren bezeichnet, parallel (Fig. 72).

Zieht man eine Sekante  $A_3D_1$ , so sind die Schnittpunkte  $J_1$  und  $J_2$  Berührungspunkte eines gleichartigen Berührungskreises  $M_3$ .

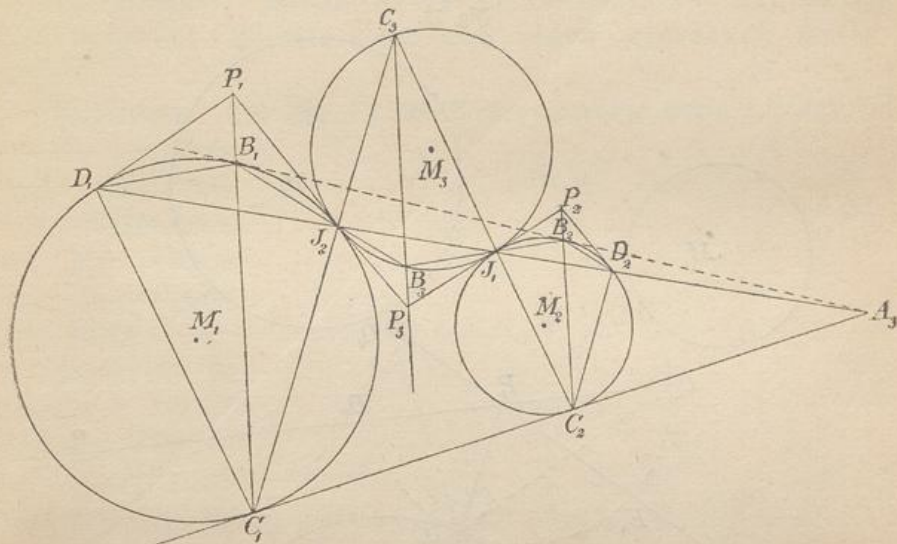
$P_1$  sei Pol der Ähnlichkeitsachse  $A_3J_1J_2$ . Weil ferner  $B_1$  der Pol der Tangente  $B_1A_3$  ist, so ist  $P_1B_1$  die Polare vom Schnittpunkte  $A_3$ . Folglich: Der Pol  $P_1$  der Ähnlichkeitsachse  $A_3J_1J_2$  liegt auf der Ähnlichkeitspolare  $B_1C_1$ .

Ebenso liegt der Pol  $P_2$  der Geraden  $A_3J_1J_2$  auf der Ähnlichkeitspolare  $B_2C_2$ . Daß endlich der Pol  $P_3$  auf der Potenzlinie liegt, die zu der Ähnlichkeitspolare parallel ist, wurde schon mehrfach bemerkt.

Die gesamte Zeichnung zu  $M_1$  ist perspektivisch zur Zeichnung

für  $M_2$  in Bezug auf  $A_3$ ; die gesamte Zeichnung zu  $M_3$  ist perspektivisch zu der für  $M_1$  in Bezug auf  $J_2$ ; die gesamte Zeichnung

Fig. 72.



zu  $M_3$  ist perspektivisch zu der für  $M_2$  in Bezug auf  $J_1$ . Also liegen  $P_1J_2P_3$ ,  $P_2J_1P_3$  und  $P_1P_2A_3$  auf geraden Linien, ebenso  $C_1J_2C_3$ ,  $B_1J_2B_3$ ;  $C_2J_1C_3$  und  $B_2J_1B_3$ . Folglich:

Verbindet man die Endpunkte einer Ähnlichkeitspolare zweier Kreise mit dem Berührungspunkte eines Berührungskreises, so erhält man auf diesem Kreise Punkte der Potenzlinie der beiden ersten Kreise.

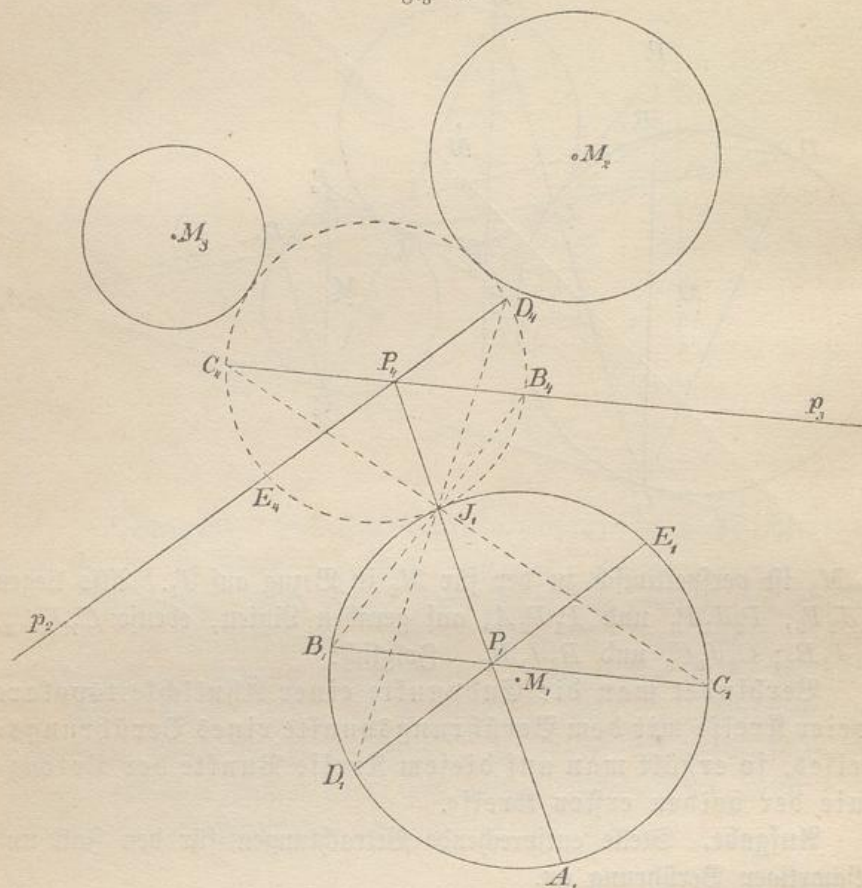
**Aufgabe.** Stelle entsprechende Betrachtungen für den Fall ungleichartiger Berührung an.

93) In Fig. 73 werden die Kreise  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  von einem vierten berührt. Ist nun  $B_1C_1$  äußere Ähnlichkeitspolare für  $M_1$  und  $M_2$ , so geben die Geraden  $B_1J_1B_4$  und  $C_1J_1C_4$  die Potenzlinie  $B_4C_4$  oder  $p_3$ . Ebenso giebt die Ähnlichkeitspolare  $D_1E_1$  zu  $M_1$  und  $M_3$  durch  $D_1J_1D_4$  und  $E_1J_1E_4$  die Potenzlinie  $D_4E_4$  oder  $p_2$ . Da nun die Geraden  $B_1C_1$  und  $D_1E_1$  perspektivisch zu  $B_4C_4$  und  $D_4E_4$  in Bezug auf den Punkt  $J_1$  sind, so sind auch ihre Schnitte  $P_1$  und  $P_4$  perspektivisch in Bezug auf  $J_1$ . Folglich:

Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt ihr Potenzzentrum  $P_4$  auf gerader Linie mit dem Berührungspunkte  $J$  jedes der drei Kreise und dem Schnitte  $P$  seiner beiden äußeren Ähnlichkeitspolaren.

**Aufgabe.** Stelle die betreffenden Betrachtungen für andere Fälle der Berührung auf, z. B. lauter innerliche Berührungen, oder für ungleichartige Berührungen.

Fig. 73.



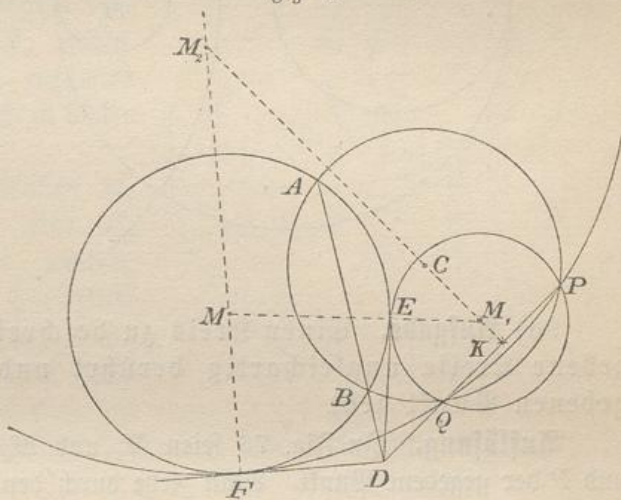
**Bemerkung.** Da  $D_1E_1$  und  $B_1C_1$  äußere Ähnlichkeitspolaren sind, so ist  $P_1$  Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse der Kreise  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ . Jede Ähnlichkeitsachse hat in den drei Kreisen drei Pole, so daß im ganzen für vier Ähnlichkeitsachsen zwölf Pole vorhanden sind. Da nun je drei Pole zu zwei Berührungen Veranlassung geben, giebt es acht verschiedene Arten der Berührung, d. h. acht Berührungskreise dreier Kreise. Bedeutet  $a$  äußerliche,  $i$  innerliche Berührung, so handelt es sich um folgende Fälle:  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ ;  $M_1M_2M_3$ .

## XI. Einige Berührungsaufgaben.

94) **Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

**Auflösung.** In Fig. 74 sei  $M$  der gegebene Kreis,  $P$  und  $Q$  seien die gegebenen Punkte. Mit Hilfe der Mittelsenkrechten von  $PQ$  schlage durch beide Punkte einen Kreis  $C$ , der den Kreis  $M$  in Punkten  $A$  und  $B$  schneidet;  $AB$  und  $PQ$  geben den Schnitt  $D$ . Aus der Tangente  $DE$  ergibt sich der Radius  $ME$ , der die Mittelsenkrechte  $KC$  in  $M_1$  schneidet. Ebenso ergibt sich aus der Tangente  $DF$  der Radius  $FM$ , der  $KC$  in  $M_2$  schneidet.  $M_1$  und  $M_2$  sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

Fig. 74.

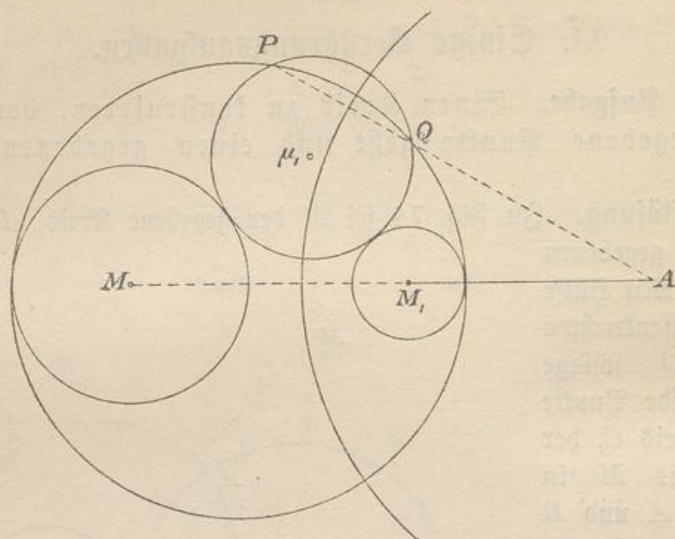


Der Beweis beruht darauf, daß die dritte Potenzlinie, d. h. die Tangente  $DE$  bzw.  $DF$  mit  $AB$  und  $PQ$  durch denselben Punkt gehen muß.

95) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

**Auflösung.** In Fig. 75 seien  $M$  und  $M_1$  die gegebenen Kreise und  $P$  der gegebene Punkt. Man zeichne den Kreis  $A$ , der den Kreis  $M$  durch reciproke Spiegelung in den Kreis  $M_1$  verwandelt. (Sein Radius ist mittlere Proportionale zwischen  $AB$  und  $AC$ , wo  $A$  äußerer Ähnlichkeitspunkt ist, während  $B$  und  $C$  die äußeren (oder die inneren) Schnittpunkte der Centrale sind.) Man spiegele gegen diesen Kreis den Punkt  $P$  reciprok, was  $Q$  giebt ( $AQ \cdot AP = r^2$ ). Jetzt sind die beiden Kreise zu beschreiben, die durch  $P$  und  $Q$  gehen und den Kreis  $M$  (oder  $M_1$ ) berühren. (Vgl. vorige Aufgabe.)

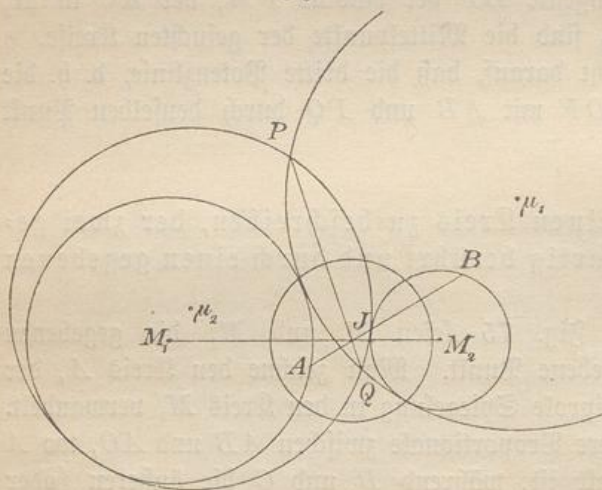
Fig. 75.



96) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

**Auflösung.** In Fig. 76 seien  $M_1$  und  $M_2$  die gegebenen Kreise und  $P$  der gegebene Punkt. Man ziehe durch den inneren Ähnlichkeits-

Fig. 76.



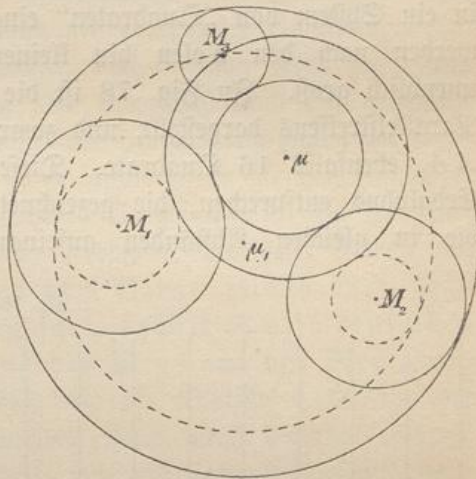
punkt  $J$  die beliebige Sekante  $AB$  und schlage um  $J$  einen Kreis mit der mittleren Proportionale von  $JA$  und  $JB$ . Dann bilde man  $JQ$  aus  $JP \cdot JQ = r^2$ . Durch  $P$  und  $Q$  ist ein Kreis zu legen, der einen der beiden gegebenen Kreise innerlich oder äußerlich berührt.

**Bemerkung.** Ist einer der beiden Kreise eine Gerade ( $r = \infty$ ), so treten die Schnittpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers als äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt auf. Sonst ist nichts geändert.

97) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise gleichartig berührt. (Problem des Apollonius.)

**Auflösung 1.** In Fig. 77 seien  $M_1, M_2, M_3$  die gegebenen Kreise, und zwar  $M_3$  der kleinste. Die Radien seien  $r_1, r_2$  und  $r_3$ . Man schlage um  $M_1$  und  $M_2$  Kreise mit den Radien  $(r_1 - r_3)$  und  $(r_2 - r_3)$  und konstruiere die beiden Kreise, die die Hilfskreise gleichartig berühren und durch den Punkt  $M_3$  gehen. Die in Wirklichkeit gesuchten Kreise sind konzentrisch zu diesen beiden.

Fig. 77.



**Bemerkung.** Sollen  $M_1$  und  $M_2$  gleichartig, aber  $M_3$  ungleichartig berührt werden, so schlage man die Hilfskreise mit den Radien  $(r_1 + r_3)$  und  $(r_2 + r_3)$ . Die übrigen Fälle erledigen sich mit Hilfe des inneren Ähnlichkeitspunktes. Die acht möglichen Fälle sind in Nr. 93 angegeben.

**Auflösung 2.** Suche das Potenzcentrum  $P_4$  der drei Kreise und zeichne in jeden die beiden äußeren Ähnlichkeitsachsen, deren Schnitte in jedem der Kreise  $P_1, P_2$  und  $P_3$  seien. Die Geraden  $P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4$  geben die Berührungspunkte  $J_1, J_2$  und  $J_3$  für den äußerlich berührenden Kreis, und zugleich die Berührungspunkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  für den innerlich berührenden Kreis. (Vergl. Fig. 73.)

**Bemerkung.** Mit Hilfe innerer Ähnlichkeitspolaren gelangt man zu den ungleichartigen Berührungen.

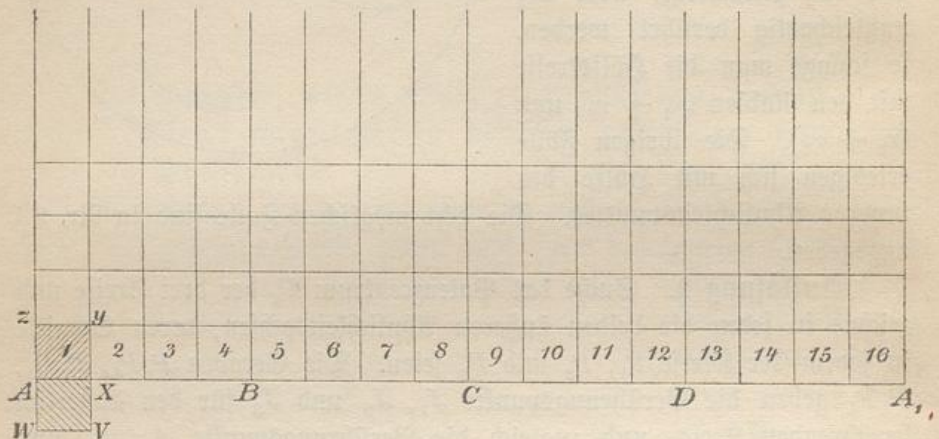
## XII. Kartographische Anwendungen.

98) Zunächst soll die Weltkarte nach Gerhard Kremer, genannt Mercator, kurz erläutert werden.

Da die Oberfläche der Kugel sich nicht in die Ebene ausbreiten läßt, wie z. B. die des Cylinders und des Kegels, so läßt sich zu dem Gradnetz ihrer Meridiane und Parallellkreise kein vollkommen treues ebenes Bild geben, sondern es treten bestimmte Verzerrungen

ein, je nachdem die Karte diese oder jene Bedingung erfüllen soll. Um einen Einblick in die Lehre von den Gradnetzen zu erhalten, teile man die Kugeloberfläche z. B. durch 16 unter gleichen Winkeln auf einander folgende Meridiane in kongruente Flächenteile ein. Bei den Parallelkreisen sehe man zunächst von der Aufeinanderfolge nach Grad ab, und denke sich die ersteren so gelegt, daß die Kugeloberfläche in ein System von „Quadraten“ eingeteilt wird. Diese Quadrate\*) werden nach den Polen hin kleiner und kleiner. Ihre Zahl ist unendlich groß. In Fig. 78 ist die Quadrateinteilung eines ebenen Parallelstreifens dargestellt, und zwar befinden sich über der Geraden  $AA_1$  ebenfalls 16 Quadrate. Diese Gerade soll dem Äquator des Erdglobus entsprechen, die gezeichneten Senkrechten den Meridianen, die in gleichen Abständen aufeinanderfolgenden Horizontalen den

Fig. 78.



obigen Parallelkreisen auf der Kugeloberfläche. (Im Beispiele  $n = 16$  folgen die Meridiane der Kugel unter  $\frac{360^\circ}{16}$  oder  $22\frac{1}{2}^\circ$  aufeinander.)

Fig. 78 entspricht der nördlichen Halbkugel der Erdoberfläche. Nach oben erstreckt sich die Zeichnung des Streifens bis in unendliche Entfernung, weil die Quadrate hier gleich groß sind, ihre Anzahl aber unendlich groß ist. Erweitert man die Zeichnung nach unten, so erhält man auch das Bild der südlichen Halbkugel.

Zeichnet man in die entsprechenden Quadrate die Länderformen ein, so erhält man die Weltkarte in Mercators Darstellung.

\*) Von Quadraten kann man eigentlich erst reden, wenn die Meridiane und Parallelkreise so zahlreich genommen werden, daß die sehr kleinen Flächenräume als eben und geradlinig betrachtet werden können. Methoden, diese Einteilung korrekt durchzuführen, werden später gegeben.

Diese hat den Vorzug, daß ihre „Quadrate“ denen der Kugel in um so höherem Grade ähnlich sind, je größer man die Anzahl der Meridiane genommen hat. Die Zeichnungen innerhalb kleiner Quadrate sind also ähnlich, oder, wie man sich ausdrückt, die Mercatorkarte stellt kleine Flächenteile der Erdoberfläche ähnlich dar, obwohl das Gesamtbild der Erdoberfläche nicht ähnlich ist. Abbildungen solcher Art bezeichnet man als konforme Abbildungen.

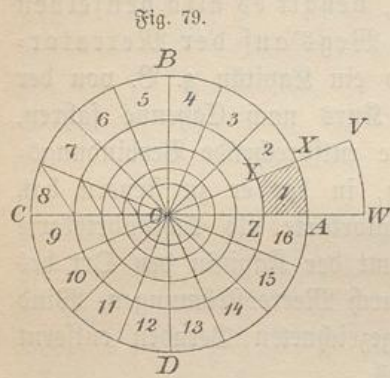
Der zweite Vorteil beruht darin, daß die von Nord nach Süd gehenden Linien sämtlich senkrecht, die von West nach Ost gehenden sämtlich horizontal sind, so daß man alle Himmelsrichtungen an jeder Stelle als gerade Linien eintragen kann, und daß den gleichen Himmelsrichtungen parallele Gerade entsprechen. So geben z. B. alle Quadratdiagonalen die Richtungen Nordost, Nordwest, Südwest, Südost an. Setzt also z. B. ein Schiff auf dem Ozean seinen Weg stets in derselben Himmelsrichtung fort, behält es also denselben Kurs bei, so ist die Abbildung des Wegs auf der Mercatorkarte eine gerade Linie. Will also ein Kapitän z. B. von der Südspitze Irlands stets mit demselben Kurs nach Cayenne fahren, und zieht er auf der Mercatorkarte die entsprechende Verbindungslinie, so erhält er die Himmelsrichtung, in der er zu steuern hat, auf das genaueste. Daher ist die Mercatorkarte als Schiffsfahrtskarte allgemein verbreitet. Jeden Tag bestimmt der Kapitän den Ort des Schiffes\*), erkennt dabei, wie weit er durch Meeresströmungen, Wind oder ungenaues Steuern sich von der gezeichneten Geraden entfernt hat und korrigiert den Kurs des Schiffes.

Einen Nachteil aber hat die Karte in folgender Hinsicht. Während die obigen „Quadrate“ auf dem Globus nach den Polen hin zu unendlicher Kleinheit abnehmen, bleiben sie auf der Mercatorkarte gleich groß; während dort die Meridiane den beiden Polen zustrebend sich immer mehr nähern, behalten sie hier stets denselben Abstand. Stimmen also die Quadratdimensionen am Äquator des Globus und der Mercatorkarte überein, so hört diese Übereinstimmung nach Norden in zunehmendem Grade auf, und in den unendlich fern liegenden Polen der Mercatorkarte ist die Darstellung derart vergrößert zu denken, daß uns die Ausdrucksweise gestattet ist, dort sei der Maßstab der unendlichfachen, wie auf dem Globus. Also, je weiter nach den Polen hin, um so größer wird der Maßstab der Mercator-

\*) Aus der Höhe des Polarsterns oder der Mittagshöhe der Sonne findet er z. B. die nördliche Breite, aus der Differenz zwischen der Mittagszeit des Ortes und der des Ausgangsortes, die an dem dort gestellten Chronometer abzulesen ist und 4 Minuten auf den Grad beträgt, bestimmt er die Länge.

karte. So erscheint z. B. Grönland größer als ganz Afrika, obwohl es in Wahrheit weit kleiner ist. Die Nachbarschaft der beiden Pole kann auf der Mercatorkarte gar nicht dargestellt werden, da sonst die Karte nach oben und unten ins Unendliche gehen müßte. Man bricht die Darstellung gewöhnlich in der Nähe des 80. Grades nördlicher und südlicher Breite ab. Da die Polargegenden nicht bekannt sind, und da von regelmäßiger Schifffahrt dort nicht die Rede sein kann, hat dieser Umstand die Brauchbarkeit der Karte nicht beeinträchtigt. [Die Karten der physikalischen Geographie, z. B. die der magnetischen Meridiane, Isothermen, Isohydren, Isothermen, Isoanomalien, Isothermen u. s. w. sind in der Regel nach Mercators Projektion dargestellt.]

99) In Fig. 79 ist ein Kreis, dessen Umfang  $ABCD$  gleich der Länge des Äquators der Mercatorkarte sein soll, durch ein Strahlen-



büschel und die konzentrische Kreisschar in ähnliche „Rechtecke“ eingeteilt. Dies ist erreicht, sobald jeder Radius die mittlere Proportionale zu den beiden benachbarten Radien ist, und wenn die Strahlen unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Das erstere erzielt man durch parallele Diagonalen, wie sie bei  $CO$  dargestellt sind.

Sind nun die kleinen Rechtecke „Quadrate“, so ist das Quadratnetz\*) ganz dem der Mercatorkarte und des Globus entsprechend. So sind z. B. die Quadrate von 1 bis 16 die Bilder der gleichzahligen Quadrate der Mercatorkarte. So erhält man die Polarkarte von Hipparch-Ptolemäus, die sich in der Stereometrie als eine bestimmte Centralprojektion der Kugelfläche herausstellen wird. Sie

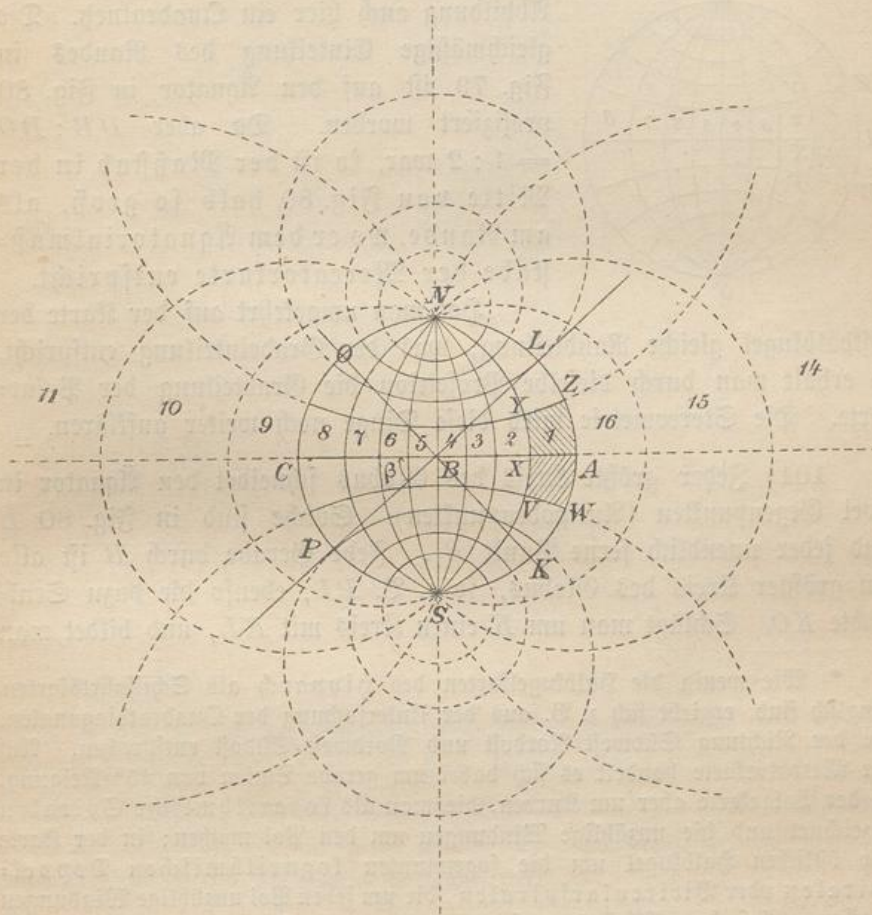
\*) In Nr. 81 ist bereits gesagt, daß man die quadratische Teilung bei  $n$  Sektoren erreicht, wenn die Radien nach außen im Verhältnis  $1 : e^{\frac{2\pi}{n}}$  aufeinander folgen, wo  $e = 2,7182818 \dots$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Hier also handelt es sich um das Verhältnis  $1 : e^{\frac{2\pi}{16}} = 1 : 1,480972$ . Nach innen folgen die Radien einander nach der Reihe  $e^0, e^{-\frac{2\pi}{16}}, e^{-\frac{4\pi}{16}}, e^{-\frac{6\pi}{16}}$  u. s. w. Durch diese Zahlen erkennt man zugleich die Vergrößerungsverhältnisse zwischen jeder Stelle des Innern und der Mercatorkarte, deren Maßstab gleich dem des Randkreises genommen war.

giebt eine konforme Darstellung der halben Mercatorkarte und zugleich der Nord- oder Südhalbkugel des Globus.

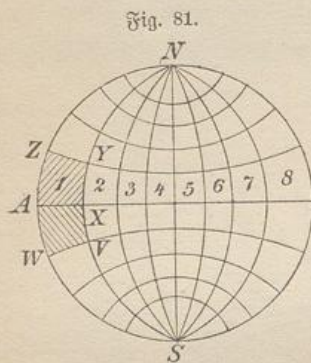
Der Symmetrie der Mercatorkarte gegen den Äquator entspricht bei der Polarkarte des Hipparch die Reciprocität gegen den Grenzkreis. Man kann also die Polarkarte über den Äquator hinaus fortsetzen. So ist z. B.  $AWVX$  das zu  $AZYX$  reciproke „Quadrat“. (Vgl. Fig. 79.) Dabei nehmen aber die Dimensionen der Quadrate bald derart zu (sogar im Verhältnis zu denen der Mercatorkarte), daß man sich gewöhnlich auf die Darstellung der einen Halbkugel beschränkt und für die andere eine besondere Zeichnung macht. Für die mathematische Betrachtung ist es gut, das Quadratnetz nach außen fortzusetzen.

Fig. 80.



100) Man schlage jetzt in Fig. 79 um  $D$  einen Kreis, der durch  $A$  (und  $C$ ) geht und bilde das reciproke Spiegelbild der Zeichnung

gegen diesen Kreis. Da letzterer den Grenzkreis und die Horizontale unter  $45^\circ$  schneidet, geht der Grenzkreis (Äquator) in die Horizontale und diese in den Grenzkreis über.  $B$  und der Nordpol vertauschen ihre Stellen,  $A$  und  $C$  bleiben, der unendlich ferne Bereich rückt nach  $D$ , welches des Südpols wegen jetzt  $S$  heiße, und das Strahlenbüschel geht in das Kreisbüschel durch  $N$  und  $S$ , die konzentrische Kreisschar in die Orthogonalschar des Büschels über. Man erhält so in Fig. 80 die obere Hälfte der Karte der östlichen Halbkugel und ihre reciproke Fortsetzung nach außen, nur muß die Karte noch um die senkrechte Mittellinie geflappt werden, um der des Mercator bezüglich der Himmelsrichtung genau zu entsprechen, wodurch Fig. 81 entsteht. \*)



Dem Quadratnetz der Polarkarte entspricht wegen des konformen Charakters der Abbildung auch hier ein Quadratnetz. Die gleichmäßige Einteilung des Randes in Fig. 79 ist auf den Äquator in Fig. 80 projiziert worden. Da aber  $DB:DO = 1:2$  war, so ist der Maßstab in der Mitte von Fig. 80 halb so groß, als am Rande, wo er dem Äquatorialmaßstabe der Mercatorkarte entspricht.

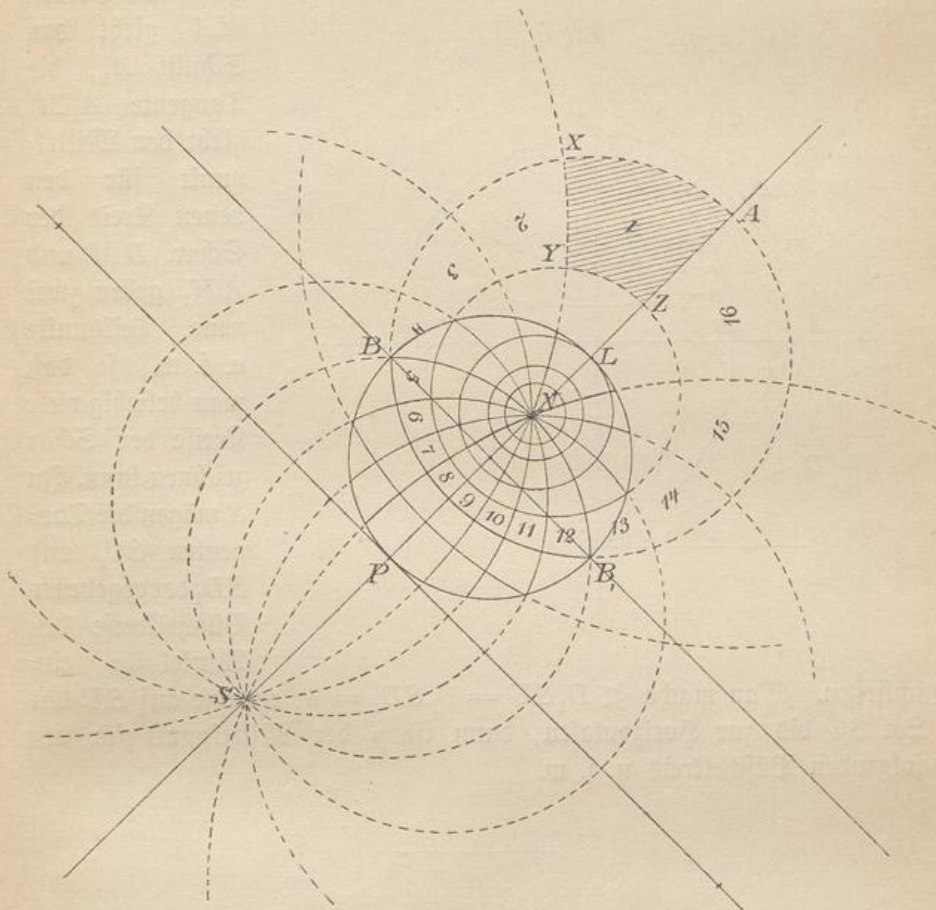
Hat man umgekehrt auf der Karte der Osthalbkugel gleiche Randteilung, was der Gradeinteilung entspricht, so erhält man durch dieselbe Projektion die Gradeinteilung der Polarkarte. Die Stereometrie wird diese Dinge noch weiter aufklären.

101) Jeder größte Kreis des Globus schneidet den Äquator in zwei Gegenpunkten (Antipodenpunkten). Solche sind in Fig. 80  $B$  und jeder unendlich ferne Punkt  $B_1$ . Jede Gerade durch  $B$  ist also ein größter Kreis des Globus, so z. B.  $PL$ , ebenso die dazu Senkrechte  $KO$ . Schlägt man um  $K$  einen Kreis mit  $KL$ , und bildet man

\*) Wie wenig die Halbkugelfarten des Hipparch als Schiffahrtskarten tauglich sind, ergibt sich z. B. aus der Untersuchung der Quadratdiagonalen, die der Richtung Südwest-Nordost und Nordwest-Südost entsprechen. Auf der Mercatorkarte handelt es sich dabei um gerade Linien von  $45^\circ$  Neigung, in der Polarkarte aber um Kurven, die man als logarithmische Spiralen bezeichnet und die unzählige Windungen um den Pol machen; in der Karte der östlichen Halbkugel um die sogenannten logarithmischen Doppelspiralen oder Bicircularspiralen, die um jeden Pol unzählige Windungen machen. Auf dem Globus entsprechen ihnen die sogenannten Logodromen (Schieflauslinien). Sämtliche werden für den Schnittwinkel  $45^\circ$  als Diagonalkurven des Quadratnetzes bequem skizziert. Hierzu vergleiche man des Verfassers „Einführung in die isogonale Verwandtschaften“, Leipzig bei Teubner.

durch reciproke Spiegelung gegen diesen das Inversionsbild zu Fig. 80, so verwandelt sich die Gerade  $PBL\infty$  in den Grenzkreis durch  $K$  und  $O$ , dieser in jene Gerade, der Pol  $N$  fällt innerhalb des neuen Grenzkreises, und zwar auf den Schnitt von  $PL$  und  $KN$ , ebenso der Punkt  $S$  auf den Schnitt von  $KS$  und  $PL$  in Fig. 80. Ebenso

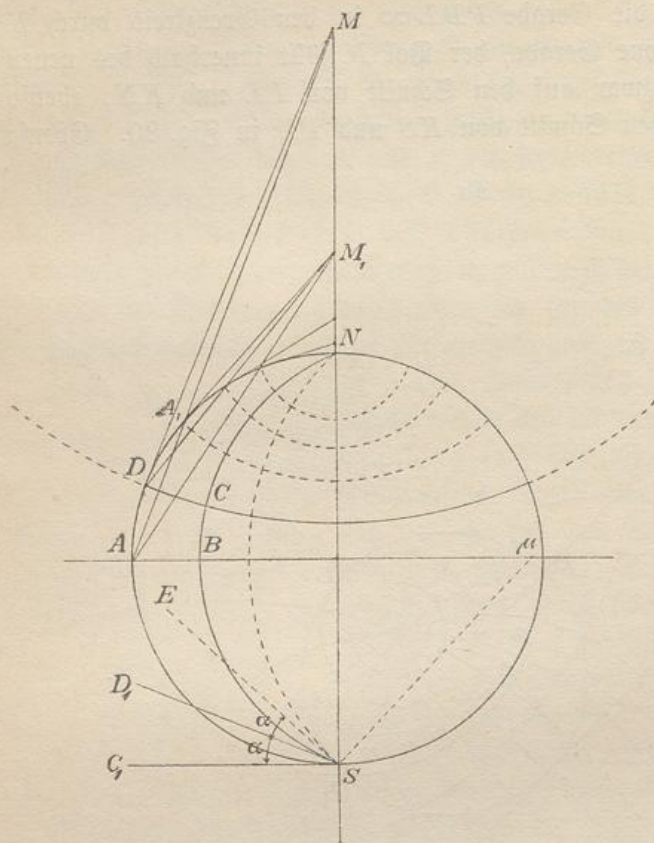
Fig. 82.



fallen  $A$  und  $C$  auf die Schnitte von  $PL$  und  $KA$  bzw.  $KC$ . Das Kreisbüschel durch  $N$  und  $S$  geht über in das Büschel durch die neuen Punkte  $N$  und  $S$ , Fig. 82 stellt die neue Karte dar. Sie entspricht z. B. den Karten der größten Land- und Wassermasse, wenn der Schnittwinkel  $\beta$  bei  $B$  richtig gewählt war.

102) **Aufgabe.** Das Rechtecknetz selbständig zu vollenden, wenn die vier Grenzkreise eines „Rechtecks“ gegeben sind.

Fig. 83.

**Auflösung.**

$ABCD$  in Fig. 83 sei das gegebene „Rechteck“. Die Tangente in  $D$  giebt  $M$  auf  $SN$ . Die Gerade  $MA$  giebt den Schnitt  $A_1$ , die Tangente  $A_1M_1$  giebt den Mittelpunkt für den neuen Kreis der Schar.  $DM_1$  und  $AM_1$  geben zwei neue Teilpunkte u. s. w., so daß man beliebig viele Kreise der Schar zeichnen kann. In  $S$  mögen die Tangenten  $SC_1$  und  $SD_1$  der gegebenen Büschelkreise den Winkel  $\alpha$  ein-

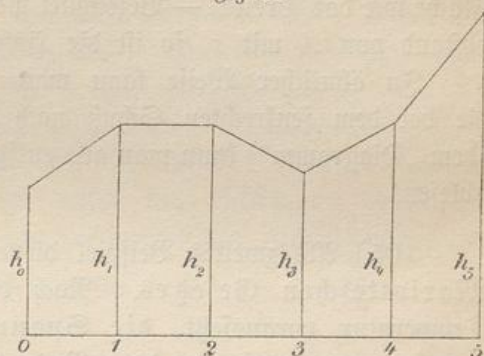
schließen. Man mache  $\sphericalangle D_1SE = C_1SD_1 = \alpha$ , errichte auf  $SE$  das Lot  $S\mu$  bis zur Horizontalen, dann ist  $\mu$  der Mittelpunkt für den folgenden Büschelkreis u. s. w.

**XIII. Der Koordinatenbegriff.****a) Graphische Darstellungen.**

103) Statistische Verhältnisse pflegt man auf graphischem (zeichnendem) Wege zu veranschaulichen. So könnten z. B. durch Fig. 84 die Schwankungen in der Frequenz einer Schule für einen Zeitraum von 5 Jahren dargestellt werden. Die gleichen Abschnitte auf der Horizontalen bedeuten die gleichen Zeiträume (Jahre), die regelmäßige Bewegung von 0 bis 5 den Verlauf der Zeit. Die Höhen verhalten

sich wie die entsprechenden Frequenzzahlen. Zunahme im ersten, Gleichbleiben im zweiten, Abnahme im dritten, Zunahme im vierten, verstärkte Zunahme im fünften Jahre sind ohne weiteres zu erkennen.

Fig. 84.

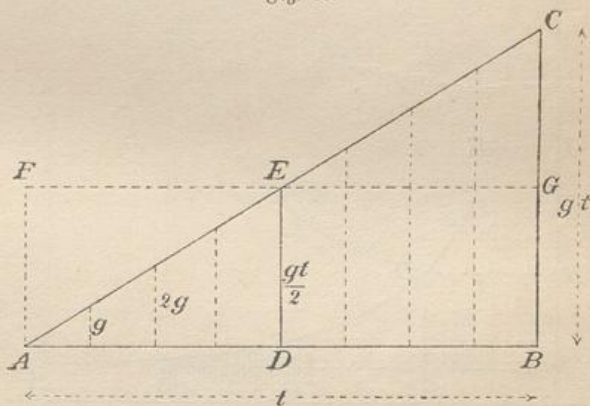


Ebenso veranschaulicht man die Schwankungen in der Bevölkerung von Städten und Staaten, in der Transportmenge von Eisenbahnen und Hafenanlagen, die Schwankungen in der Produktion der Landwirtschaft, der Bergwerke, der Industrie, die Preisschwankungen des Getreides, des Eisens u. s. w., die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks (Barometerstandes), des Wasserstandes der Flüsse, u. s. w. Bei einer größeren Anzahl gleicher Zeiträume kann man die mittlere Höhe als die Veranschaulichung des mittleren Zustandes betrachten.

101) Aus einigen Beispielen wird man den Nutzen solcher Darstellungen für die mathematische Physik erkennen.

Fig. 85 veranschaulicht die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume freifallenden (oder eines von konstanter Triebkraft bewegten) Körpers. Ist  $g$  die Geschwindigkeitszunahme für jede Sekunde, so hat der Körper nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit  $8g$ , nach  $t$  Sekunden die Geschwindigkeit  $gt$ . Die Endpunkte der Geschwindigkeitslote liegen in einer Geraden. Das mittlere Lot giebt die mittlere Geschwindigkeit  $\frac{gt}{2}$  an. Diese,

Fig. 85.



auf die Zeit  $t$  ausgedehnt, giebt den Weg  $\frac{1}{2}gt^2$ , und zwar auch für die beschleunigte Bewegung, der Inhalt des Dreiecks von Basis  $t$  und Höhe  $gt$  ist ebenfalls  $\frac{1}{2}gt^2$ . Die Dreiecksfläche stellt also

den vom Körper zurückgelegten Weg dar. Die einzelnen Trapezflächen geben den Weg in den einzelnen Sekunden an. Das Rechteck der mittleren Geschwindigkeit  $ABGF$  hat natürlich dieselbe Fläche wie das Dreieck. — Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von  $A$  mit  $x$ , so ist die Höhe an jeder Stelle  $y = gx$ .

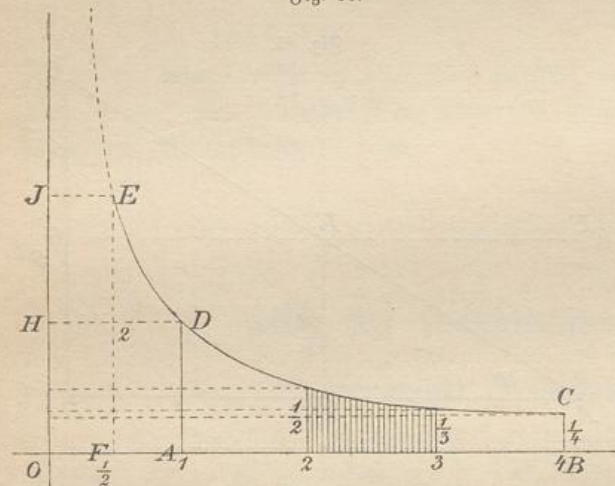
In ähnlicher Weise kann man die Bewegung veranschaulichen, die bei dem senkrechten Schuß nach oben entsteht. Aus der Figur (dem „Diagramm“) kann man alle entsprechenden Bewegungsverhältnisse ablesen.

105) Als zweites Beispiel diene die graphische Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Nach diesem ist, wenn man konstante Temperatur voraussetzt, die Spannung einer Gasmenge umgekehrt proportional dem Volumen.

In Fig. 86 ist nun Folgendes dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 der Grundlinie stellen die Volumina 0, 1, 2, 3, 4 dar. An der Stelle 1 ist die Spannung  $AD = 1$  angenommen, z. B. gleich 1 Atmosphäre (10 334 kg pro qm der Druckfläche). Dann ist an Stelle 2, 3, 4, ... die Spannung  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  als Lot aufzusetzen. Dagegen würde an Stelle  $\frac{1}{2}$  das Lot  $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$  zu zeichnen sein.

Das Diagramm kann nach links bis zur Stelle  $x = 0$ , nach rechts

Fig. 86.



sind inhaltsgleich, z. B.  $OFEJ$  und  $OADH$ .

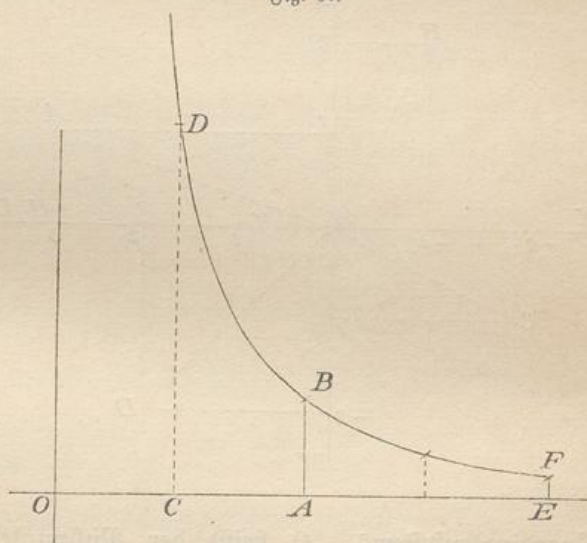
Da in der Mechanik das Produkt aus der Kraft und dem Kraftwege Arbeit bedeutet, so stellen die kleinen als Rechtecke aufzufassenden

bis zum unendlichen Bereiche ( $x = \infty$ ) ausgedehnt werden. Die Endpunkte der Lote bilden eine später zu besprechende Kurve, die man als die Mariottesche Kurve bezeichnen kann. (Sie wird wegen Annahme konstanter Temperatur auch als Isotherme bezeichnet.) Gewisse in der Figur angedeutete Rechtecke

senkrechten Flächenstreifen, wie sie von 2 bis 3 angedeutet sind, Arbeiten dar, die z. B. in Meterkilogrammen zu messen sind. Die Fläche  $ABCD$  stellt also die Expansionsarbeit dar, welche die Luft bei der Ausdehnung auf das vierfache Volumen leistet, wenn die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Dagegen stellt die Fläche  $ADEF$  die Arbeit dar, die nötig ist, um unter Konstanthaltung der Temperatur dieselbe Luft auf das halbe Volumen zusammenzupressen. Es handelt sich also in Fig. 86 zugleich um das Arbeitsdiagramm für Expansion und Kompression unter der Bedingung konstanter Temperatur. Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von  $O$  mit  $x$ , so ist die zugehörige Höhe stets  $y = \frac{1}{x}$ .

[106] Als drittes Beispiel diene die graphische Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Nach diesem ist die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskörper umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Befindet sich z. B. die Sonne in  $O$ , die Erde in  $A$  (Fig. 87), und stellt  $AB$  die Größe der gegenseitigen An-

Fig. 87.



ziehung für die Entfernung  $OA$  dar, so ist diese für die halbe Entfernung  $OC$  viermal so groß, für die doppelte Entfernung  $OE$  der vierte Teil. Setzt man also  $OA = 1$ , und einen beliebigen Horizontalabstand  $= x$ , so ist die zugehörige Anziehung durch das Lot  $y = \frac{AB}{x^2}$

zu veranschaulichen. Auch hier stellt die Fläche zwischen der

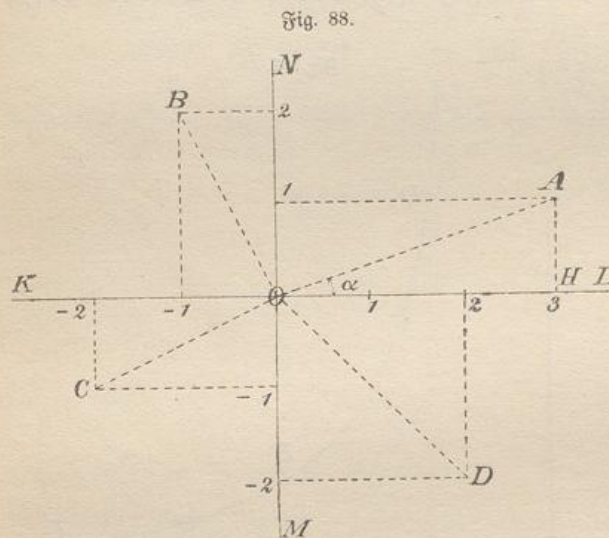
Kurve und der Horizontalen eine Arbeit dar. Um z. B. den Erdball aus der Entfernung  $OA$  in die Entfernung  $OE$  zu versetzen, müsste man eine Arbeit leisten, die durch die Fläche  $AEFB$  dargestellt wird. [Die Arbeit, die nötig sein würde, die Erde aus der Entfernung  $OA$  in unendliche Entfernung zu bringen, wird durch das von  $A$  aus

bis ins Unendliche fortgesetzte Diagramm dargestellt und als das Potential für den Punkt  $A$  bezeichnet.]

107) Man erkennt, daß sich durch solche Diagramme schwierige Dinge auf einfache Art veranschaulichen lassen. Man bezeichnet den Horizontalabstand vom Anfangspunkte als Abscisse, den Vertikalabstand als Ordinate. Beide tragen noch den gemeinschaftlichen Namen Koordinaten. Um jedoch den mathematischen Verhältnissen noch allgemeiner zu entsprechen, läßt man auch negative Abscissen und Ordinaten zu, und zwar sind die ersteren nach links, die letzteren nach unten gerichtet.

### b) Die Koordinaten von Punkten.

108) In Fig. 88 hat der Punkt  $A$  die Koordinaten  $x = 3$  und  $y = 1$ ; Punkt  $B$  hat  $x = -1$ ,  $y = 2$ ; für den Punkt  $C$  ist  $x = -2$ ,  $y = -1$ ; für den Punkt  $D$  ist  $x = 2$ ,  $y = -2$ .



Diese Punkte liegen der Reihe nach im 1., 2., 3. und 4. Quadranten der Ebene. Den letzteren entsprechen, wie in der Trigonometrie, der Reihe nach die Vorzeichen  $++$ ,  $-+$ ,  $--$ ,  $+ -$ . Die von  $-\infty$  nach  $+\infty$  gehende Gerade  $KL$  heißt die  $X$ -Achse, die ebenfalls von  $-\infty$  nach  $+\infty$  gehende Gerade  $MN$  die  $Y$ -Achse des

Koordinatensystems.  $O$  heißt der Nullpunkt des letzteren. Jedem reellen Koordinatenpaare  $x$ ,  $y$  entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Quadrant sich aus den Vorzeichen ergibt. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Ebene ein reelles Koordinatenpaar.

109) Die Koordinaten  $x$  und  $y$  bezeichnet man als die Cartesischen Koordinaten, nach Descartes oder Cartesius, der sie zuerst

aufgestellt hat. Da man die Lage von  $A$  auch durch den Radius  $OA = r$  und den Winkel  $HOA = \alpha$  darstellen kann, ebenso die Lage von  $B$  durch den Radius  $OB = r$  und den Winkel  $HOB = \alpha$ , die des Punktes  $C$  durch den Radius  $OC = r$  und den überstumpfen Winkel  $HOC = \alpha$ , und endlich die Lage von  $D$  durch den Radius  $OD = r$  und den überstumpfen Winkel  $HOD$ , so hat man auch  $r$  und  $\alpha$  als Koordinaten eingeführt, die sogenannten Polarkoordinaten. An jedem der genannten Punkte erkennt man, daß zwischen den Cartesischen und den Polarkoordinaten folgende Beziehungen stattfinden:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \sin \alpha.$$

Das Vorzeichen von  $r$  wird stets positiv angenommen, der Wechsel der Vorzeichen wird den goniometrischen Funktionen überlassen, und zwar in derselben Weise, wie in der Trigonometrie.

110) **Aufgabe.** Zwei Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  haben die Koordinaten  $x_1 = a_1, y_1 = b_1, x_2 = a_2, y_2 = b_2$ . Wie lauten die Koordinaten des Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie?

**Auflösung.**  $x = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad y = \frac{b_1 + b_2}{2}$ . Warum?

**Aufgabe.** Die Verbindungslinie derselben Punkte soll von  $Z_1$  aus im Verhältnis 3:2 geteilt werden; wie lauten die Koordinaten des Teilpunktes?

**Auflösung.**  $x = a_1 + \frac{3}{5}(a_2 - a_1) = \frac{2a_1 + 3a_2}{5};$

$$y = b_1 + \frac{3}{5}(b_2 - b_1) = \frac{2b_1 + 3b_2}{5}.$$

Allgemeiner giebt die Teilung im Verhältnis  $n_1:n_2$  die Koordinaten

$$x = \frac{n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 + n_2}, \quad y = \frac{n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 + n_2}.$$

Die entsprechende äußere Teilung giebt  $x_1 = \frac{-n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 - n_2},$   
 $y_1 = \frac{-n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 - n_2}$ . (Vergl. harmonische Punkte.)

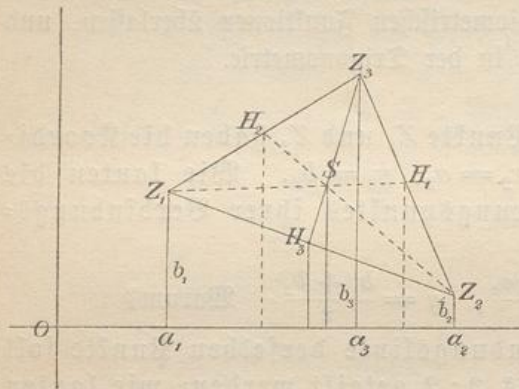
111) **Aufgabe.** Drei Punkte  $Z_1, Z_2, Z_3$  haben die Koordinaten  $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$ . Welches sind die Koordinaten des Halbierungspunktes  $H_1$  der Geraden  $Z_2 Z_3$ ; und wie heißen

die Koordinaten des Punktes  $S$ , der die Gerade  $Z_1H_1$  im Verhältnis  $2:1$  teilt?

**Auflösung.** Die Koordinaten von  $H_1$  in Fig. 89 sind  $x = \frac{a_2 + a_3}{2}$   
 und  $y = \frac{b_2 + b_3}{2}$ . Die Koordinaten von  $S$  sind  $x = \frac{1a_1 + 2\frac{a_2 + a_3}{2}}{2 + 1}$   
 $= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ ,  $y = \frac{1b_1 + 2\frac{b_2 + b_3}{2}}{2 + 1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$ .

**Bemerkung.** Dasselbe Resultat findet man, wenn man  $Z_2H_2$  und ebenso  $Z_3H_3$  im Verhältnis  $2:1$  teilt. Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem Punkte, dem Punkte mittleren Abstandes von den (beliebig gewählten) Koordinatenachsen.

Fig. 89.



Nimmt man einen vierten Punkt  $Z_4$  dazu, und teilt man  $SZ_4$  im Verhältnis  $3:1$ , so hat der Teilpunkt die Koordinaten

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$y = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}.$$

Der neue Teilpunkt ist also ebenfalls der Punkt mittleren Abstandes. In ähnlicher Weise kann man fortfahren. Die Reihenfolge der Konstruktion ist dabei vollständig gleichgültig. Man erhält so den Schwerpunkt von 3, 4, 5 ... gleich schwer zu denkenden Punkten der Ebene, der also der Punkt mittleren Abstandes von beiden Achsen ist.

112) **Aufgabe.** Zwei Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  haben die Koordinaten  $x_1 = a_1, y_1 = b_1, x_2 = a_2, y_2 = b_2$ . Wie lang ist ihre Verbindungslinie, und welche Neigung besitzt sie?

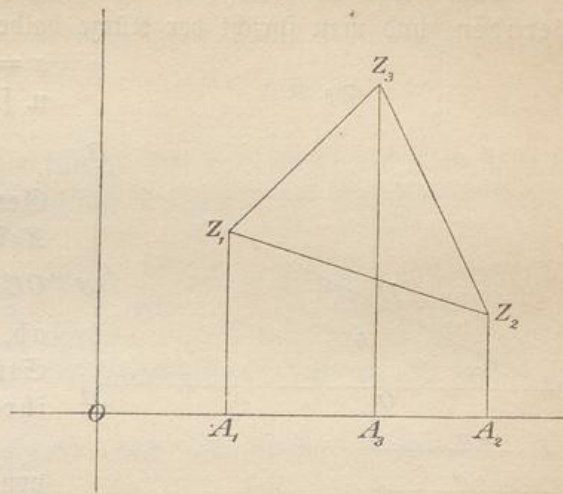
**Auflösung.**  $Z_1Z_2 = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ . Die Neigung bestimmt sich aus  $\tan \alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ .

113) **Aufgabe.** Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks  $Z_1Z_2Z_3$ , wenn die Eckpunkte die Abscissen  $a_1, a_2, a_3$  und die Ordinate  $b_1, b_2, b_3$  haben? (Fig. 90.)

**Auflösung.**

$$\begin{aligned}
 F &= A_1 A_3 Z_3 Z_1 \\
 &+ A_3 A_2 Z_2 Z_3 \\
 &- A_1 A_2 Z_2 Z_1 \\
 &= \frac{1}{2} (a_3 - a_1) (b_1 + b_3) \\
 &+ \frac{1}{2} (a_2 - a_3) (b_2 + b_3) \\
 &- \frac{1}{2} (a_2 - a_1) (b_2 + b_1) \\
 &= \frac{1}{2} [(a_1 - a_2) (b_1 + b_2) \\
 &+ (a_2 - a_3) (b_2 + b_3) \\
 &+ (a_3 - a_1) (b_3 + b_1)].
 \end{aligned}$$

Fig. 90.

**Bemerkung.** Für

den Fall, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist die Fläche gleich Null. Die Bedingung dafür, daß die Punkte  $Z_1 Z_2 Z_3$  in einer Geraden liegen, ist also durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

**c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie.**

114) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung  $x = a$  gilt, ist eine Parallele zur  $Y$ -Achse in der Entfernung  $x = +a$ . Symmetrisch dazu liegt die Gerade, für deren sämtliche Punkte die Gleichung  $x = -a$  gilt. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche  $y = b$  ist, ist eine Parallele zur  $X$ -Achse in der Entfernung  $y = +b$ . Symmetrisch dagegen liegt die Gerade, für deren Punkte die Gleichung  $y = -b$  gilt.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung  $y = x$  gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung  $45^\circ$ , die also den 3. und 1. Quadranten durchschneidet. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung  $y = -x$  gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung  $135^\circ$  oder  $-45^\circ$ , die also durch den 2. und 4. Quadranten geht.

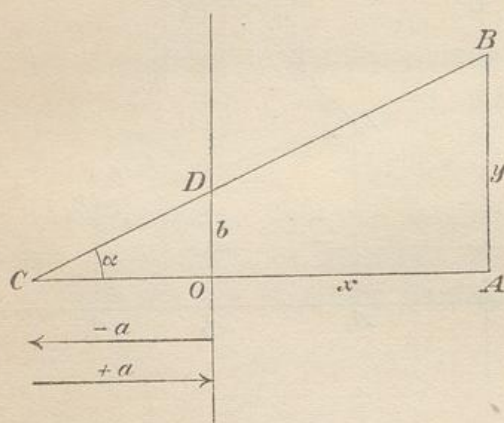
Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung  $\frac{y}{x} = \tan \alpha$  oder  $y = x \tan \alpha$  gilt, ist die Gerade durch den Nullpunkt von der Neigung  $\alpha$ .

Man nennt die betreffende Gleichung stets die Gleichung der Geraden, und man spricht der Kürze halber z. B. von der Geraden

$$x = a, y = b, y = x \tan \alpha$$

u. f. w.

Fig. 91.



115) **Aufgabe.** Eine Gerade schneide auf der X-Achse das Stück

$OC = -a$  (oder  $CO = +a$ )  $ab$ , auf der Y-Achse das Stück  $OD = b$ . Wie lautet ihre Gleichung? (Fig. 91.)

**Auflösung.** Man falle von einem beliebigen Punkte  $B$  der Geraden  $CD$  das Lot  $BA$  auf die X-Achse und setze

$OA = x$  und  $AB = y$ ; dann ist  $\triangle CAB \sim \triangle COD$ , also  $AB : OD = CA : CO$ , d. h.  $y : b = (a + x) : a$ . Daraus folgt

$$y = \frac{b}{a}x + b \quad \text{oder} \quad \frac{x}{(-a)} + \frac{y}{b} = 1$$

als die Gleichung der Geraden, die beiderseitig ins Endlose verlängert zu denken ist.

**Bemerkung.** Die Gerade, die von der X-Achse  $OC_1 = +a$ , von der Y-Achse  $OD = b$  abschneidet, liegt symmetrisch gegen die vorige in Bezug auf die Y-Achse. Ihre Gleichung ergibt sich als  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Möge nun  $a$  und ebenso  $b$  positiv oder negativ sein, eine Gleichung der letzten Form stellt stets eine Gerade dar, die von den Koordinatenachsen die Stücke  $OC = a$  und  $OD = b$  abschneidet.

116) **Aufgabe.** Was stellt die allgemeine Gleichung ersten Grades  $ax + by = c$  dar, wo  $a$ ,  $b$  und  $c$  reelle Größen sind?

**Auflösung.** Die Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)} = 1,$$

sie stellt also stets eine Gerade dar, die von der X-Achse das Stück  $\frac{c}{a}$ , von der Y-Achse das Stück  $\frac{c}{b}$  abschneidet. Die einzige Bedingung

ist, daß  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, denn sonst würden beide Abschnitte unendlich groß sein und die Gerade ganz in den unendlichen Bereich fallen.

117) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die von der  $Y$ -Achse das Stück  $b$  abschneidet und die Neigung  $\alpha$  hat?

**Auflösung.** In Fig. 91 ist  $\frac{AB}{CA} = \tan \alpha$ , also  $\frac{y}{a+x} = \tan \alpha$  oder  $y = x \tan \alpha + a \tan \alpha$ , also, da  $a \tan \alpha = b$  ist,  $y = x \tan \alpha + b$ . Bezeichnet man  $\tan \alpha$  als Richtungskonstante mit  $A$ , so lautet die Gleichung  $y = Ax + b$ .

Der Aufgabe, zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, entspricht die folgende:

118) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  mit den Koordinaten  $x_1 = a_1, y_1 = b_1, x_2 = a_2, y_2 = b_2$  geht?

**Auflösung.** In Fig. 92 ist  $\triangle Z_2ED \sim \triangle Z_1GZ_2$ , folglich

$$\frac{ED}{Z_2E} = \frac{GZ_2}{Z_1G'}$$

oder

$$\frac{y - b_2}{x - a_2} = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

oder

$$y - b_2 = (x - a_2) \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

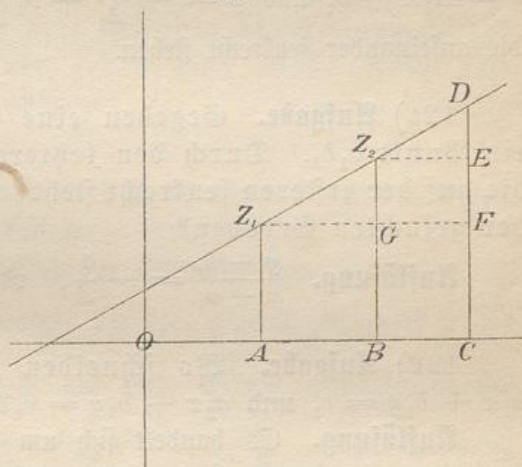
Mit Hilfe anderer ähnlicher Dreiecke findet man ebenso

$$\frac{y - b_1}{x - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{y - b_2}{x - a_2} = \frac{y - b_1}{x - a_1}.$$

119) Der Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade von gegebener Neigung  $\alpha$  zu legen, entspricht folgende

**Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Punkt  $Z$  mit den Koordinaten  $a$  und  $b$ , welche die Neigung  $\alpha$  hat?

Fig. 92.



**Auflösung.** Die entsprechende Figur ergibt

$$\frac{y-b}{x-a} = \tan \alpha \quad \text{oder} \quad y-b = (x-a) \tan \alpha.$$

120) **Aufgabe.** Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden  $y = A_1x + b_1$  und  $y = A_2x + b_2$ ?

**Auflösung.** Sie schneiden sich unter einem Winkel  $\gamma$ , der gleich der Differenz ihrer Neigungswinkel ist, also unter  $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ , wo sich  $\alpha_1$  aus  $A_1 = \tan \alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus  $A_2 = \tan \alpha_2$  bestimmt. Nun ist aber  $\tan \gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$ , also bestimmt sich  $\gamma$  aus der Gleichung

$$\tan \gamma = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2}.$$

Die Linien sind parallel, sobald  $A_1 = A_2$  ist, was  $\tan \gamma = 0$  giebt. Ist dagegen der Nenner des Bruches gleich Null, d. h.  $1 + A_1 A_2 = 0$  oder  $A_2 = -\frac{1}{A_1}$ , so wird  $\tan \gamma = \infty$ , d. h.  $\gamma = 90^\circ$ , und die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Gleichungen von der Form  $y = A_1x + b_1$  und  $y = -\frac{x}{A_1} + b_2$  stellen also stets Gerade dar, die aufeinander senkrecht stehen.

121) **Aufgabe.** Gegeben eine Gerade  $y = Ax + b$  und ein Punkt  $a_1 b_1$ . Durch den letzteren eine Gerade zu legen, die auf der ersteren senkrecht steht. Wie lautet die Gleichung der gesuchten Geraden?

**Auflösung.**  $\frac{y-b_1}{x-a_1} = -\frac{1}{A}$ , oder  $y-b_1 = \frac{a_1-x}{A}$ .

122) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Geraden  $a_1x + b_1y = c_1$  und  $a_2x + b_2y = c_2$ ?

**Auflösung.** Es handelt sich um den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Geraden, d. h. um das gemeinschaftliche  $x$  und  $y$  der beiden Gleichungen oder, was dasselbe ist, um die Bestimmung von  $x$  und  $y$  aus den beiden Gleichungen. Die Lösung ist

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}.$$

Ebenso schneiden sich die Geraden  $y = A_1x + b_1$  und  $y = A_2x + b_2$  in dem Punkte

$$x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \quad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Die Geraden  $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$  und  $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$  schneiden sich ebenso in

$$x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

123) **Bemerkung.** Sind  $a_1 x + b_1 y = c_1$  und  $a_2 x + b_2 y = c_2$  die Gleichungen zweier Geraden, multipliziert man die erste beiderseits mit einem reellen Faktor  $m_1$  und die zweite mit einem Faktor  $m_2$ , und addiert man die linken und ebenso die rechten Seiten, so entsteht eine neue Gleichung von der Form

$$x(m_1 a_1 + m_2 a_2) + y(m_1 b_1 + m_2 b_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Da diese Gleichung durch bloße Umformung aus den beiden ersten entstanden ist, giebt sie mit jeder derselben als Lösung dasselbe  $x$  und  $y$ , wie jene beiden. Alle drei durch die Gleichungen dargestellten Geraden gehen also durch einen Punkt. Folglich:

Hat man drei Gleichungen ersten Grades, und ist die dritte Gleichung eine bloße Folge der beiden anderen, so gehen die drei durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt.

Gehen umgekehrt die drei Geraden durch einen Punkt, so ist die Gleichung einer jeden eine bloße Folge der Gleichungen der beiden anderen.

124) **Aufgabe.** Zu beweisen, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

**Auflösung.** Die Koordinaten der Eckpunkte seien  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ . Die Gleichung der Geraden, die  $a_1 b_1$  gegenüberliegt, ist  $\frac{y - b_3}{x - a_3} = \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = A$ , das von  $a_1 b_1$  auf diese Gerade gefällte Lot hat also die Richtungskonstante  $A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$ . Seine Gleichung ist demnach  $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$  oder  $x(a_3 - a_2) + y(b_3 - b_2) = a_1 a_3 - a_1 a_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2$ . Ebenso sind die Gleichungen der anderen Lote, wie schon die Vertauschung der Indices zeigt,

$$x(a_1 - a_3) + y(b_1 - b_3) = a_2 a_1 - a_2 a_3 + b_2 b_1 - b_2 b_3,$$

$$x(a_2 - a_1) + y(b_2 - b_1) = a_3 a_2 - a_3 a_1 + b_3 b_2 - b_3 b_1.$$

Da man durch Addition aus den beiden ersten Gleichungen die dritte erhält, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

**Bemerkung.** Ebenso kann man zeigen, daß die Mittelsenkrechten, die Mittellinien und gewisse Ecktransversalen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

125) **Aufgabe.** Durch einen Punkt  $ab$  gehen die Geraden  $\frac{y-b}{x-a} = A_1 = \tan \alpha_1$  und  $\frac{y-b}{x-a} = A_2 = \tan \alpha_2$ . Wie lautet die Gleichung der Winkelhalbierenden?

**Auflösung.** Ihre Neigung ist entweder  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  (mittlere Neigung) oder  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + 90^\circ$ . Die Gleichung also ist  $\frac{y-b}{x-a} = \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ , oder  $\frac{y-b}{x-a} = -\cot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ . [Will man die Neigung mit Hilfe

der  $A$  ausdrücken, so setze man  $\tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha_1}{2} + \tan \frac{\alpha_2}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2}}$  und

leite aus  $\tan \alpha_1 = \frac{2 \tan \frac{\alpha_1}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha_1}{2}}$  die Formel  $\tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1}}{\tan \alpha_1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + A_1^2}}{A_1}$  ab, u. s. w.]

#### d) Die Gleichung des Kreises.

126) Ist der Kreis mit Radius  $r = c$  um den Nullpunkt des Koordinatensystems geschlagen, so gilt für jeden Punkt  $xy$  des Kreises die Gleichung  $x^2 + y^2 = c^2$ . (Fig. 93.)

Fig. 93.

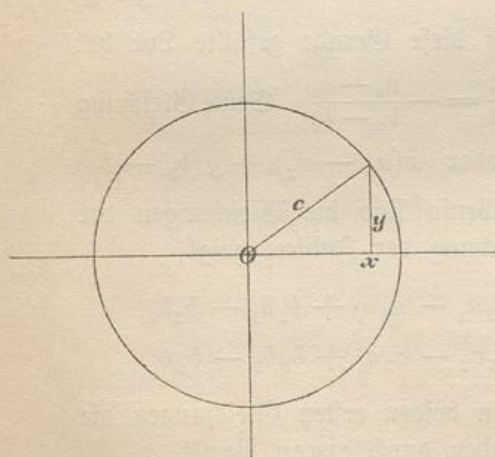
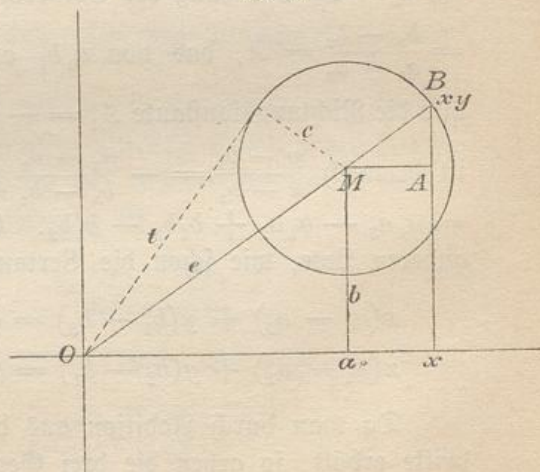


Fig. 94.



127) Ist er dagegen um einen Punkt mit den Koordinaten  $a, b$  geschlagen (Fig. 94), so folgt für jeden Punkt  $xy$  des Kreises

$$MA^2 + AB^2 = c^2,$$

oder 
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

so bedeutet der eingeklammerte konstante Ausdruck, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems außerhalb des Kreises liegt, das Quadrat der vom Nullpunkte aus gezogenen Tangente, denn  $t^2 = e^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2$ . (Fig. 94.) Liegt dagegen  $O$  innerhalb des Kreises, wie in Fig. 95, so ist  $a^2 + b^2 - c^2 = e_1^2 - c^2 = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$ , also gleich dem negativen Quadrat der halben kürzesten Sehne durch  $O$ . In beiden Fällen ist  $a^2 + b^2 - c^2$  die früher erklärte Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis. (Vgl. Abschnitt 87.) Bezeichnet man sie mit  $P_0$ , so kann man die Kreisgleichung auch schreiben

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P_0 = 0.$$

128) **Aufgabe.** Gegeben ein Kreis um den Punkt  $a, b$  mit dem Radius  $c$  und eine Gerade von der Gleichung  $y = Ax + b_1$ . Wo schneiden sich beide?

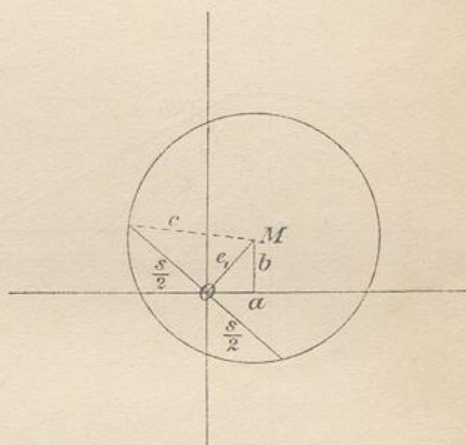
**Auflösung.** Bestimme  $x$  und  $y$  aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$

$$y = Ax + b_1.$$

Es ergeben sich zwei Werte, die entweder reell oder imaginär sind. Ausnahmeweise können sie auch in einen zusammenfallen. Dem entsprechen die Fälle des Schneidens, des Nichtschneidens und des Berührens.

Fig. 95.



129) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Tangente in einem Punkte  $x_1 y_1$  des mit Radius  $c$  um den Nullpunkt geschlagenen Kreises?

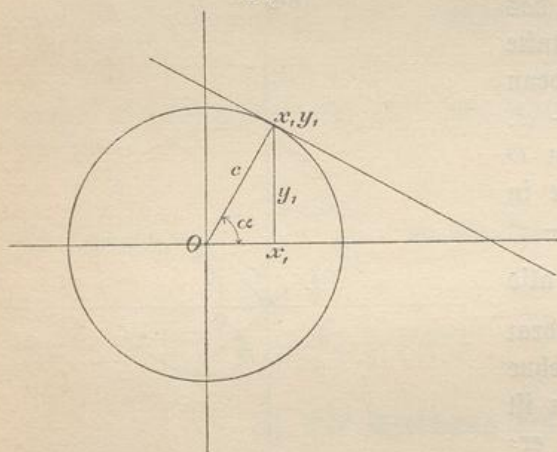
**Auflösung.** Der zugehörige Radius hat die Richtungskonstante

$$A = \tan \alpha = \frac{y_1}{x_1},$$

die Tangente also die Richtungskonstante

$$A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Fig. 96.



Ihre Gleichung lautet also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1},$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber  $x_1^2 + y_1^2 = c^2$  ist, so lautet die Gleichung einfacher  $xx_1 + yy_1 = c^2$ .

**Bemerkung.** Die Tangentengleichung läßt sich demnach unmittelbar aus der Kreisgleichung  $xx + yy = c^2$  ableiten,

indem man einem der Faktoren  $x$  und einem der  $y$  den Index 1 beilegt.

130) **Aufgabe.** Die vorige Aufgabe für einen um den Punkt  $x = a, y = b$  geschlagenen Kreis.

Die vorige Methode ergibt als Tangentengleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

was sich ebenfalls bequem mit der Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

in Beziehung setzen läßt.

131) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare eines innerhalb (oder außerhalb) des Kreises  $x^2 + y^2 = c^2$  liegenden Punktes  $x_1 y_1$ ?

**Auflösung.** Man bilde in Fig. 97 auf dem zu  $x_1 y_1$  gehörigen Radius  $\rho$  den reciproken Punkt  $x_2 y_2$ . Hat der erstere von  $O$  die Entfernung  $e_1$ , so hat der andere die Entfernung  $\frac{c^2}{e_1}$ . Demnach ist  $\frac{OB}{OC} = \frac{e_1}{\left(\frac{c^2}{e_1}\right)} = \frac{e_1^2}{c^2}$ , und ebenso  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e_1^2}{c^2}$ ,  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e_1^2}{c^2}$ , also  $x_2 = \frac{x_1 c^2}{e_1^2}$ ,  $y_2 = \frac{y_1 c^2}{e_1^2}$ . Der Radius hat die Richtungskonstante  $A = \frac{y_1}{x_1}$ , die Polare also die Richtungskonstante  $-\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}$ . Ihre Gleichung ist also

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Fig. 97.

oder

$$yy_1 - y_1 y_2 = -xx_1 + x_1 x_2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Setzt man für  $x_2$  und  $y_2$  die oben berechneten Werte ein, so geht die rechte Seite über in  $\frac{x_1^2 + y_1^2}{e_1^2} c^2$  oder in  $c^2$ , und es ergibt sich wie bei der Tangente, die Gleichung

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

(Für den Fall, daß der Punkt außerhalb liegt, gilt dieselbe Entwicklung. Zur Übung soll unten noch eine andere gegeben werden.)

132) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Kreise  $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = c_1^2$  und  $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = c_2^2$ ?

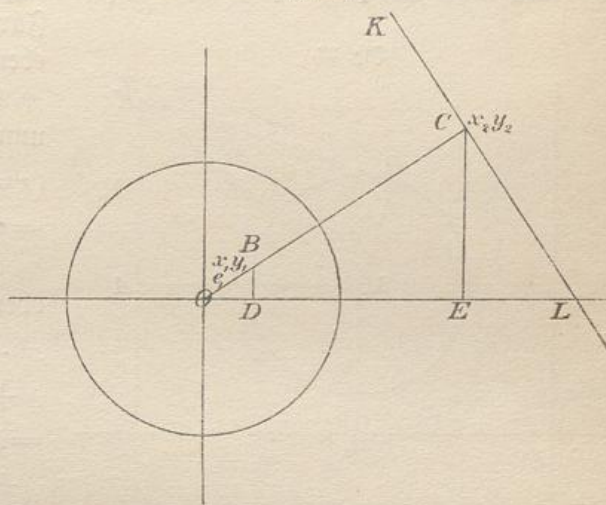
**Auflösung.** Die Gleichungen lassen sich schreiben

1.  $x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 = 0,$

2.  $x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 = 0,$

wo  $P_1 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2$  und  $P_2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2^2$  ist. Durch Subtraktion erhält man die Gleichung ersten Grades

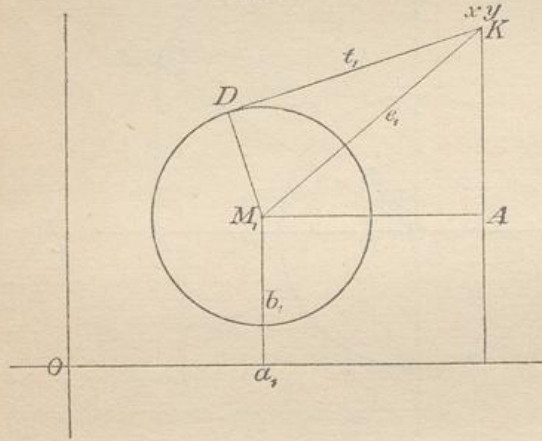
3.  $2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$



Dies ist die Gleichung einer Geraden. Da sie aber aus den beiden anderen Gleichungen abgeleitet ist, so ist die Gleichung eine durch die Schnittpunkte der Kreise gehende Gerade, d. h. die Gleichung der gemeinschaftlichen Sekante (Potenzlinie). Aus dieser Gleichung und einer der beiden ersteren sind die Koordinaten  $x$  und  $y$  der beiden Schnittpunkte zu berechnen.

133) Was bedeutet aber Gleichung 3., wenn die Kreise sich nicht schneiden? Vermutlich wiederum die Potenzlinie, d. h. die Linie gleicher Tangenten. Die Gleichung dieser Linie bestimmt sich folgendermaßen: In Fig. 98 ist  $t_1^2 = c_1^2 - c_2^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2$ .

Fig. 98.



Für den zweiten Kreis wird ebenso  $t_2^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2$ . Soll nun  $t_1 = t_2$  sein, so ist

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2,$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + (a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) \\ = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2), \end{aligned}$$

oder nach Hebung der

gleichen Glieder und bei Einführung der Bezeichnungen  $P_1$  und  $P_2$

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Demnach ist die Gleichung 3. auch im Falle des Nichtschneidens die der Potenzlinie oder der Linie gleicher Tangenten. Also:

Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise stets die Gleichung der Potenzlinie.

134) Daß die Potenzlinien dreier Kreise stets durch einen Punkt, das Potenzcentrum, gehen, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Sind  $a_1b_1$ ,  $a_2b_2$ ,  $a_3b_3$  die Kreismittelpunkte und  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  die Radien, so sind die Gleichungen der Potenzlinien:

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2,$$

$$2x(a_2 - a_3) + 2y(b_2 - b_3) = P_2 - P_3,$$

$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = P_3 - P_1.$$

Durch Addition erhält man aus den beiden ersten Gleichungen die dritte, folglich gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

135) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Berührungssehne (Polare) zu einem außerhalb des Kreises  $x^2 + y^2 = c^2$  liegenden Punkte  $x_1, y_1$ ? (Vgl. 131.)

**Auflösung.** Das Quadrat der Tangente ist, wie früher,  $t^2 = c^2 - c^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$ . Der mit  $t$  um  $x_1, y_1$  geschlagene Kreis hat also die Gleichung  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = t^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$ , oder, wenn man die Klammern ausrechnet und einiges hebt:

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = -c^2.$$

Der gegebene Kreis war aber

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

durch Subtraktion erhält man die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise, d. h. die der gesuchten Berührungssehne, also  $2xx_1 + 2yy_1 = 2c^2$ , oder, wie oben

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

136) **Bemerkung.** Sämtliche Punkte der senkrechten Geraden  $x_1 = a$  haben, wenn  $y_n$  die veränderliche Ordinate bedeutet, in Bezug auf den untersuchten Kreis Polaren von der Gleichung

$$xa + yy_n = c^2.$$

Setzt man hier  $y = 0$ , so wird  $xa = c^2$  oder  $x = \frac{c^2}{a}$ . Folglich: Die Polaren sämtlicher Punkte der Geraden  $x_1 = a$  gehen durch den reciproken Punkt  $x_2 = \frac{c^2}{a}$ . (Was geometrisch von dieser Geraden gilt, gilt von sämtlichen Geraden.)

137) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare zu einem Punkte  $x_1, y_1$  in Bezug auf den Kreis  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ ?

Die nach obiger Methode auszuführende Rechnung führt auf die Gleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

die wieder in einfacher Beziehung zur Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

steht.

Das Gegebene reicht hin, eine große Zahl der früher behandelten Sätze über Gerade und Kreise mit Hilfe der Koordinatenlehre zu beweisen und entsprechende Aufgaben durch Rechnung zur Lösung zu bringen, besonders auch solche der neueren Geometrie.

#### XIV. Zusammenstellung der wesentlichsten Resultate.

##### a) Kreislehre und neuere Geometrie.

1) Ptolemäus: Im Sehnenviereck ist

$$pq = ac + bd, \quad \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd'}$$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2) Im Dreieck hat der Mittelpunkt des Um-Kreises von denen der vier Berührungskreise die Entfernungen  $e = \sqrt{r^2 - 2rq}$ ,  $e_1 = \sqrt{r^2 + 2rq_1}$ ,  $e_2 = \sqrt{r^2 + 2rq_2}$ ,  $e_3 = \sqrt{r^2 + 2rq_3}$ . Außerdem ist  $r = \frac{abc}{4F}$ .

3) Im Dreieck liegen der Höhendurchschnitt, der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Um-Kreises auf einer Geraden (Eulersche Gerade), und die vier Punkte sind harmonische.

4) Im vollständigen Vierseit sind die drei Diagonalen harmonisch geteilt.

5) Pascal: Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

6) Die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier Geraden, den Ähnlichkeitsachsen.

7) Jede Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

8) Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gehen ihre Polaren durch einen Punkt.

9) Harmonische Punkte haben zu Polaren harmonische Strahlen.

10) Brianchon: Im Tangentensechseck schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.

11) Die Kurve  $\frac{p}{q} = c$  ist ein Kreis.

12) Das Inversionsbild eines Kreises ist ein Kreis. Die Inversionsabbildung ist winkeltreu.

13) Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

### b) Koordinatenlehre.

1) Zusammenhang zwischen den Cartesischen und den Polar-Koordinaten:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

2) Der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems hat als Koordinaten die arithmetischen Mittel der Einzelkoordinaten.

3) Drei Punkte liegen auf einer Geraden, wenn

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

4) Hauptgleichungen der Geraden:

$$y = Ax + b, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5) Jede Gleichung ersten Grades zwischen  $x$  und  $y$  bedeutet eine Gerade.

6) Ist eine von drei Gleichungen ersten Grades eine Folge der beiden anderen, so gehen die drei entsprechenden Geraden durch einen Punkt.

7) Kreisgleichungen:

$$x^2 + y^2 = c^2, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

8) Gleichung der Polare des Punktes  $x_1 y_1$  ist

$$xx_1 + yy_1 = c^2$$

bezw.

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2.$$

Liegt der Punkt  $x_1 y_1$  auf der Peripherie, so handelt es sich um die Gleichung der Tangente. Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise die Gleichung ihrer Potenzlinie.

## Zweite Abteilung.

# Arithmetik.

### I. Geometrische Reihen.

#### a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl.

1) In einer Zahlenreihe können die Glieder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. Hat man an den ersten Gliedern das Gesetz erkannt, so kann man sämtliche folgenden mit Leichtigkeit bilden. In der Reihe

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

ist z. B. jedes Glied das Doppelte des vorhergehenden, dagegen in der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

jedes Glied die Hälfte des vorhergehenden. Bilde in ähnlicher Weise von 1 ausgehende Reihen, in denen jedes Glied das dreifache, vierfache, u. s. w. oder der dritte, vierte Teil u. s. w. des vorhergehenden ist. Bei den so gebildeten Reihen ist der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante (unveränderliche) Größe.

Reihen, bei denen der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante Größe ist, werden geometrische Reihen genannt.

2) Ist  $a$  das Anfangsglied und  $e$  der unveränderliche Quotient aus jedem Gliede und dem vorhergehenden, so ist, wenn  $n$  Glieder vorhanden sind, die Form der geometrischen Reihe die folgende:

$$a, ae, ae^2, ae^3, \dots, ae^{n-2}, ae^{n-1}.$$

## Zweite Abteilung.

# Arithmetik.

### I. Geometrische Reihen.

#### a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl.

1) In einer Zahlenreihe können die Glieder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. Hat man an den ersten Gliedern das Gesetz erkannt, so kann man sämtliche folgenden mit Leichtigkeit bilden. In der Reihe

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

ist z. B. jedes Glied das Doppelte des vorhergehenden, dagegen in der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

jedes Glied die Hälfte des vorhergehenden. Bilde in ähnlicher Weise von 1 ausgehende Reihen, in denen jedes Glied das dreifache, vierfache, u. s. w. oder der dritte, vierte Teil u. s. w. des vorhergehenden ist. Bei den so gebildeten Reihen ist der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante (unveränderliche) Größe.

Reihen, bei denen der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante Größe ist, werden geometrische Reihen genannt.

2) Ist  $a$  das Anfangsglied und  $e$  der unveränderliche Quotient aus jedem Gliede und dem vorhergehenden, so ist, wenn  $n$  Glieder vorhanden sind, die Form der geometrischen Reihe die folgende:

$$a, ae, ae^2, ae^3, \dots, ae^{n-2}, ae^{n-1}.$$

Kennt man die beiden ersten Glieder einer geometrischen Reihe, so kann man sämtliche Glieder bilden und das  $n^{\text{te}}$  Glied (das allgemeine Glied) hinschreiben, ohne den speziellen Wert der ganzen Zahl  $n$  zu kennen. Seine Form ist

$$1) \quad t = ae^{n-1}.$$

3) Eine Hauptaufgabe besteht darin, die Summe  $s$  der  $n$  ersten Glieder zu bilden, ohne die ganze Zahl  $n$  zu kennen. Zu diesem Zwecke setzt man\*)

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1},$$

bildet durch beiderseitige Multiplikation mit  $e$  die Gleichung

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} + ae^n$$

und findet durch beiderseitige Subtraktion, bei der rechts alle Glieder bis auf zwei wegfallen,

$$es - s = ae^n - a,$$

oder

$$s(e - 1) = a(e^n - 1).$$

Demnach ist die Summe der geometrischen Reihe bis zum  $n^{\text{ten}}$  Gliede:

$$2) \quad s = a \frac{e^n - 1}{e - 1} = a \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

Ordnet man beiderseits nach steigenden bzw. fallenden Potenzen von  $e$ , so gelten die Gleichungen

$$3) \quad \begin{cases} a + ae + ae^2 + \dots + ae^{n-1} = a \frac{1 - e^n}{1 - e}, \\ ae^{n-1} + ae^{n-2} + \dots + ae + a = a \frac{e^n - 1}{e - 1}. \end{cases}$$

Dividiert man beiderseits durch  $a$ , so erhält man die einfacheren Formeln

$$4) \quad \begin{cases} 1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}, \\ e^{n-1} + e^{n-2} + \dots + e + 1 = \frac{e^n - 1}{e - 1}. \end{cases}$$

4) Eine Probe für die Richtigkeit dieser Summenformeln kann man machen, indem man rechts und links mit  $1 - e$  bzw.  $e - 1$

\*) Zu der Regel wird die so geschriebene Summe als die geometrische Reihe bezeichnet.

multipliziert. Eine zweite Probe besteht in der Ausführung der auf der rechten Seite angedeuteten Division, z. B.

$$\begin{array}{r} (1-e^4):(1-e)=1+e+e^2+e^3 \\ \underline{1-e} \\ e-e^4 \\ \underline{e-e^2} \\ e^2-e^4 \\ \underline{e^2-e^3} \\ e^3-e^4 \\ \underline{e^3-e^4} \end{array} \quad \begin{array}{r} (e^4-1):(e-1)=e^3+e^2+e+1 \\ \underline{e^4-e^3} \\ e^3-1 \\ \underline{e^3-e^2} \\ e^2-1 \\ \underline{e^2-e} \\ e-1 \\ \underline{e-1} \end{array}$$

5) In der Kunst, die Summe der  $n$  ersten Glieder einer geometrischen Reihe zu bilden, liegt bei größerer Gliederzahl eine ganz außerordentliche Erleichterung des Rechnens.

**Aufgabe.** Die Summe der 17 ersten durch wiederholte Verdoppelung entstehenden Zahlen zu bilden:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 65\,536.$$

**Auflösung.** Es handelt sich um

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{16} &= \frac{2^{17}-1}{2-1} \\ &= \frac{131\,072-1}{2-1} = 131\,071. \end{aligned}$$

[Hierher gehört z. B. die Aufgabe des Sessa Ebn Daher, der als Lohn für die Erfindung des Schachspiels vom König Shehram forderte, auf die 64 Felder des Schachbrettes der Reihe nach 1, 2, 4, 8, u. f. w. Weizenkörner zu legen und sie ihm zu schenken. Man findet als Resultat  $\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1$ . Nach vorigem Beispiele ist  $2^{16} = 65\,536$ , also  $2^{64} = (65\,536 \cdot 65\,536)^2$ . Die Rechnung ergibt als geforderte Summe

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \text{ Körner,}$$

mit denen man die gesamte Erdoberfläche etwas mehr als 1 cm hoch bedecken könnte, so daß auf der ganzen Erde nicht soviel Weizen existiert, wie gefordert wurde.]

6) Setzt man in Gleichung 4)  $e = \frac{y}{x}$ , so erhält man

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \dots + \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} = \frac{1 - \frac{y^n}{x^n}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x^n - y^n}{x^{n-1}(x-y)},$$

oder, wenn man beiderseits mit  $x^{n-1}$  multipliziert,

$$5) \quad x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

Hierin sind zahlreiche Spezialformeln enthalten, die häufig als Beispiele für aufgehende Division Verwendung finden, z. B.

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2,$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3.$$

Setzt man in 5)  $-y$  statt  $y$  ein, so bleibt der Zähler der rechten Seite bei geradem  $n$  ungeändert, ändert sich aber bei ungeradem  $n$ , auf der anderen aber entstehen abwechselnde Vorzeichen, z. B.

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2,$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3,$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

**Bemerkung.** Jedes Glied der geometrischen Reihe ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Nachbargliedern. Durch Einschaltung mittlerer Proportionalen läßt sich also aus jeder solchen Reihe eine neue ableiten, aus dieser eine dritte u. s. w.

#### b) Anwendung auf die Rentenrechnung.

7) **Aufgabe.** Jemand legt am Schlusse jedes Jahres eine Ersparnis von  $r$  Mark zinsbar an und schlägt jedesmal die Zinsen zum Kapital. Wieviel besitzt er nach  $n$  Jahren?

**Auflösung.** Wird der Prozentsatz mit dem Zeichen  $\%$  bezeichnet, so hat der erste Posten  $r$  nach  $n$  Jahren den Wert  $r\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{n-1}$ , denn er war  $n - 1$  Jahre lang zinsbar angelegt. (Vergl. Teil I, Arithmetik Nr. 112.) Der zweite Posten hat nach  $n$  Jahren den Wert  $r\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{n-2}$ , u. s. w. Die Summe der Schlußwerte der einzelnen Posten ist also nach  $n$  Jahren:

$$r\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{n-1} + r\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{n-2} + r\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{n-3} + \dots + r\left(1 + \frac{\%}{100}\right) + r,$$

oder nach Gleichung 3)

$$r \frac{\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{\%}{100}\right) - 1},$$

also, wenn man den Schlußwert mit  $k$  und den Ausdruck  $1 + \frac{\%}{100}$  mit  $q$  bezeichnet und eine einfache Umformung vornimmt:

$$6) \quad k = \frac{100r}{\%} \left[ \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n - 1 \right] = \frac{100r}{\%} [q^n - 1].$$

Bezeichnet man jeden Einzeelposten als die jährliche Rente (oder Rate), so hat man in 6) den Wert gefunden, den eine auf  $n$  Jahre zu zahlende jährliche Rente  $r$  nach  $n$  Jahren hat. Er heißt der Schlußwert der Rente. Die Formel ist wichtig für die Berechnung der Lebensversicherung. Ist  $n$  die aus der Statistik folgende mittlere Lebensdauer der sich heute versichernden Person, und zahlt sie jährlich  $r$  Mark, so ist  $k$  die nach dem Tode zurückzuzahlende Summe. Ähnlich ist es bei der Feuerversicherung von Gebäuden, z. B. Theatern, bei denen eine mittlere Dauer des Bestehens auf Grund der Statistik angenommen wird.

8) **Aufgabe.** Jemand will bei gegebenem Zinsfuß auf  $n$  Jahre eine an jedem Jahreschluß zu zahlende Rente  $r$  kaufen. Wie groß ist der Kaufpreis  $c$ ?

**Auflösung.** Der Kaufpreis  $c$  würde nach  $n$  Jahren den Wert  $k = c \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n$  haben, die Rente bei gleichem Zinsfuß den Wert  $k = \frac{100r}{\%} \left[ \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n - 1 \right]$ . Beide Schlußwerte müssen gleich sein, also

$$7) \quad c \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n = \frac{100r}{\%} \left[ \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n - 1 \right].$$

Demnach ist der Kaufpreis (oder Anfangswert) der Rente

$$7*) \quad c = \frac{100r}{\%} \left[ 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n} \right] = \frac{100r}{\%} \left[ 1 - \left( \frac{100}{100 + \%} \right)^n \right],$$

oder

$$c = \frac{100r}{\%} \left[ 1 - \frac{1}{q^n} \right].$$

Hierher gehört die Ablösung von Renten durch eine Barzahlung.

9) **Aufgabe.** Welche Rente  $r$  kann man bei gegebenem Zinsfuß auf  $n$  Jahre für einen Kaufpreis  $c$  kaufen?

**Auflösung.** Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

$$8) \quad r = \frac{c \cdot \%}{100 \left[ 1 - \left( \frac{100}{100 + \%} \right)^n \right]} = \frac{c \cdot \%}{100 \left[ 1 - \frac{1}{q^n} \right]}.$$

10) **Aufgabe.** Auf wie viele Jahre kann man bei gegebenem Zinsfuß eine jährliche Rente  $r$  für einen Kaufpreis  $c$  erwerben?

**Auflösung.** Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{\%}{100}}\right)^n = 1 - \frac{c \frac{\%}{100}}{r} = \frac{r - c \frac{\%}{100}}{r},$$

oder

$$\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = \frac{r}{r - c \frac{\%}{100}}.$$

Beiderseitiges Logarithmieren giebt

$$n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg r - \lg \left(r - \frac{c \%}{100}\right),$$

also ist die Anzahl der Jahre

$$9) \quad n = \frac{\lg r - \lg \left(r - \frac{c \%}{100}\right)}{\lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg r - \lg(r - 0,01 c \%)}{\lg q}.$$

Im allgemeinen erhält man kein ganzzahliges  $n$ , obwohl der Ausgangspunkt der Betrachtung ein solches angenommen hat. Über den überschießenden Bruchteil ist dann besondere Vereinbarung zu treffen.

11) **Bemerkung.** Die Berechnung des Prozentsatzes könnte folgendermaßen eingeleitet werden. Man setze  $1 + \frac{\%}{100} = x$ , also  $\frac{\%}{100} = x - 1$  dann geht Gleichung 7) über in

$$10) \quad cx^n = \frac{r}{x-1}(x^n - 1) = r[x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1].$$

Es handelt sich also um die Gleichung  $(n+1)$ ten Grades  $cx^n(x-1) = r(x^n - 1)$ , oder um die Gleichung  $n$ ten Grades  $cx^n = r[x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1]$ . Sobald also  $n$  größer als 2 (bzw. 3 oder 4) ist, übersteigt die Aufgabe den Standpunkt der Schule. Renten auf so geringe Anzahl von Jahren zu berechnen, ist aber ohne praktische Bedeutung.

12) **Aufgabe.** Jemand hat  $c$  Mark Vermögen, legt es zinsbar an und legt jährlich  $r$  Mark Ersparnisse dazu. Wieviel besitzt er nach  $n$  Jahren?

**Auflösung.** 11)  $k = c \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n + \frac{100r}{\%} \left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right]$   
 $= \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n \left(c + \frac{100r}{\%}\right) - \frac{100r}{\%}.$

**Aufgabe.** Berechne aus der letzten Formel  $r$  bzw.  $n$  und kleide diese neuen Aufgaben in Worte ein.

**Aufgabe.** Jemand hat  $c$  Mark Vermögen, legt es zinsbar an und nimmt jährlich  $r$  Mark davon. Wieviel hat er nach  $n$  Jahren?

**Auflösung.** Man hat nur nötig, in Formel 11) die Rente  $r$  negativ einzusetzen.

**Bemerkung.** Sagt man in dieser Aufgabe Schulden statt Vermögen, so handelt es sich um die ratenweise Tilgung einer Schuld nebst Zinsen und Zinseszinsen. Man kann den Schuldenbestand für jedes beliebige Jahr berechnen. Setzt man in Formel 11)  $k = 0$ , so kommt man auf die Formeln 7), 8), 9) und 10) zurück und erhält die sogenannte Amortisationsberechnung.

13) **Aufgabe.** Eine Rente  $r$  sei auf  $m$  Jahre zu beziehen. Welches ist der mittlere Zahlungstermin? (Der Termin für die Zahlung des Kapitals  $rm$ .)

**Auflösung.** Setze die Schlußwerte gleich, also

$$12) \quad rm \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^{m-n} = \frac{100r}{\%} \left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^m - 1\right]$$

und berechne daraus  $n$ .

**Bemerkungen.** Übungsaufgaben befinden sich in den bekannteren Sammlungen, z. B. bei Bardey und Heis. Auf die Bedeutung dieses Kapitels für das gesamte Versicherungs- und Rentenwesen, für die Waldwirtschaft, für das Schuldenwesen der Staaten und Städte, für das Sparkassenwesen und sonstige volkswirtschaftliche Gebiete sei noch besonders hingewiesen. — Die obigen Aufgaben lassen sich durch Einführung von halbjährlichen, vierteljährlichen, monatlichen Rentenzahlungen noch vielfach umwandeln.

### c) Die geometrischen Reihen mit unendlich großer Gliederzahl.

14 a) Ist in der Reihe

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^{n-1} = \frac{1 - e^n}{1 - e} = \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

$e > 1$  oder  $e < -1$ , so schwellen die Glieder bei unendlich großem  $n$  zu unendlicher Größe an und auch die Summe wird unendlich

groß, weil auf der rechten Seite  $e^n$  unendlich groß ist. Die Reihe kann dann nicht summiert werden.

Ist hingegen  $-1 < e < +1$ , so nehmen bei unendlich großer Gliederzahl die einzelnen Glieder allmählich bis zu unendlicher Kleinheit ab, d. h. man kann sie beliebig nahe an Null bringen, man darf sogar  $e^{n-1}$  und ebenso  $e^n$  für  $n = \infty$  gleich Null setzen. Dann ergibt sich bei Fortsetzung der Reihe bis ins Unendliche

$$13) \quad 1 + e + e^2 + e^3 + \dots = \frac{1}{1-e}, \quad \text{für } -1 < e < 1.$$

So ist z. B.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Letzteres läßt sich folgendermaßen veranschaulichen: Man schneide von der Geraden von Länge 2 das Stück 1 ab, vom Reste 1 das Stück  $\frac{1}{2}$ , vom Reste  $\frac{1}{2}$  das Stück  $\frac{1}{4}$ , vom Reste  $\frac{1}{4}$  das Stück  $\frac{1}{8}$  u. s. w. Da der Rest bei fortgesetztem Halbieren sich allmählich der Null nähert, so erkennt man die Richtigkeit der letzten Gleichung auf geometrischem Wege.

Wollte man dagegen in Gleichung 13) den Wert  $e = 2$  einführen, der größer als 1 ist, so würde man ganz Falsches erhalten, nämlich

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1,$$

links also hätte man Positives von unendlicher Größe, rechts einen negativen endlichen Wert.

14b) Den eigentlichen Grund für das Nichtgelten der Gleichung in solchen Fällen erkennt man bei der Ausführung der auf der rechten Seite von 13) stehenden Division. Es ist z. B.

$$1 : (1 - e) = 1 + e + e^2 + e^3 + \frac{e^4}{1-e}.$$

$$\frac{1 - e}{1 - e}$$

$$\frac{e}{e - e^2}$$

$$\frac{e^2}{e^2 - e^3}$$

$$\frac{e^3}{e^3 - e^4}$$

$$\frac{e^4}{e^4 - e^5}$$

$$\frac{e^5}{e^5 - e^6}$$

D. h. bricht man bei dem Reste  $e^4$  mit der Division ab, so muß dieser Rest noch durch  $1 - e$  dividiert werden, und man erhält das Restglied  $\frac{e^4}{1-e}$ .

Die dabei entstehende Gleichung

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^{n-1} + \frac{e^n}{1-e} = \frac{1}{1-e}$$

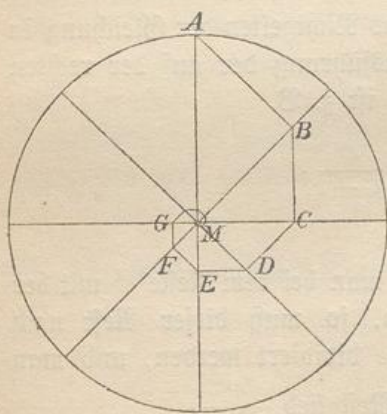
hat unbeschränkte Geltung, sie gilt also auch für den Wert  $e = 2$ . Ist nun  $e$  absolut größer als 1, so ist  $\frac{e^n}{1-e}$  eine Größe, deren absoluter Betrag um so größer ist, je größer man  $n$  nimmt. Sie darf also nicht vernachlässigt werden. Ist dagegen  $-1 < e < +1$ , so ist der absolute Betrag des Restes  $e^n$  und ebenso des Restgliedes  $\frac{e^n}{1-e}$  für unendlich großes  $n$  verschwindend klein, und der Rest kann vernachlässigt werden. Unendliche Reihen, die summiert werden können, werden als konvergent bezeichnet, womit gesagt werden soll, daß die Summe einem bestimmten Grenzwerte um so näher kommt, je mehr Glieder man summiert hat. Die Konvergenz ist in den meisten Fällen an bestimmte Bedingungen geknüpft.

15) **Aufgabe.** Es sei der absolute Betrag von  $b$  kleiner als der von  $a$ . Welches ist die Summe der mit  $a$  und  $b$  beginnenden geometrischen Reihe?

**Auflösung.** Die Summe der Reihe ist

$$\begin{aligned} a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots &= a \left( 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \dots \right) \\ &= a \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}. \end{aligned}$$

Fig. 99.



16) **Aufgabe.** Der Kreis in Fig. 99 sei in Sektoren mit dem Centriwinkel  $45^\circ$  eingeteilt. Von  $A$  aus ist auf den benachbarten Radius das Lot  $AB$  gefällt, von  $B$  aus auf den folgenden Radius das Lot  $BC$ , von  $C$  aus auf den nächsten das Lot  $CD$  u. s. w. Wie lang ist die gebrochene Linie  $ABCDEFG\dots$ , wenn man mit dieser Konstruktion bis ins Unendliche fortfährt und der Radius des Kreises  $r = \sqrt{2}$  ist?

**Auflösung.** Die Lote bilden die geometrische Reihe

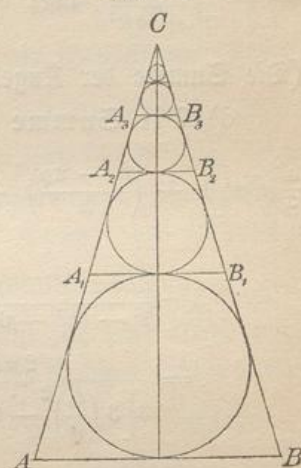
$$1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

[Aufgaben dieser Art kann man zum Ausgangspunkt für die Berechnung gewisser Spiralen, der sog. logarithmischen Spiralen machen. Halbierung jedes Centriwinkels und Einschaltung der mittleren Proportionale je zweier benachbarter Radien führt bei mehrfacher Wiederholung allmählich auf diese Kurven.]

[17] **Aufgabe.** In ein gleichschenkliges Dreieck von Grundlinie  $a$  und Höhe  $h$  sei nach Art von Figur 100 eine Reihe von Berührungskreisen einbeschrieben, die sich nach der Spitze hin ins Unendlichkleine fortsetzt. a) Wie lautet die Reihe der Radien? b) Wie groß ist die Summe sämtlicher Kreisperipherieen? c) Wie groß ist die Summe sämtlicher Kreisflächen? d) Wie groß ist die Summe des Inhalts sämtlicher Kugeln, die durch Umdrehung der Figur um die Höhe  $h$  entstehen?

Fig. 100.



**Auflösung.** a) Ist  $\varrho$  der Radius des größten der Berührungskreise und  $u$  der Umfang des Dreiecks, so ist zunächst  $\varrho u = ah$ , also

$$\varrho = \frac{ah}{u}, \text{ wo } u = a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = a + \sqrt{a^2 + 4h^2}, \text{ so daß}$$

$$\varrho = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}} \text{ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke } ABC \text{ und}$$

$A_1B_1C$  folgt  $\varrho_1 : \varrho = h - 2\varrho : h$ , also  $\varrho_1 = \varrho \frac{h - 2\varrho}{h}$ . Die Reihe der Radien ist also

$$\varrho, \varrho \frac{h - 2\varrho}{h}, \varrho \left(\frac{h - 2\varrho}{h}\right)^2, \varrho \left(\frac{h - 2\varrho}{h}\right)^3, \dots$$

(Die doppelte Summe dieser Reihe giebt natürlich  $h$ .)

b) Die Summe der Kreisperipherieen ist

$$\begin{aligned}
 & 2 \varrho \pi \left[ 1 + \frac{h-2\varrho}{h} + \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= 2 \varrho \pi \frac{1}{1 - \frac{h-2\varrho}{h}} = 2 \varrho \pi \frac{h}{2\varrho} = \pi h.
 \end{aligned}$$

Dieses einfache Resultat läßt sich auch unmittelbar aus der Anschauung ableiten.

c) Die Summe der Kreisflächen ist

$$\begin{aligned}
 & \varrho^2 \pi \left[ 1 + \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^2 + \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^4 + \dots \right] = \varrho^2 \pi \frac{1}{1 - \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^2} \\
 &= \frac{\pi \varrho^2 h^2}{4(\varrho h - \varrho^2)} = \frac{\pi \varrho h^2}{4(h - \varrho)} = \frac{\pi h^2}{4\left(\frac{h}{\varrho} - 1\right)} = \frac{\pi h^2}{4\left(\frac{u}{a} - 1\right)} = \frac{a \pi h^2}{4(u - a)} \\
 &= \frac{a \pi h^2}{4\sqrt{a^2 + 4h^2}}, \text{ oder das } \frac{\pi h}{2\sqrt{a^2 + 4h^2}} \text{ fache des Dreiecksinhalts.}
 \end{aligned}$$

(Die Summe der Kugeloberflächen ist viermal so groß.)

d) Die Summe der Inhalte sämtlicher Kugeln ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{3} \varrho^3 \pi \left[ 1 + \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^3 + \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^6 + \dots \right] = \frac{4}{3} \varrho^3 \pi \frac{1}{1 - \left( \frac{h-2\varrho}{h} \right)^3} \\
 &= \frac{4}{3} \varrho^3 \pi \frac{h^3}{h^3 - (h^3 - 6h^2\varrho + 12h\varrho^2 - 8\varrho^3)} = \frac{2\varrho^2 \pi h^3}{3(3h^2 - 6h\varrho + 4\varrho^2)} \\
 &= \frac{2\pi h^3}{3 \left[ 3\left(\frac{h}{\varrho}\right)^2 - 6\left(\frac{h}{\varrho}\right) + 4 \right]} = \frac{2\pi h^3}{3 \left[ 3\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{u}{a}\right) + 4 \right]} \\
 &= \frac{2a^2 \pi h^3}{3[3u^2 - 6ua + 4a^2]}.
 \end{aligned}$$

Setzt man hier  $u = a + \sqrt{a^2 + 4h^2}$ , so ergibt sich die Summe der Kugeln als  $\frac{a^2 \pi h^3}{6(a^2 + 3h^2)}$ , oder das  $\frac{h^2}{2(a^2 + 3h^2)}$  fache des Kegelinhalts.

18) **Aufgabe.** In ein gleichseitiges Dreieck von Seite  $a$  sei der In-Kreis eingezeichnet. Nach den drei Ecken hin seien nach Art der vorigen Aufgabe Reihen von Berührungskreisen eingetragen. Wie groß ist die Summe der sämtlichen Kreisflächen?

**Auflösung.** Nach Art der vorigen Lösung erhält man als

Summe der Kreisflächen  $s = \frac{11}{96} a^2 \pi$ , oder das  $\frac{11\pi}{24\sqrt{3}}$ -fache des Dreiecksinhalts. (Der größte Kreis nur einmal einzurechnen!)

19) **Aufgabe.** Wie groß ist die Summe der Inhalte sämtlicher Kugeln, die sich in entsprechender Weise in das regelmäßige Tetraeder einbeschreiben lassen?

**Auflösung.** Auf ähnlichem Wege, wie vorher, erhält man

$$s = \frac{11}{1512} a^3 \pi \sqrt{6}.$$

20) **Bemerkung.** Hier läßt sich eine ganze Reihe geometrischer und stereometrischer Übungsaufgaben anschließen, z. B. die Summe der Inhalte sämtlicher Quadrate zu berechnen, die sich in einem gleichschenkligen Dreieck von der Basis aus so übereinander setzen lassen, daß ihre oberen Ecken in die Schenkel fallen. ( $s = a \frac{h^2}{a + 2h}$ .) Dieselbe Aufgabe für Rechtecke, deren Höhe sich zur Grundlinie verhält wie 1 : 2. ( $s = \frac{a^2 h^2}{(a + 3h)(a + h)}$ .) Ein senkrechter Kreisegel habe als Durchmesser des Grundkreises die Gerade  $a$  und die Höhe  $h$ . In ihm läßt sich eine Reihe von Kreiszylindern quadratischen Hauptschnitts übereinander setzen. Wie groß ist die Summe der Inhalte? ( $s = \frac{a^2 h^3 \pi}{4(a^2 + 3ah + 3h^2)}$ .) Eine senkrechte quadratische Pyramide habe die Höhe  $h$  und die Grundkante  $a$ . In ihr läßt sich eine Reihe von Berührungskugeln übereinander setzen. Wie groß ist die Summe ihrer Inhalte? ( $s = \frac{a^2 \pi h^3}{6(a^2 + 3h^2)}$ , wie in einer der obigen Aufgaben.) Dieselbe Aufgabe für die dreiseitige Pyramide von Grundkante  $a$  und Höhe  $h$ . ( $s = \frac{a^2 \pi h^3}{6(a^2 + 9h^2)}$ .) Dieselbe Aufgabe für die  $n$ -seitige senkrechte Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche. [In einen senkrechten Kreisegel eine entsprechende Reihe  $n$ -seitiger Prismen mit quadratischen Seitenflächen einzuschreiben. — Aufgaben dieser Art haben allerdings keinen größeren praktischen Wert, zeichnen sich aber durch einen reicheren Gedankeninhalt aus, als die sonst üblichen. Arithmetische Aufgaben findet man z. B. in den Sammlungen von Bardey und Heis.]

## II. Arithmetische Reihen.

## a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

21) Die Glieder einer Zahlenreihe können auch so aufeinander folgen, daß der Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist, wie z. B. in

$$5, 7, 9, 11, 13, \dots,$$

dann nennt man die Reihe eine arithmetische Reihe.

Ist  $a$  das Anfangsglied,  $n$  die Anzahl der Glieder und  $d$  die konstante Differenz, so lautet die Reihe folgendermaßen:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d.$$

Das  $n^{\text{te}}$  Glied hat also, auch wenn es nicht Schlußglied ist, die Form

$$t = a + (n - 1)d.$$

22) Die Summe der arithmetischen Reihe kann man finden, indem man sie zweimal in entgegengesetzter Ordnung hinschreibt, also z. B.

$$\begin{aligned} s &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (t - d) + t, \\ s &= t + (t - d) + (t - 2d) + \dots + (a + d) + a. \end{aligned}$$

Durch beiderseitige Addition erhält man

$$2s = (a + t) + (a + t) + (a + t) \dots + (a + t) + (a + t)$$

oder

$$2s = n(a + t),$$

demnach ist

$$s = \frac{n}{2}(a + t) = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] = na + \frac{n(n - 1)}{2}d.$$

Das selbe Resultat findet man durch folgende Überlegung: Der mittlere Wert des ersten und des letzten Gliedes ist  $\frac{a + t}{2}$ , der des zweiten und des vorletzten Gliedes ebenfalls  $\frac{a + t}{2}$  u. s. w.,  $\frac{a + t}{2}$  ist also überhaupt das arithmetische Mittel sämtlicher Glieder. Die Summe der Reihe muß demnach  $n \frac{a + t}{2}$  sein.

23) **Übungsaufgaben.** Wie groß ist die Summe der  $n$  ersten Zahlen der gewöhnlichen Zahlenreihe?

$$\left[ s = \frac{n(n+1)}{2}; \text{ z. B. } 1 + 2 + 3 + \dots + 199 = \frac{199 \cdot 200}{2} = 19900. \right]$$

Wie groß ist die Summe der  $n$  ersten ungeraden Zahlen?

$$[s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n \frac{1+(2n-1)}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n^2,$$

also stets eine Quadratzahl, z. B.  $1 + 3 + 5 + \dots + 11 = 36 = 6^2.$ ]

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 101 bis 200?

$$[\text{Gliederzahl } n = 100, \text{ also } s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{100}{2}(101+200) \\ = 50 \cdot 301 = 15\,050.]$$

Wie groß ist die Summe der geraden Zahlen von 102 bis 200? [Gliederzahl  $n = 50$ , also  $s = \frac{50}{2}(102+200) = 25 \cdot 302 = 7550.$ ]

Weitere Übungsaufgaben siehe z. B. in den Sammlungen von Bardey und Heiß.

### b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung.\*)

24) **Aufgabe.** Weise nach, daß jede der folgenden Gleichungen eine identische ist.

$$a) \quad \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1},$$

$$b) \quad \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2},$$

$$c) \quad \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

**Bemerkung.** Fährt man mit der Bildung dieser Gleichungen fort, so lautet die  $m^{\text{te}}$  folgendermaßen:

$$d) \quad \frac{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} - \frac{(x-1)x(x+1) \dots (x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} \\ = \frac{x(x+1)(x+2) \dots (x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}.$$

\*) Dieser Abschnitt kann überschlagen werden, wenn man sich beim Beweise des binomischen Lehrsatzes mit dem Schlusse von  $n$  auf  $(n+1)$  begnügen will.

Diese Gleichung wird als identisch nachgewiesen, indem man links den gemeinschaftlichen Faktor absondert. Dies giebt

$$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)} [(x+m) - (x-1)].$$

Hier ist  $[x+m - (x-1)] = (m+1)$ , was sich gegen den Faktor  $(m+1)$  im Nenner hebt, so daß links dasselbe wie rechts stehen bleibt.

Die rechte Seite jeder dieser Gleichungen ist gleich dem Anfangsgliede auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichung. Das Gesetz ist also leicht in Worten wiederzugeben.

Aus diesen Gleichungen lassen sich gewisse Reihensummierungen ableiten, die als Vorbereitung für den wichtigen binomischen Lehrsatz zu betrachten sind.

25) Setzt man in der identischen Gleichung  $\frac{x(x+1)}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1\cdot 2} = \frac{x}{1}$  für  $x$  der Reihe nach die ganzzahligen Werte  $1, 2, 3, \dots, n$  ein, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} - \frac{0\cdot 1}{1\cdot 2} = 1,$$

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2} - \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} = 2,$$

$$\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} - \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} = 3,$$

⋮

$$\frac{(n-1)n}{1\cdot 2} - \frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2} = n-1,$$

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1\cdot 2} = n.$$

Durch Addition der drei Kolonnen, bei der sich jedoch in je zwei aufeinander folgenden Gleichungen gleiche Glieder entgegengesetzten Vorzeichens wegheben, entsteht folgende bereits bekannte Gleichung

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

26) Verföhrt man ebenso mit den identischen Gleichungen b), c) und d), so erhält man die Formeln:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}. \end{aligned}$$

Und so kann man weiter fortfahren.

27) Vertauscht man in diesen Gleichungen die rechten und linken Seiten, und rechnet man die Anfangsglieder aus, so erhält man, von unten anfangend, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \end{aligned}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \dots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + \frac{n}{1} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \frac{n}{1}.$$

Die Summe jeder dieser Reihen ist gleich dem  $n^{\text{ten}}$  Gliede der vorhergehenden Reihe. Die Differenz je zweier aufeinander folgenden Glieder jeder der Reihen giebt die Glieder der folgenden Reihe, was eine Folge der Identitäten a), b), c) und d) ist.

Man bezeichnet naturgemäß jede dieser Reihen als die erste Differenzenreihe der letzten (d. h. unmittelbar darüber stehenden) Reihe, als die zweite Differenzenreihe der vorletzten, als die dritte Differenzenreihe der drittletzten u. s. w.

Hat die erste Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so nennt man die letztere eine arithmetische Reihe 1<sup>ter</sup> Ordnung. Hat die zweite Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so heißt die letztere eine arithmetische Reihe 2<sup>ter</sup> Ordnung. Ebenso giebt es arithmetische Reihen 3<sup>ter</sup>, 4<sup>ter</sup>, 5<sup>ter</sup> ... Ordnung, bei denen also die 3., 4., 5., ...



### III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

30a) Ableitung mit Hilfe der arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Bildet man der Reihe nach die ganzzahligen Potenzen des zweigliedrigen Ausdrucks (des Binoms)  $a + b$ , so erhält man  $(a + b)^1 = a + b$ ,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$  u. s. w. Jeder dieser Ausdrücke ist nach fallenden Potenzen von  $a$  und nach steigenden Potenzen von  $b$  geordnet, die Zahlenfaktoren aber entsprechen den Horizontalreihen des im vorigen Abschnitt behandelten Zahlendreiecks. Es fragt sich zunächst, ob dies immer der Fall ist.

Multipliziert man beispielsweise die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

beiderseits mit  $a + b$ , so entsteht links  $(a + b)^4$ , rechts aber entstehen die zu addierenden Reihen

$$\begin{array}{r} 1 \cdot a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 \\ + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1 \cdot b^4 \\ \hline \text{also } (a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4. \end{array}$$

War also die Formel für  $(a + b)^3$  nach fallenden und steigenden Potenzen von  $a$  bzw.  $b$  geordnet, so muß notwendig bei  $(a + b)^4$  dasselbe der Fall sein.

Bekümmert man sich ferner bei der Addition nur um die Zahlenfaktoren, so sind folgende Reihen gliederweise zu addieren:

$$\begin{array}{r} 1, 3, 3, 1, \\ \quad 1, 3, 3, 1 \\ \hline 1, 4, 6, 4, 1. \end{array}$$

Statt jede Zahl mit der darunter stehenden zu vereinigen, kann man aber auch je zwei Nachbarzahlen der ersten Reihe summieren.

Die Reihen der Zahlenfaktoren (Binomial-Koeffizienten) in den aufeinander folgenden Formeln werden also ebenso gebildet, wie die Horizontalreihen des Zahlendreiecks.

Die  $n^{\text{te}}$  Reihe desselben war aber

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots,$$

folglich ist auch für jedes ganze positive  $n$

$$1) \quad (a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 + \dots$$

Setzt man  $-b$  statt  $b$  ein, so bleiben die Glieder mit geradzahligem Exponenten von  $b$  ungeändert, die anderen aber nehmen negatives Vorzeichen an. Man erhält also folgende mit abwechselnden Vorzeichen behaftete Reihe:

$$2) \quad (a - b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

Von Wichtigkeit ist der besondere Fall

$$3) \quad (1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots$$

Da  $n$  als ganz und positiv angenommen ist, so bricht jede dieser Reihen mit dem  $(n + 1)^{\text{ten}}$  Gliede ab, denn von dort ab kommt in jedem folgenden Gliede der Faktor  $(n - n) = 0$  vor.

Der vorstehende Beweis gründet sich auf die Eigenschaften gewisser Reihen höherer Ordnung. Ist die Durchnahme der letzteren nicht vorhergegangen, so begnüge man sich mit dem folgenden Beweise.

30b) Ableitung mit Hilfe des Schlusses von  $n$  auf  $n + 1$ .  
Es ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

u. s. w.

Die rechten Seiten dieser Formeln lassen sich, wie die Ausrechnung zeigt, in folgender Form schreiben:

$$a^2 + \frac{2}{1} ab + \frac{2(2-1)}{1 \cdot 2} b^2,$$

$$a^3 + \frac{3}{1} a^2b + \frac{3(3-1)}{1 \cdot 2} ab^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3,$$

$$a^4 + \frac{4}{1} a^3b + \frac{4(4-1)}{1 \cdot 2} a^2b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4,$$

daraus erkennt man die gemeinschaftliche Form

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots,$$

die zunächst für  $n = 2, 3$  und  $4$  als richtig erprobt ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß die beiderseitige Multiplikation mit  $a+b$  auf eine Formel von derselben Gestalt führt. Man erhält nämlich:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n}{1} a^n b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \dots \\ + a^n b + \frac{n}{1} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^3 + \dots,$$

oder, wenn man die gleichnamigen Glieder addiert,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 \\ + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \dots,$$

also, wenn man  $n+1 = v$  setzt:

$$(a+b)^v = a^v + \frac{v}{1} a^{v-1} b + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} a^{v-2} b^2 \\ + \frac{v(v-1)(v-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{v-3} b^3 + \dots,$$

was mit der obigen gemeinschaftlichen Form übereinstimmt.

Gilt also die binomische Formel für irgend ein ganzzahliges  $n$ , so gilt sie auch für die nächste ganze Zahl  $(n+1)$ . Gilt sie also für den Exponenten  $4$ , so gilt sie auch für  $5$ , folglich auch für  $6, 7, 8, 9 \dots$

[Diese Beweismethode nennt man den Schluß von  $n$  auf  $(n+1)$ , ein besonders von dem Mathematiker Kästner angewandtes Verfahren. Es hat den Mangel, die innere Notwendigkeit der gemeinschaftlichen Formel nicht erkennen zu lassen.]

[31] Auf einem höheren Standpunkte wird gezeigt, daß die binomische Reihe

$$1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots,$$

die sich ins Unendliche erstreckt, wenn  $n$  nicht zugleich ganz, positiv und reell ist, im allgemeinen nicht summiert werden kann, daß dies aber doch möglich ist, sobald der absolute Betrag von  $x$  kleiner als 1 ist. Im letzteren Falle ergibt sich als Summe der unendlichen Reihe wiederum der Ausdruck  $(1+x)^n$ . Die Bedingung der Konvergenz (Summierbarkeit) ist also ganz dieselbe, wie bei der geometrischen Reihe  $1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}$ . Feinere Untersuchungen über die Konvergenz überschreiten den Standpunkt der Schule.]

32) **Bemerkung.** Aus

$$(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

was für ganzes positives  $n$  richtig ist, folgt, daß die Summe jeder Horizontalreihe des Zahlendreiecks eine Potenz von 2 ist. Also z. B.

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2^1, & 1+2+1 &= 2^2, & 1+3+3+1 &= 2^3, \\ & & 1+4+6+4+1 &= 2^4. \end{aligned}$$

Dagegen ist

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 0,$$

also ist z. B.

$$\begin{aligned} 1-2+1 &= 0, \\ 1-3+3-1 &= 0, \\ 1-4+6-4+1 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. w. Jede Reihe des Zahlendreiecks giebt also bei abwechselnden Vorzeichen die Summe Null.

33) **Aufgaben.** Wie lautet die Formel für  $(a+b)^n + (a-b)^n$ ? Wie lautet die Formel für  $(a+b)^n - (a-b)^n$ ? Wie lautet die Formel für  $(2x+3y^2)^5$ , für  $(2x-3y^2)^5$ , für  $(2x+3y^2)^5 + (2x-3y^2)^5$ , für  $(2x+3y^2)^5 - (2x-3y^2)^5$ ? Wie heißt das 4<sup>te</sup> Glied der Formel für  $(3x+5y^3)^7$ ?

34) **Bemerkung.** Es ist

$$\left(1 + \frac{3}{10000}\right)^2 = 1 + 0,0006 + 0,00000009 = 1,00060009,$$

also, wenn man mit weniger als 8 Stellen Genauigkeit rechnet,  $1,0003^2 = \sim 1,0006^*$ ). Umgekehrt ist  $\sqrt{1,0006} = \sim 1,0003$ .

Allgemeiner: Ist  $\alpha$  klein im Verhältnis zu 1, so kann man in  $(1 \pm \alpha)^2 = 1 \pm 2\alpha + \alpha^2$  den letzten Posten streichen und erhält  $(1 \pm \alpha)^2 = \sim 1 \pm 2\alpha$ . Umgekehrt ist  $\sqrt{1 \pm 2\alpha} = \sim 1 \pm \alpha$ , also  $\sqrt{1 \pm \alpha} = \sim 1 \pm \frac{\alpha}{2}$ .

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{10000}\right)^3 &= 1 + 0,0006 + 0,00000012 + 0,00000000027 \\ &= 1,000600120027, \end{aligned}$$

also bei Rechnungen mit geringerer Genauigkeit  $(1,0002)^3 = \sim 1,0006$ , und umgekehrt  $\sqrt[3]{1,0006} = \sim 1,0002$ .

Allgemeiner ist es bei kleinem  $\alpha$  gestattet, in der Formel

$$(1 \pm \alpha)^3 = 1 \pm 3\alpha + 3\alpha^2 \pm \alpha^3$$

die beiden letzten Glieder zu streichen, so daß man hat

$$(1 \pm \alpha)^3 = \sim 1 \pm 3\alpha,$$

und umgekehrt:

$$\sqrt[3]{1 \pm 3\alpha} = \sim 1 \pm \alpha \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{1 \pm \alpha} = \sim 1 \pm \frac{\alpha}{3}.$$

[35] Anwendung finden diese abgekürzten Berechnungen vielfach in der Physik und Mechanik. Ist z. B. der lineare Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers bei der Erwärmung um einen Grad Celsius gleich  $\frac{1}{n}$ , so daß seine Länge  $l$  in  $l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  übergeht, so würde der Kubikinhalt des Würfels mit Kante  $l$  aus  $l^3$  übergehen in  $l^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \sim l^3\left(1 + \frac{3}{n}\right)$ . Weil  $\frac{3}{n}$  das Dreifache von  $\frac{1}{n}$  ist, sagt man, der kubische Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers sei das Dreifache vom linearen Ausdehnungskoeffizienten.]

\*)  $\sim$  bedeutet hier „angenähert“ oder „abgerundet“.

#### IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.\*)

36) Setzt man in der identischen Gleichung  $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  für  $x$  der Reihe nach die ganzzahligen Werte  $1, 2, 3, \dots, n$ , so entsteht folgendes System von Gleichungen:

$$0^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1$$

$$1^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1$$

$$2^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1$$

⋮

$$(n - 1)^3 = n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1.$$

Durch Addition der senkrechten Kolonnen erhält man eine neue Gleichung, in der sich alle Glieder 3<sup>ter</sup> Potenz bis auf das einzige  $n^3$  wegheben, so daß stehen bleibt:

$$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n.$$

Demnach ist die Summe der Quadratzahlen von  $1^2$  bis  $n^2$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + (1 + 2 + 3 + \dots + n) - \frac{n}{3} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}, \end{aligned}$$

oder endlich

$$1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Aufgaben.** Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von  $1^2$  bis  $100^2$ ? Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von  $200^2$  bis  $300^2$ ?

37) Macht man dasselbe mit der identischen Gleichung

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

so ist die durch Addition der senkrechten Kolonnen entstehende Gleichung

\*) Dieser Abschnitt ist nur dann durchzunehmen, wenn es wünschenswert erscheint, in der Stereometrie gelegentlich der Simpson- bzw. Summenformel über den dritten Grad hinauszugehen.

$$0 = n^4 - 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n,$$

so daß die Summe der Kubikzahlen von  $1^3$  bis  $n^3$  wird:

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{6}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \frac{4}{4}(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \frac{n}{4} \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{4}, \end{aligned}$$

oder endlich:

$$\begin{aligned} 2) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2. \end{aligned}$$

Die Summe der  $n$  ersten Kubikzahlen ist also stets eine Quadratzahl und zwar das Quadrat von der Summe der  $n$  ersten Zahlen.

**Aufgaben.** Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von  $1^3$  bis  $100^3$ , und das Quadrat von welcher Zahl ist diese Summe? Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von  $200^3$  bis  $300^3$ ?

Bilde in derselben Weise, wie oben, die Formeln für

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 \quad \text{und} \quad 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5.$$

38) **Bemerkung.** Aus

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

folgt nach beiderseitiger Division durch  $n^2$

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Setzt man  $n = \infty$ , so fällt  $\frac{1}{2n}$  weg, und man erhält die Formel:

$$3) \quad \text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Aus } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

folgt nach beiderseitiger Division durch  $n^3$

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Setzt man  $n = \infty$ , so fallen rechts die beiden letzten Glieder weg, und man hat die Formel

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Ebenso ergibt sich für  $n = \infty$

$$4) \quad \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Allgemeiner gilt für ganzes positives  $p$  der Satz:

$$5) \quad \text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

wofür man auch schreiben kann

$$5^*) \quad \text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n} m^p = \frac{1}{p+1}.$$

[Die Formeln dieses Abschnitts finden vielfache Anwendung in der Kurvenlehre, Stereometrie und Mechanik, z. B. bei der Flächenberechnung von Parabeln 2<sup>ter</sup> und höherer Ordnung, bei der Untersuchung der Kreisevolvente, bei der Inhaltsberechnung von Paraboloiden höherer Ordnung, auch bei gewissen Ableitungen der Simpson-Newton'schen Regel und der Summenformel der Stereometrie, bei der Untersuchung schräg abgeschnittener Prismen und Cylinder, bei der Berechnung von Trägheitsmomenten, elastischen Linien und Träger-Abbiegungen, bei hydrostatischen Untersuchungen u. s. w. Es handelt sich dabei um das Umgehen der Integration ganzer rationaler Funktionen. Auf höherem Standpunkte wird bewiesen, daß die Formel auch für gebrochenes  $p$  gilt, nur muß dann  $p > -1$  sein.]

39) Die Reihen  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  oder  $\sum_{m=1}^{m=n} m^2$ ,  
 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  oder  $\sum_{m=1}^{m=n} m^3$ , überhaupt die Reihen  $\sum_{m=1}^{m=n} m^p$

sind arithmetische Reihen 2<sup>ter</sup>, 3<sup>ter</sup>, ...  $p^{\text{ter}}$  Ordnung.

Bei der ersten z. B. folgen auf einander die Glieder

$$n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2, \dots$$

deren Differenzen sind

$$(2n+1), (2n+3), (2n+5), \dots,$$

was eine arithmetische Reihe 1<sup>ter</sup> Ordnung ist, so daß die ursprüngliche 2<sup>ter</sup> Ordnung war.

Bei der folgenden Reihe handelt es sich um

$$n^3, (n+1)^3, (n+2)^3, (n+3)^3, (n+4)^3, \dots$$

also um die Differenzen

$$(3n^2 + 3n + 1), (3n^2 + 9n + 7), (3n^2 + 15n + 19), \\ (3n^2 + 21n + 37), \dots$$

Dazu sind die Differenzen

$$(6n + 6), (6n + 12), (6n + 18), \dots$$

Letzteres ist eine arithmetische Reihe 1<sup>ter</sup> Ordnung, die ursprüngliche also von der dritten Ordnung. So kann man fortfahren.

40) Dasselbe ergibt sich in zwingender Weise bei folgender Ableitung der Reihen  $\sum m^p$ , die unabhängig vom binomischen Lehrsatz ist.

Aus der in Abschnitt 25 behandelten Identität  $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}$   
 $= \frac{x}{1}$  folgt  $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x = \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}$  oder  $\frac{2x(x+1)}{1 \cdot 2} - 2x$   
 $= x^2 - x$ , so daß auch folgende Identität gilt:

$$x^2 = 2 \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x.$$

Setzt man für  $x$  der Reihe nach die Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$ , und addiert man die Kolonnen der unter einander geschriebenen Zahlengleichungen, so erhält man

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ = 2 \left[ \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \right] - [1 + 2 + 3 + \dots + n] \\ = 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rechts steht ursprünglich die Differenz zweier arithmetischer Reihen, von denen die eine 2<sup>ter</sup>, die andere 1<sup>ter</sup> Ordnung ist.

Eine sehr einfache Betrachtung zeigt nun, daß die Summe oder Differenz zweier arithmetischer Reihen höherer Ordnung stets wieder eine solche Reihe ist, deren Ordnung im allgemeinen mit der Reihe von der höheren Ordnung übereinstimmt. Folglich steht hier rechts, wie auch links eine arithmetische Reihe 2<sup>ter</sup> Ordnung.

In ähnlicher Weise folgt aus der gleichfalls unter 24) behandelten Identität

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}.$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x^3 - x}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

und daraus ergibt sich die Identität

$$x^3 = 6 \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} + x.$$

Setzt man wiederum für  $x$  die Werte  $1, 2, 3, \dots, n$  und addiert, so entsteht

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$= 6 \left[ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right]$$

$$- 6 \left[ \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \right] + [1 + 2 + 3 + \dots + n]$$

$$= 6 \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 6 \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$= \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Auf der rechten Seite handelt es sich um Vereinigung dreier arithmetischer Reihen, von denen die höchste von der dritten Ordnung ist. Also ist auch die Reihe der Kubikzahlen eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß  $1^p + 2^p + \dots + n^p$  für ganzes positives  $p$  eine arithmetische Reihe  $p^{\text{ter}}$  Ordnung ist.

## V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen.\*)

41) Nach dem binomischen Satze ist für ganzes positives  $n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots$$

\*) Dieser Abschnitt kann auf dem Gymnasium überschlagen werden, obwohl pädagogische Schwierigkeiten seine Durchnahme nicht hindern. Er giebt der elementaren Lehre von den Logarithmen eine vorläufige Abrundung. Der binomische Lehrsatz wird dabei als nur für ganze positive Exponenten bewiesen vorausgesetzt.

So ist z. B.

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 2,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4},$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}.$$

Je größer man  $n$  nimmt, um so größer wird der Wert von  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ; daß er aber nicht über einen gewissen Wert hinaus wächst, ergibt sich, wenn man  $n$  unendlich groß werden läßt. Die ursprüngliche Reihe läßt sich nämlich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \end{aligned}$$

Ist nun  $n$  unendlich groß, so darf man in den einzelnen Gliedern die Ausdrücke  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$  u. s. w. gleich Null setzen, vorausgesetzt, daß es sich nicht um unendlich viele Faktoren dieser Art handelt. (Denn unendlich viele unendlich kleine Größen können unter Umständen sehr großen Einfluß haben.) Demnach erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots,$$

oder, wenn man das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$  mit dem Zeichen  $m!$  bezeichnet:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Da die beiden ersten Glieder die Summe 2 geben, so ist die Summe der Reihe größer als 2. Jedes Glied dieser Reihe ist vom 4<sup>ten</sup> ab kleiner, als das entsprechende Glied der geometrischen Reihe

$$1 + \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right] = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

folglich kann die Summe der untersuchten Reihe nicht größer sein, als 3, sie muß zwischen 2 und 3 liegen. Man kann die Summe zwischen weit engere Grenzen einschnüren. So geben z. B. die vier ersten Glieder die Summe 2,66666...; der Rest ist aber kleiner, als die Summe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} + \frac{1}{24 \cdot 4} + \frac{1}{24 \cdot 4^2} + \frac{1}{24 \cdot 4^3} + \dots \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{18} = 0,05555 \dots \end{aligned}$$

Demnach liegt die Summe zwischen  $2,6666 \dots$  und  $2,72222 \dots$ . Geht man weit genug, so ergibt sich als Grenzwert die Zahl  $2,7182818 \dots$ , die man mit  $e$  bezeichnet. Es ist also

$$\text{für } n = \infty \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818 \dots$$

(Auf der linken Seite dieser Gleichung würde es nicht erlaubt gewesen sein,  $\frac{1}{n} = 0$  zu setzen, weil die Anzahl der Faktoren  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  unendlich groß ist. Es handelt sich also durchaus nicht um  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots = 1$ , sondern um etwas ganz anderes.)

42) **Aufgabe.** Den Ausdruck  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  für unendlich großes, ganz und positiv zu denkendes  $n$  zu berechnen.

**Auflösung.** Man erhält zunächst auf demselben Wege wie vorher für  $n = \infty$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Auch diese Reihe muß für jedes endliche  $x$  eine endliche Summe haben. Ist z. B.  $x = 4$ , so ist das 5<sup>te</sup> Glied  $\frac{4^5}{4!}$ , und sondert man dieses von sämtlichen rechts vom 4<sup>ten</sup> stehenden Gliedern ab, so hat man als Rest der Reihe

$$\frac{4^4}{4!} \left[ 1 + \frac{4}{5} + \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right].$$

Dabei ist jedes Glied der Klammer (vom ersten abgesehen) kleiner als das entsprechende der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{4}{5} + \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 5,$$

also ist jener Rest der Reihe kleiner als  $\frac{4^4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ . Es handelt sich also um eine konvergente Reihe.

Nun ist für ganzes, positives, unendlich großes  $m$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e,$$

setzt man also für  $m$  die positive, unendlich große Zahl  $\frac{n}{x}$ , die man sich als ganz denken kann [weil man zur unendlich großen Zahl  $n$

eine beliebig große endliche Zahl hinzuaddieren kann, ohne daß sich etwas ändert], so hat man

$$\text{für } n = \infty \quad \left[ 1 + \frac{1}{\binom{n}{x}} \right]^x = e, \quad \text{oder} \quad \left[ 1 + \frac{x}{n} \right]^{\frac{n}{x}} = e.$$

Erhebt man rechts und links zur  $x^{\text{ten}}$  Potenz, so folgt

$$\text{für } n = \infty \quad \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

eine Formel, die für jedes beliebige  $x$  gilt. Da aber  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  ist, so reicht die Berechnung für positives  $x$  vorläufig aus.

43) **Aufgabe.** Die 10<sup>te</sup> Wurzel aus  $e$  zu berechnen.

**Auflösung.** Es ist

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Durch Addition der in Dezimalbrüche verwandelten Glieder

$$\begin{array}{r} 1,000\ 0000\ 000 \\ 0,100\ 0000\ 000 \\ 0,005\ 0000\ 000 \\ 0,000\ 1666\ 666\ \dots \\ 0,000\ 0041\ 666\ \dots \\ 0,000\ 0000\ 833\ \dots \end{array}$$

$$\text{erhält man } \sqrt[10]{e} = 1,105\ 1709\ \dots$$

mit einer Genauigkeit auf 8 Stellen.

Je größer der Wurzelexponent ist, um so leichter läßt sich  $\sqrt[n]{e}$  auf zahlreiche Stellen berechnen. Man berechne z. B.  $\sqrt[100]{e}$  auf 20 Stellen.

44) Während man aus anderen Zahlen (von 1 abgesehen) nur die 2<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup>, 6<sup>ten</sup> . . . Wurzeln ausziehen kann, aber auf das Ausziehen der 5<sup>ten</sup>, 7<sup>ten</sup>, . . . Wurzeln verzichten muß, hat man in  $e$  eine Zahl gefunden, aus der sich jede beliebige Wurzel mit Hilfe der obigen Reihe bilden läßt, oder die man in beliebiger Weise potenzieren kann. Deshalb eignet sie sich außerordentlich gut zur Basis eines Logarithmensystems, welches man als das natürliche bezeichnet hat.

Ist  $e^a = a$ , so nennt man  $a$  den natürlichen Logarithmus

von  $a$ , geschrieben:  $\alpha = {}^e\lg a$ . (So war z. B. vorher berechnet  $e^{\frac{1}{10}} = 1,105\,1709 \dots$ , folglich ist  $0,1 = {}^e\lg 1,105\,1709$ .)

Diese Logarithmen haben dieselben Grundeigenschaften, wie die früher behandelten (vergl. Teil I, Nr. 109).

Ist  $\alpha = {}^e\lg a$ , so folgt  $e^\alpha = a$ ,  
ist  $\beta = {}^e\lg b$ , so folgt  $e^\beta = b$ .

Sind beide Bedingungen erfüllt, so folgt durch beiderseitige Multiplikation der abgeleiteten Gleichungen  $e^\alpha \cdot e^\beta = ab$ , oder  $e^{\alpha + \beta} = ab$ , so daß  $\alpha + \beta = {}^e\lg(ab)$  oder  ${}^e\lg a + {}^e\lg b = {}^e\lg(ab)$  ist.

Es gelten also, wie früher, die Gleichungen

$${}^e\lg(ab) = {}^e\lg a + {}^e\lg b,$$

$${}^e\lg\left(\frac{a}{b}\right) = {}^e\lg a - {}^e\lg b,$$

$${}^e\lg(a^n) = n({}^e\lg a),$$

$${}^e\lg\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}({}^e\lg a).$$

45a) Der Zusammenhang der natürlichen Logarithmen mit den gemeinen (Briggischen) Logarithmen ergibt sich folgendermaßen. Es sei

$$\alpha = {}^e\lg a, \text{ also } e^\alpha = a.$$

Logarithmiert man beide Seiten der letzten Gleichung unter Annahme der logarithmischen Basis 10, so hat man

$${}^{10}\lg(e^\alpha) = {}^{10}\lg a, \text{ oder } \alpha({}^{10}\lg e) = {}^{10}\lg a, \text{ oder } {}^e\lg a \cdot ({}^{10}\lg e) = {}^{10}\lg a.$$

Folglich ist

$${}^e\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{{}^{10}\lg e},$$

oder wenn man  ${}^{10}\lg e$  mit  $m$  bezeichnet (Modul der Briggischen oder gemeinen Logarithmen),

$${}^e\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{m}, \text{ und } {}^{10}\lg a = m \cdot ({}^e\lg a).$$

Aus  $m = {}^{10}\lg e$  folgt  $10^m = e$ , also  $e^{\frac{1}{m}} = 10$ , d. h.  $\frac{1}{m} = {}^e\lg 10$ .

Es ist also zugleich

$$m = {}^{10}\lg e = \frac{1}{{}^e\lg 10}.$$

Demnach kann  $m$  sowohl mit Hilfe der Briggschen, als auch mit Hilfe der natürlichen Logarithmen berechnet werden.

Die Berechnung ergibt  $m = 0,434\ 294\ 5$ . (Vergl. z. B. die Berechnungsmethode Teil I, Nr. 108.)

Zur Ableitung der natürlichen Logarithmen aus der Tabelle der künstlichen benutzt man die Formel

$${}^e\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{{}^{10}\lg e} = \frac{{}^{10}\lg a}{m};$$

zur Ableitung der Briggschen Logarithmen aus der Tabelle der natürlichen benutzt man die Formel

$${}^{10}\lg a = \frac{{}^e\lg a}{{}^e\lg 10} = m({}^e\lg a).$$

Die Wissenschaft hat den letzteren Weg eingeschlagen, da  $e$  die am leichtesten zu potenzierende Basis ist, sobald es sich um gebrochene Exponenten handelt. Allerdings hat man aus der Exponentialreihe andere Reihen abgeleitet, mit deren Hilfe die logarithmischen Tabellen bequemer angefertigt werden konnten.

45 b) **Aufgabe.** Eine Reihe für  $10^\alpha$  zu bilden.

**Auflösung.** Aus  ${}^{10}\lg a = m {}^e\lg a = \alpha$  folgt  $\frac{\alpha}{m} = {}^e\lg a$  oder  $a = e^{\frac{\alpha}{m}}$ . Zugleich ist  $a = 10^\alpha$ , folglich

$$10^\alpha = e^{\frac{\alpha}{m}} = 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^3}{3!} + \dots$$

46) Zu den geometrisch interessanten Anwendungen der Formel  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  gehört die Flächenberechnung der gleichseitigen und anderer Hyperbeln. Auch in der Mechanik findet vielfache Anwendung der Gleichung statt. Von Interesse ist noch folgende Aufgabe der Zinseszinsrechnung.

**Aufgabe.** In welcher Weise vermehrt sich ein Kapital, wenn die Zinsen in jedem Momente zum Kapital geschlagen werden?

**Auflösung.** Bei jährlich einmaligem Zinszuschlag verwandelt sich das Kapital 1 in einem Jahre in  $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)$ , in  $n$  Jahren in  $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$ .

Bei  $m$ -maligem Zinszuschlage während jedes Jahres geht es über in  $(1 + \frac{\%}{100m})^m$  beziehungsweise  $(1 + \frac{\%}{100m})^{mn}$ .

Ist nun  $m$  unendlich groß, so handelt es sich um

$$(1 + \frac{0,01\%}{m})^m = e^{0,01\%} \quad \text{bzw.} \quad (1 + \frac{0,01\%}{m})^{mn} = e^{n \cdot 0,01\%}.$$

Das Kapital  $c$  geht also nach  $n$  Jahren bei einem in jedem Momente erfolgenden Zinszuschlage über in

$$k = c \cdot e^{n \cdot 0,01\%}.$$

Handelt es sich z. B. um 5%, so ist der Vermehrungsfaktor statt  $(1 + \frac{5}{100})$  jetzt  $e^{\frac{5}{100}} = e^{0,05}$ . Man berechne  $\frac{1}{20} \lg e = \frac{1}{20} 0,434 294 5 = 0,021 714 7$ . Der Numerus davon ist 1,051271. Hier wird also das Kapital nach  $n$  Jahren sein  $k = c \cdot 1,051271^n$ . Hierbei braucht  $n$  keine ganze Zahl zu sein, sondern jede beliebige positive reelle Zahl kann eingesetzt werden. Während also bei einfachem Zinszuschlag die Berechnung der Anzahl der Jahre auf ungenaue Resultate führte, sobald nicht eine ganze Zahl herauskam, sodaß über den Überschuß besondere Vereinbarung getroffen werden mußte, ist das Resultat hier in jedem Falle absolut genau. — Der ununterbrochene Zinszuschlag könnte etwa mit dem Wachstum eines regelmäßig zunehmenden Waldes verglichen werden.

## VI. Der Moivre'sche Lehrsatz und einige aus ihm abgeleitete Reihen.

47) Im ersten Teile, Abschnitt 101, war  $i = +\sqrt{-1}$  gesetzt, also  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$ ,  $i^5 = i$  u. s. w. Man merke auch  $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ .

In Folgendem werden mehrfach komplexe Größen  $a + bi$  und  $a_1 + b_1 i$  gleichzusetzen sein. Sind sie gleich, so muß  $a = a_1$  und  $b = b_1$  sein, denn aus  $a + bi = a_1 + b_1 i$  folgt  $(a - a_1) = i(b_1 - b)$ . Wenn also nicht  $a = a_1$  und zugleich  $b = b_1$  wäre, so würde die reelle Zahl links gleich der imaginären Zahl rechts sein, was unmöglich ist. Stimmen also komplexe Zahlen überein, so stimmen sowohl ihre reellen Teile, als auch ihre imaginären Teile für sich überein.

48) Auf Grund bekannter goniometrischer Formeln ist

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} & [\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)] (\cos \gamma + i \sin \gamma) \\ &= \cos (\alpha + \beta + \gamma) + i \sin (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Daher gilt für beliebig viele Faktoren dieser Art der Satz

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \gamma + i \sin \gamma) \cdots \\ &= \cos (\alpha + \beta + \gamma + \cdots) + i \sin (\alpha + \beta + \gamma + \cdots). \end{aligned}$$

Setzt man hier  $\alpha = \beta = \gamma \cdots$ , so folgt zunächst für ganzes positives  $n$  die Formel

$$\text{b)} \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Daraus folgt

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \sqrt[n]{\cos n\alpha + i \sin n\alpha},$$

also, wenn  $n\alpha = \beta$  und daher  $\alpha = \frac{\beta}{n}$  gesetzt wird,

$$\cos \frac{\beta}{n} + i \sin \frac{\beta}{n} = \sqrt[n]{\cos \beta + i \sin \beta}.$$

Schreibt man wieder  $\alpha$  statt  $\beta$ , so hat man die Gleichung

$$\text{c)} \quad \sqrt[n]{\cos \alpha + i \sin \alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n}.$$

Damit ist aber nur einer der Wurzelwerte gefunden. Später wird gezeigt, daß es im Ganzen  $n$  Wurzeln giebt.

$$\text{d)} \quad (\cos m\alpha + i \sin m\alpha)^{\frac{1}{n}} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{m}{n}} = \left( \cos \frac{m\alpha}{n} + i \sin \frac{m\alpha}{n} \right).$$

Die Formel b) gilt also auch für gebrochene Exponenten.

Nach a) ist

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)) = \cos (\alpha - \alpha) + i \sin (\alpha - \alpha) \\ &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Da  $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$  ist, so folgt

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \alpha - i \sin \alpha) = 1,$$

oder

$$e) \quad \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha,$$

oder auch

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-1} = \cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha).$$

Daraus folgt

$$f) \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n} = [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)]^n \\ = \cos (-n\alpha) + i \sin (-n\alpha).$$

Demnach gilt der sogenannte Moivre'sche Satz

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

auch für negative und gebrochene Exponenten.

Sowohl die Formel a) als auch die Formel b) erinnern an die Eigenschaften der Potenzen. Bei a) wurde links multipliziert, dagegen hatte man rechts Addition, ganz ebenso, wie in der Formel  $e^\alpha e^\beta e^\gamma = e^{\alpha+\beta+\gamma}$ . Bei b) wird links potenziert, rechts multipliziert, ähnlich wie in der Formel  $(e^\alpha)^n = e^{n\alpha}$ . Bei c) wird links radiciert, rechts dividiert, ganz wie bei  $\sqrt[n]{e^\alpha} = e^{\frac{\alpha}{n}}$ .

49) Für ganzes positives  $n$  war der binomische Lehrsatz bewiesen, für solches ist also

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \\ = \cos^n \alpha + \frac{n}{1} \cos^{n-1} \alpha i \sin \alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \alpha i^2 \sin^2 \alpha + \dots,$$

oder

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos^n \alpha + i \frac{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ - i \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots$$

Zugleich ist

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Die rechten Seiten müssen übereinstimmen, also sind sowohl die reellen, als auch die imaginären Teile einander gleich.

Daraus ergibt sich für ganzes, positives  $n$

$$g) \quad \cos n\alpha = \cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots,$$

$$h) \sin n\alpha = \frac{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

**Aufgabe.** Bilde hieraus Formeln für  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha \dots$ , für  $\sin 3\alpha$ ,  $\sin 4\alpha$ ,  $\sin 5\alpha, \dots$

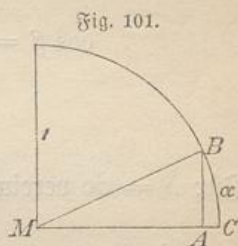
50).\*) In Fig. 101 ist  $AB = \sin \alpha$ . Je kleiner der Bogen  $\alpha$  ist, um so mehr wird  $\overline{AB} = \widehat{CB}$ , d. h. bei unendlich kleinem  $\alpha$  kann man  $\alpha$  und  $\sin \alpha$  mit einander vertauschen, ebenso  $\alpha^2$  und  $\sin^2 \alpha$ ,  $\alpha^3$  und  $\sin^3 \alpha$ . Nur bei unendlich großem Exponenten würde Vorsicht nötig sein.

Ferner ist

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = (1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$\cos^n \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{n}{2}}.$$



Ist nun  $n$  unendlich groß, so kann man es als gerade Zahl annehmen, so daß auch  $\frac{n}{2}$  als ganz und unendlich groß betrachtet werden kann. Dann gilt für uns die binomische Formel, d. h.

$$\cos^n \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{n}{2}} \\ = 1 - \frac{n}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \sin^4 \alpha - \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^6 \alpha + \dots$$

und ebenso

$$\cos^n \frac{\beta}{n} = 1 - \frac{n}{2} \sin^2 \frac{\beta}{n} + \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \sin^4 \frac{\beta}{n} \\ - \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^6 \frac{\beta}{n} + \dots,$$

folglich, da  $n = \infty$  ist, also der Bogen für den Sinus gesetzt werden darf,

$$\cos^n \frac{\beta}{n} = 1 - \frac{n}{2} \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \frac{\beta^4}{n^4} - \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\beta^6}{n^6} + \dots \\ = 1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{n} + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right)}{1 \cdot 2} \frac{\beta^4}{n^2} - \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{n} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\beta^6}{n^3} + \dots$$

\*) Abschnitt 50 bis 52 können auf dem Gymnasium überschlagen werden. Die Ausführlichkeit der Darstellung ist eine absichtliche.

Diese Reihe konvergiert für großes  $n$  und kleines  $\frac{\beta}{n}$  sehr schnell. Wird aber  $n = \infty$  gesetzt, so fallen rechts alle Glieder mit Ausnahme des ersten weg, und man hat die durchaus nicht selbstverständliche Formel:

$$\text{Für } n = \infty \text{ ist } \cos^n \frac{\beta}{n} = 1.$$

51) Nach diesen Vorbereitungen setze man in Formel 49 g)  $\beta$  für  $n\alpha$ , also  $\frac{\beta}{n}$  für  $\alpha$ , so daß sie in folgende übergeht:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos^n \frac{\beta}{n} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \frac{\beta}{n} \sin^2 \frac{\beta}{n} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} \frac{\beta}{n} \sin^4 \frac{\beta}{n} - \dots \end{aligned}$$

Für  $n = \infty$  vereinfacht sich diese Formel ganz außerordentlich, da dann  $\cos^n \frac{\beta}{n} = 1$  ist, ebenso  $\cos^{n-2} \frac{\beta}{n} = \frac{\cos^n \frac{\beta}{n}}{\cos^2 \frac{\beta}{n}} = \frac{1}{1} = 1$ , ebenso  $\cos^{n-3} \frac{\beta}{n} = 1$ , und da ferner für jeden Sinus der Bogen gesetzt werden darf. Man erhält

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\beta^4}{n^4} \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{\beta^6}{n^6} + \dots \\ &= 1 - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} \beta^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^4 \\ &- \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{4}{n}\right) \left(1 - \frac{5}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \beta^6 + \dots, \end{aligned}$$

oder endlich, da man die Größen  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$  u. s. w. streichen kann, und wenn man wieder  $\alpha$  statt  $\beta$  schreibt:

$$\text{i) } \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \dots$$

Ganz ebenso leitet man aus der Formel h) ab die Formel

$$\text{k) } \sin \alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \dots$$

Diese Reihen konvergieren um so schneller, je kleiner  $\alpha$  ist, können also dann zur Berechnung der Funktionen benutzt werden. (Man achte auch darauf, daß die Cosinusreihe nur gerade Exponenten, die Sinusreihe aber nur ungerade zeigt. Dies stimmt damit zusammen, daß  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  und  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  ist.

**Aufgabe.** Berechne den Sinus und Cosinus eines Bogens von der Länge  $\frac{1}{10}$  am Kreise mit Radius 1 unter Benutzung der 5 ersten Glieder der Reihen.

52) Aus i) und k) folgt

$$\begin{aligned}\cos \alpha + i \sin \alpha &= 1 + \frac{i\alpha}{1!} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \dots \\ &= 1 + \frac{i\alpha}{1!} + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \frac{(i\alpha)^5}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Zugleich ist nach der Formel für  $(1 + \frac{x}{n})^n$  bei ganzem, positivem, unendlich großem  $n$

$$\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = 1 + \frac{i\alpha}{1!} + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \dots$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, stimmen auch die linken überein, und man hat

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

Die gelegentlich des Moivre'schen Satzes besprochenen Potenzeigenschaften des Ausdruckes  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  erscheinen jetzt als ganz selbstverständlich, denn er ist eine einfache Potenz von  $e$ . Da

$$\frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

ist, so folgt auch

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}.$$

Es gilt also folgendes System von Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}, \\ \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}, \\ \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \\ \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \end{cases}$$

Die beiden letzten folgen aus den beiden ersten durch Addition bzw. Subtraktion. Durch Division folgt aus den beiden ersten noch

$$e^{2i\alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

also, wenn auf der rechten Seite oben und unten durch  $\cos \alpha$  dividiert wird,

$$m) \quad e^{2i\alpha} = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$$

Da  $\tan \frac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = 1$  ist, so folgt hieraus

$$e^{2i \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = i.$$

Es ist also

$$n) \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i \quad \text{und} \quad \pi = \frac{2}{i} \lg i.$$

Daraus folgt noch  $\lg i = \frac{\pi i}{2}$ , also

$$\lg(i^2) = 2 \lg i = \pi i,$$

oder endlich

$$o) \quad \lg(-1) = \pi i,$$

was sich auch aus

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{\pi i}$$

ergiebt. Demnach ist allgemein

$$\lg(-a) = \lg a + \lg(-1) = \lg a + \pi i,$$

womit die Angelegenheit der Logarithmen negativer Zahlen erledigt ist.\*) Man kann von hier aus noch zur Entwicklung der Logarithmen in Reihen übergehen. Dies soll aber für eine höhere Stufe verspart werden.

\*) Mit Hilfe der Formel  $e^{\pi i} = -1$  hat Prof. Lindemann im Jahre 1882 bewiesen, daß  $\pi$  eine transcendente Irrationalzahl ist, also nicht aus der Strecke 1 mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

## VII. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der $n^{\text{ten}}$ Wurzeln aus der Einheit und aus anderen Zahlen.\*)

53) In Teil I (Abschnitt 75) war gezeigt, wie man die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen auf einer Geraden darstellen kann. Später wurde gezeigt, wie auch die Werte der gebrochenen Zahlen zur Anschauung gebracht werden können, endlich wurde darauf hingewiesen, daß durch die Einführung der irrationalen Zahlen die Gerade stetig mit Zahlenwerten bedeckt werden kann. In Abschnitt 101 wurde darauf hingedeutet, daß für die imaginären und komplexen Zahlen auf der Geraden kein Raum mehr übrig ist, daß man also zu ihrer Darstellung die zweite Dimension zu Hilfe nehmen muß. Man hat also versucht, die komplexen Zahlen in der Ebene zur Darstellung zu bringen.

Die Argand-Gaußsche Darstellung beruht auf Folgendem:

Jede komplexe Zahl  $x + yi$  läßt sich in der sogenannten reduzierten Form  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  darstellen. Setzt man nämlich beide Ausdrücke gleich, so müssen die reellen und die imaginären Teile beider übereinstimmen, so daß

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi$$

ist. Durch Quadrieren und Addieren erhält man

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2,$$

durch Division entsteht  $\frac{y}{x} = \tan \varphi$ , also  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$  (lies arcus tangens  $\frac{y}{x}$ , was den Bogen bedeuten soll, dessen Tangente gleich  $\frac{y}{x}$  ist).

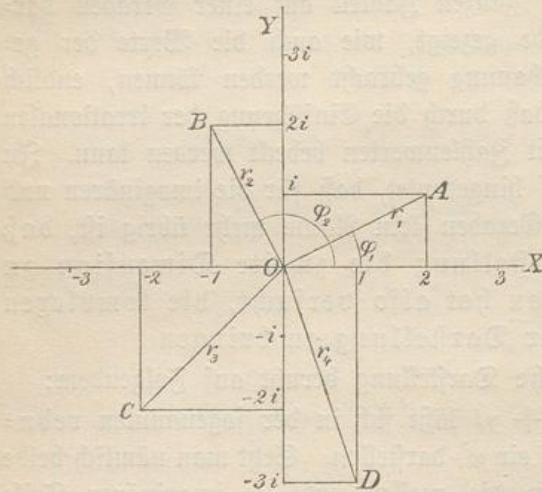
Man bezeichnet  $r$  als den absoluten Betrag der komplexen Zahl,  $\varphi$  als die Abweichung, die Größe  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  kann

\*) Es empfiehlt sich nicht, den Abschnitt VII für das Gymnasium grundsätzlich zu streichen. Die Lehre von den  $n$  Werten der  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln und den  $n$  Lösungen der Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades bleibt ohne die hier gegebenen Veranschaulichungen ein abstraktes und schwer zu verstehendes Gebiet. In dem Umstande, daß die  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln aus jeder Zahl mit den Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks zusammenfallen, liegt eine nicht nur Interesse erweckende, sondern auch bequem zu verwendende Handhabe. Die vier ersten Kapitel in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ (Leipzig, B. G. Teubner) geben weiteres Übungsmaterial nebst physikalischen und kartographischen Anwendungen.

man, wie sich sofort zeigen wird, zweckmäßig als ihren Richtungskoeffizienten bezeichnen.

Das Gesagte stimmt derartig mit den Anfangsgründen der Koordinatenlehre überein, daß es nahe liegt, die reellen Zahlen  $x$

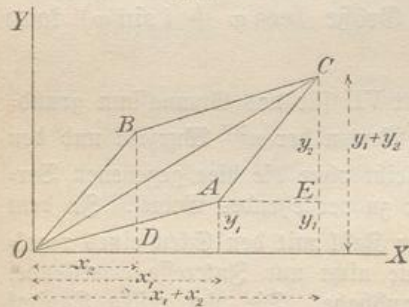
Fig. 102.



auf der Horizontalachse (reellen Achse) des Koordinatensystems, die rein imaginären Zahlen  $yi$  auf der senkrechten (imaginären Achse) darzustellen, jede komplexe Zahl  $x + yi$  aber durch den Punkt, dessen Koordinaten  $x$  und  $y$  sind. So ist in Figur 102 die senkrechte Achse in ebensolche Teile eingeteilt, wie die Horizontale, denn es ist  $i = 1 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ , so daß der absolute Betrag

von  $i$  als 1 anzusehen ist. Die Zahl  $2 + i$  wird durch den Punkt  $A$ , die Zahl  $-1 + 2i$  durch  $B$ , die Zahl  $-2 - 2i$  durch  $C$ , die Zahl  $1 - 3i$  durch  $D$  dargestellt. Zugleich ist für  $A$ , den obigen Formeln entsprechend,  $r_1 = \sqrt{2^2 + 1^2}$ ,  $\tan \varphi_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_1 \cos \varphi_1 = 2$ ,  $r_1 \sin \varphi_1 = 1$ . Faßt man nun  $OA$  als Strecke auf, das heißt als Gerade von der Länge  $r_1$  und der Richtung  $\varphi_1$ , so kann man auch sagen, die Zahl  $2 + i$  werde durch die Strecke  $OA$  dargestellt. Ähnliche Betrachtungen lassen sich für die Punkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  anstellen. Der Winkel  $\varphi$

Fig. 103.



wird, wie in der Koordinatenlehre (analytischen Geometrie), stets von der positiven reellen Achse  $OX$  aus gemessen. Jeder möglichen komplexen Zahl entspricht jetzt ein Punkt der Ebene.

54) Die Addition komplexer Zahlen  $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$  giebt das Resultat  $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$ . Ist also in Fig. 103

$x = x_1 + x_2$  und  $y = y_1 + y_2$ , so stellt der Punkt  $C$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  die Summe der durch  $A$  und  $B$  vertretenen

Zahlen dar. Dabei ist aber  $AE = OD = x_2$  und  $EC = DB = y_2$ , also  $AC \parallel OB$ , d. h.  $OACB$  ist ein Parallelogramm. Da nun die Summe  $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$  auch durch die Strecke  $OC$  dargestellt wird, so erkennt man, daß die Summe zweier komplexer Zahlen durch die Diagonale ihres Parallelogramms veranschaulicht wird. Mit anderen Worten: Die Addition der Strecken geschieht ebenso, wie die Addition der Kräfte in der Mechanik (Parallelogramm der Kräfte), oder: Man findet die Summe zweier Strecken, indem man sie hintereinander zeichnet. So ist z. B.  $OA + OB = OA + AC = OB + BC = OC$ . (Ist nur die Länge der Strecke  $OA$  gemeint, so deutet man dies zweckmäßig durch  $\overline{OA}$  an.)

55) Ebenso ist  $OC - OA = OC - BC = OC + CB = OB$  und  $OC - OB = OC - AC = OC + CA = OA$ . Demnach geschieht auch die Subtraktion der Strecken ebenso, wie in der Mechanik die Subtraktion der Kräfte. Dabei ist

$$x + yi - (x_1 + y_1i) = (x - x_1) + (y - y_1)i = x_2 + y_2i,$$

und ebenso

$$x + yi - (x_2 + y_2i) = (x - x_2) + (y - y_2)i = x_1 + y_1i.$$

Man subtrahiert eine Strecke von einer anderen, indem man die entgegengesetzte (oder negative) Strecke zur letzteren addiert.

56) Sollen komplexe Größen mit einander multipliziert werden, so betrachte man statt des Ausdrucks

$$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_2y_1 + x_1y_2)i$$

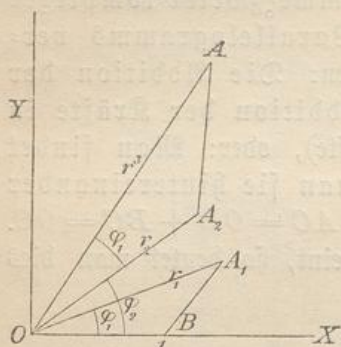
besser den in der reduzierten Form dargestellten

$$\begin{aligned} & r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

wo  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  und  $r = r_1 r_2$  ist. Man erkennt sofort Folgendes: Der neue absolute Betrag  $r = r_1 r_2$  wird konstruiert mit Hilfe der Proportion  $1 : r_1 = r_2 : r$ , womit gesagt ist, daß  $r$  aus  $r_2$  ebenso entsteht, wie  $r_1$  aus 1; die neue Abweichung  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  dagegen ist die Summe der beiden gegebenen Abweichungen.

Dies kommt geometrisch auf Folgendes hinaus. Sollen die Strecken  $OA_1$  und  $OA_2$  mit einander multipliziert werden, so verbinde man 1 mit  $A_1$ , was das Dreieck  $OBA_1$  giebt. Macht man nun  $\triangle OA_2A \sim \triangle OBA_1$ , so ist  $1 : r_1 = r_2 : r$ , also  $r = r_1 r_2$ , und  $\sphericalangle BOA = \varphi = \varphi_2 + \varphi_1$ .

Fig. 104.



Man merke also: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen mit einander werden die absoluten Beträge mit einander multipliziert, die Abweichungen dagegen zu einander addiert.

Wird demnach eine komplexe Zahl mit einer reellen multipliziert, so wird nur der absolute Betrag, nicht aber die Richtung beeinflusst. Wird dagegen eine komplexe Zahl nur mit einem Ausdruck  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  multipliziert, so wird nicht der absolute Betrag, sondern nur die Richtung geändert. Der Name Richtungskoeffizient ist also sehr bezeichnend.

57) Auch bei der Division benutzt man die reducierten Formen, denn dabei ist

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r}{r_2} [\cos(\varphi - \varphi_2) + i \sin(\varphi - \varphi_2)] \\ = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

wo  $r_1 = \frac{r}{r_2}$  und  $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2$  ist. Also: Bei der Division einer komplexen Zahl durch eine andere wird der absolute Betrag der ersteren durch den der letzteren dividiert, von der Abweichung der ersteren aber wird die der anderen abgezogen.

Soll also die Strecke  $OA$  durch die Strecke  $OA_2$  dividiert werden, so bildet man das Dreieck  $OAA_2$  und zeichnet über  $OB = 1$  das ähnliche Dreieck  $OBA_1$ . Dann ist  $OA_1$  die gesuchte Strecke, denn es ist  $1 : r_1 = r_2 : r$ , also  $r_1 = \frac{r}{r_2}$ , und zugleich ist  $\varphi_1 = (\varphi - \varphi_2)$ .

58) Bei der Potenzierung mit ganzen positiven Exponenten handelt es sich um lauter gleiche Faktoren. Bildet man

von  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  zuerst die 2<sup>te</sup>, dann die 3<sup>te</sup>, 4<sup>te</sup> u. s. w. Potenz, so sind die neuen absoluten Beträge  $r^2, r^3, r^4 \dots$ , die neuen Abweichungen  $2\varphi, 3\varphi, 4\varphi$  u. s. w. Dem wird genügt, wenn man wie in Fig. 105 an das Dreieck  $OBA$  das ähnliche  $OA_1A_2$ , an dieses das ähnliche  $OA_1A_2$  u. s. w. anlegt.

Setzt man die Dreiecksreihe nach rückwärts fort, so erhält man erst

$$\begin{aligned} OC &= \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] \\ &= r^{-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-1}, \end{aligned}$$

dann  $r^{-2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-2}$  u. s. w., so daß auch das Potenzieren mit negativen ganzen Exponenten geometrisch veranschaulicht ist.

Ist  $r = 1$ , handelt es sich also nur um die Potenzierung von  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , so werden die Dreiecke gleichschenkelig und kongruent, die Punkte  $A, A_1, A_2 \dots$  liegen dann auf der Peripherie des mit Radius 1 um  $O$  geschlagenen Kreises (Einheitskreis). Ist dabei  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ , wo  $n$  eine ganze, positive Zahl ist, so giebt die  $n$ -malige Potenzierung ein regelmäßiges  $n$ -Eck. Bei fortgesetzter Potenzierung wiederholen sich die Ecken, so daß eine Art von Periodicität stattfindet.

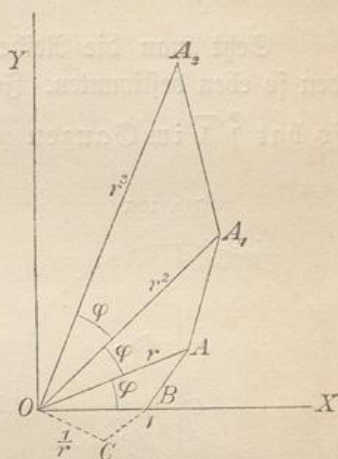
(Während jetzt die Punkte  $A$  auf einem Kreise liegen, liegen sie bei dem obigen allgemeinen Falle auf einer Kurve, die man als logarithmische Spirale bezeichnet. Vergl. Nr. 16 und Fig. 99.)

59) Beim Wurzelausziehen behandle man zunächst die  $n$ <sup>te</sup> Wurzel aus der Einheit, wobei  $n$  ganz und positiv sein soll. Die Einheit läßt sich in beliebig vielen reducierten Formen schreiben, denn es ist

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \cos 4\pi + i \sin 4\pi \\ &= \cos 6\pi + i \sin 6\pi \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Bildet man für jede Schreibweise die  $n$ <sup>te</sup> Wurzel, so erhält man nach 48c) für  $\sqrt[n]{1}$  der Reihe nach die Werte:

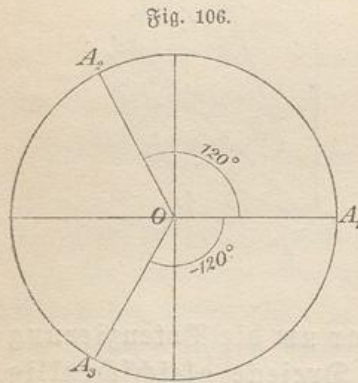
Fig. 105.



$$\cos \frac{0}{n} + i \sin \frac{0}{n} = 1, \quad \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Setzt man die Reihe weiter fort, so decken sich die Punkte mit den so eben bestimmten. Folglich: Ist  $n$  eine positive ganze Zahl, so hat  $\sqrt[n]{1}$  im Ganzen  $n$  verschiedene Werte. Die Punkte, die denselben entsprechen, liegen auf dem Einheitskreise und bilden ein regelmäßiges  $n$ -Eck, zu dessen Ecken auch der Punkt  $+1$  gehört.



Ist  $n$  eine gerade Zahl, so gehört auch  $-1$  zu den Wurzelwerten.

So hat z. B. die Quadratwurzel aus der Einheit die Werte

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Dagegen hat  $\sqrt[3]{1}$  die Werte (vgl. Fig. 106)

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Die drei Wurzelwerte bilden ein gleichseitiges Dreieck  $A_1A_2A_3$ .  $\sqrt[4]{1}$  hat die Werte  $+1, +i, -1, -i$ .

#### Aufgabe.

Bilde die 5 Werte für  $\sqrt[5]{1}$  und stelle sie geometrisch dar.

" " 6 " "  $\sqrt[6]{1}$  " " " " "

" " 10 " "  $\sqrt[10]{1}$  " " " " "

Die Auflösung z. B. der ersten Aufgabe giebt (mit Hülfe des goldenen Schnittes und der Berechnung des regelmäßigen Fünfecks) die Werte

$$x_1 = 1, \quad \begin{cases} x_2 = \frac{(-1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \\ x_3 = \frac{(-1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}. \end{cases}$$

60) Ist  $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$  zu bilden, so ist zu beachten, daß unter der Wurzel ebensogut stehen könnte  $r[\cos(\varphi + 2\pi) + i \sin(\varphi + 2\pi)]$ ,  $r[\cos(\varphi + 4\pi) + i \sin(\varphi + 4\pi)]$ ,  $r[\cos(\varphi + 6\pi) + i \sin(\varphi + 6\pi)]$  u. s. w. Demnach giebt es auch hier  $n$  verschiedene Wurzelwerte, nämlich

$$\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right), \quad \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{n} \right), \\ \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 4\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{n} \right), \quad \text{u. s. w.}$$

Die entsprechenden Punkte liegen sämtlich auf einem Kreise mit Radius  $\sqrt[n]{r}$  und bilden ein regelmäßiges  $n$ -Eck. Hat man also einen der Werte geometrisch bestimmt, so ergeben sich die anderen von selbst.

Da  $\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$  ist, so findet man die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl geometrisch, indem man die Abweichung  $\varphi$  halbiert und als absoluten Betrag die mittlere Proportionale zwischen 1 und  $r$  bestimmt, denn es ist  $1 : \sqrt{r} = \sqrt{r} : r$ .

$\sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right)$  kann im allgemeinen nicht genau mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, schon weil die allgemeine Dreiteilung des Winkels mit diesen Hilfsmitteln nicht möglich ist.

Dagegen lassen sich die 4<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup>, 16<sup>ten</sup>, . . . .,  $(2^n)$ <sup>ten</sup> Wurzeln genau konstruieren, folglich auch ihre ganzzahligen Potenzen, z. B.  $(x + yi)^4$ ,  $(x + yi)^8$ ,  $(x + yi)^{16}$  u. s. w. (Daher kann man auch beliebig viele Punkte der in Figur 98 angedeuteten logarithmischen Spirale genau konstruieren.)

Auf das Potenzieren mit irrationalen und komplexen Exponenten soll hier nicht eingegangen werden.

61) Die Gleichungen von der Form  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = 1$  oder auch  $x^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  werden als binomische Gleichungen  $n$ <sup>ten</sup> Grades bezeichnet.

Handelt es sich um

$$x^n = r = r(\cos 0 + i \sin 0) = r(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ = r(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = \dots,$$

wo  $r$  reell ist, so liegt das  $n$ -Eck der Wurzelpunkte mit den Ecken auf dem Kreise, der mit Radius  $\sqrt[n]{r}$  um den Nullpunkt geschlagen

ist, und zwar liegt es symmetrisch gegen die reelle Achse. Ist also eine der Wurzeln von der Form  $a + bi$ , so existiert noch eine symmetrische von der Form  $a - bi$ . Sowohl die Summe, als auch das Produkt der symmetrischen Wurzeln ist reell, nämlich gleich  $2a$  bzw.  $a^2 + b^2$ . Je zwei so zusammen gehörende Wurzeln werden als konjugierte Wurzeln bezeichnet.

(Die höhere Mathematik zeigt, daß jede Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades mit einer Unbekannten und mit reellen Koeffizienten  $n$  Wurzeln hat, von denen die komplexen (und rein imaginären) paarweise konjugiert vorhanden sind. Am speziellen Falle der binomischen Gleichungen sieht man, wie dies zu verstehen ist.)

### VIII. Reciproke Gleichungen und Anwendung derselben auf reducierbare Gleichungen höheren Grades.

62) Es handelt sich hier um Gleichungen  $n^{\text{ten}}$  Grades ( $n$  ganz und positiv) mit einer Unbekannten  $x$ . Setzt man in einer solchen Gleichung den reciproken Wert  $\frac{1}{x}$  statt  $x$  ein, so entsteht in der Regel eine ganz andere Gleichung, die man wieder als solche mit ganzen Potenzen von  $x$  umformen kann. Bisweilen erhält man aber dabei die ursprüngliche Gleichung unverändert wieder. Gleichungen, die bei der Einführung von  $\frac{1}{x}$  statt  $x$  ihre Form nicht ändern, heißen reciproke Gleichungen.

So ist z. B.  $3x^2 - 4x + 3 = 0$  eine reciproke Gleichung, denn bei der besprochenen Umwandlung entsteht  $\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 = 0$ , oder  $3 - 4x + 3x^2 = 0$ , d. h.  $3x^2 - 4x + 3 = 0$ , wie vorher. Man erkennt dies bequemer, wenn man beide Seiten der ersten Gleichung durch  $x$  dividiert, sie also in folgender Form schreibt:

$$3x - 4 + \frac{3}{x} = 0.$$

Diese ist symmetrisch in Bezug auf  $x$  und  $\frac{1}{x}$ , so daß die Vertauschung dieser beiden Größen nichts ändert. Die Gleichung läßt sich auch schreiben:  $3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$ , so daß sie sich, wenn man für  $x + \frac{1}{x}$  die Unbekannte  $u$  einführt, auf  $3u - 4 = 0$  reducirt, woraus  $u = \frac{4}{3}$ , also  $x + \frac{1}{x} = \frac{4}{3}$  folgt.

63) Es wird sich zeigen, daß die Einführung neuer Unbekannten für die reciproken Ausdrücke  $x + \frac{1}{x}$ ,  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  u. s. w. die Lösung gewisser Gleichungen höheren Grades ermöglicht. Diese Ausdrücke hängen aber folgendermaßen zusammen. Aus

$$1) \quad y + \frac{1}{y} = u$$

folgt durch beiderseitiges Quadrieren  $y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = u^2$ , oder

$$2) \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = u^2 - 2.$$

Durch Multiplikation erhält man aus 1) und 2)  $(y^2 + \frac{1}{y^2})(y + \frac{1}{y}) = (y^3 + \frac{1}{y^3}) + (y + \frac{1}{y}) = u^3 - 2u$ , also mit Hülfe von 1)

$$3) \quad y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u = u(u^2 - 3).$$

Aus 1) und 3) folgt durch Multiplikation  $(y^3 + \frac{1}{y^3})(y + \frac{1}{y}) = (y^4 + \frac{1}{y^4}) + (y^2 + \frac{1}{y^2}) = u^4 - 3u^2$ , also mit Hülfe von 2)

$$4) \quad y^4 + \frac{1}{y^4} = u^4 - 4u^2 + 2.$$

Aus 1) und 4) folgt ebenso  $(y^5 + \frac{1}{y^5}) + (y^3 + \frac{1}{y^3}) = u^5 - 4u^3 + 2u$ , also mit Hülfe von 3)

$$5) \quad y^5 + \frac{1}{y^5} = u^5 - 5u^3 + 5u = u(u^4 - 5u^2 + 5),$$

u. s. w.

64) Als reciproke Gleichungen lassen sich zunächst die folgenden mit symmetrischen Coefficienten behafteten betrachten:

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + ax + 1 &= 0, \\ x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 &= 0, \\ x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 &= 0, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Es wird sich zeigen, daß jede solche Gleichung vom  $2n^{\text{ten}}$  bezw.  $(2n + 1)^{\text{ten}}$  Grade durch die obigen Substitutionen (Einsetzungen) auf den  $n^{\text{ten}}$  Grad zurückgeführt werden kann.

65) **Aufgabe.** Die Gleichung  $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$  zu lösen.

**Auflösung.** Setzt man  $y^2$  für  $x$  ein, so erhält man die Gleichung 6<sup>ten</sup> (also geraden) Grades

$$y^6 + ay^4 + ay^2 + 1 = 0,$$

also bei Division durch  $y^3$

$$y^3 + ay + \frac{a}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

oder

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + a\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Setzt man  $y + \frac{1}{y} = u$ , also nach 63)  $y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u$ , so hat man

$$u^3 - 3u + au = 0$$

oder

$$u(u^2 - 3 + a) = 0.$$

Demnach ist entweder  $u = 0$ , d. h.  $y + \frac{1}{y} = 0$ , d. h.  $y^2 = -1$ , also  $x_1 = -1$ , oder es ist  $u^2 - 3 + a = 0$ , d. h.  $u^2 = 3 - a$ , also  $u^2 - 2 = 1 - a$ ,  $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 - a$ ,  $x + \frac{1}{x} = 1 - a$ ,  $x^2 - (1 - a)x = -1$ ,  $\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 1}$ , womit die drei Lösungen der gegebenen Gleichung 3<sup>ten</sup> Grades gefunden sind.

66) Die reciproke Gleichung 4<sup>ten</sup> Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

geht bei beiderseitiger Division durch  $x^2$  über in

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

oder in

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Die Einsetzung von  $x + \frac{1}{x} = u$  und  $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$  (vgl. 63) gibt

$$u^2 - 2 + au + b = 0.$$

Die Auflösung gibt die beiden Werte

$$\left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2}.$$

Hierauf sind die Gleichungen  $x + \frac{1}{x} = u_1$  und  $x + \frac{1}{x} = u_2$  zu behandeln, deren jede zwei Lösungen giebt:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8} \pm \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8})^2 - 16}}{4},$$

$$\left. \begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \end{array} \right\} = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8} \pm \sqrt{(-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8})^2 - 16}}{4}.$$

67) Zu

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

setze man  $y^2$  für  $x$  ein, also

$$y^{10} + ay^8 + by^6 + by^4 + ay^2 + 1 = 0,$$

oder bei Division durch  $y^5$ 

$$y^5 + ay^3 + by + \frac{b}{y} + \frac{a}{y^3} + \frac{1}{y^5} = 0,$$

oder

$$\left(y^5 + \frac{1}{y^5}\right) + a\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + b\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Setzt man

$$y + \frac{1}{y} = u, \text{ also } y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u, \quad y^5 + \frac{1}{y^5} = u^5 - 5u^3 + 5u,$$

so entsteht

$$u[u^4 - 5u^2 + 5 + a(u^2 - 3) + b] = 0,$$

also ist entweder

$$u = 0, \text{ d. h. } y + \frac{1}{y} = 0, \quad y^2 = -1, \quad x_1 = -1,$$

oder

$$u^4 - u^2(5 - a) = 3a - b - 5,$$

$$\text{d. h. } u^2 = \frac{5-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 + 3a - b - 5}.$$

Die rechte Seite ist gleich  $y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$  zu setzen, so daß man hat

$$x + \frac{1}{x} = \left[\frac{5-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 + 3a - b - 5} - 2\right],$$

woraus sich die übrigen vier Lösungen ergeben.

68) Die Gleichungen

$$x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0,$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0,$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$$

sind zwar keine reciproken, würde man aber in der ersten und dritten —  $x_1$  statt  $x$  einsetzen, in der zweiten  $x_1\sqrt{-1}$  statt  $x$ , so würden sie in solche übergehen. Bei der ersten und dritten führt man direkt  $y^2$  für  $x$  ein und dividirt dann durch  $y^3$  bezw.  $y^5$ . In der zweiten dividirt man direkt durch  $x^2$ . Die nun anzuwendenden Substitutionen ergeben sich aus der Gleichungsfolge

$$y - \frac{1}{y} = u, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = u^2 + 2, \quad y^3 - \frac{1}{y^3} = u^3 + 3u,$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = u^4 + 4u^2 + 2, \quad y^5 - \frac{1}{y^5} = u^5 + 5u^3 + 5u,$$

die ebenso wie die in 63) angegebene abzuleiten ist.

So kann man z. B. statt  $x^3 - 1 = 0$  schreiben  $y^6 - 1 = 0$  oder  $y^3 - \frac{1}{y^3} = 0$ , d. h.  $u^3 + 3u = 0$ ,  $u(u^2 + 3) = 0$ , so daß entweder  $u = 0$  d. h.  $y - \frac{1}{y} = 0$ , oder  $u^2 = -3$  d. h.  $u = \pm\sqrt{-3}$ , d. h.  $y - \frac{1}{y} = \pm\sqrt{-3}$  ist. So findet man ebenso, wie früher, als dritte Wurzeln aus der Einheit die Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Hier ist zu beachten, daß  $x_2x_3 = 1$ , also auch  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$  ist, während  $\frac{1}{x_2} = x_3 = x_2^2$  und  $\frac{1}{x_3} = x_2 = x_3^2$  ist.

Ebenso kann man die Gleichung  $x^5 - 1 = 0$  behandeln und die 5 fünften Wurzeln aus der Einheit ableiten.

69) In Abschnitt 63 war  $y + \frac{1}{y} = u$  und daher  $y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u$ . Folglich geht die häufig vorkommende Gleichung 3<sup>ten</sup> Grades

$$x^3 - 3x = 2a,$$

wo  $a$  reell ist, durch die Substitution  $x = y + \frac{1}{y}$  über in

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 2a.$$

Betrachtet man hier  $y^3$  als Unbekannte, so ergibt sich als Lösung der für  $y^3$  quadratischen Gleichung  $y^6 - 2ay^3 = -1$  der Wert  $y^3 = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . Des reciproken Charakters halber ist auch  $\frac{1}{y^3} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . Da aber  $y^3 + \frac{1}{y^3} = 2a$  sein muß, so gehören

zusammen die Lösungen  $y^3 = a + \sqrt{a^2 - 1}$  und  $\frac{1}{y^3} = a - \sqrt{a^2 - 1}$ , welches letztere in der That gleich  $\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$  ist. Bei  $y^3 + \frac{1}{y^3}$  kommt es also nur auf den einen Wert  $(a + \sqrt{a^2 - 1}) + (a - \sqrt{a^2 - 1})$  an, denn die Änderung des Wurzelzeichens würde dasselbe wiedergeben. Die endgültige Lösung der Gleichung  $x^3 - 3x = 2a$  kann jetzt zunächst geschrieben werden als

$$x = y + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}}.$$

Sind nun  $w_1, w_2$  und  $w_3$  die Wurzelwerte der Gleichung  $w = \sqrt[3]{1}$ , so erhält man alle drei möglichen Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} x &= w \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{w \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}} \\ &= w \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{w} \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned}$$

wo für  $w$  der Reihe nach zu setzen ist  $w_1 = 1, w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

70) Über das Resultat sind einige Bemerkungen nötig.

a) Ist  $a$  reell und  $> 1$ , so steht unter beiden Kubikwurzeln Reelles, demnach hat jede der Kubikwurzeln unter ihren Werten einen reellen Wert  $\xi$  bezw.  $\xi_1$ . Die drei Lösungen sind dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 \xi + \frac{1}{w_1} \xi_1 = \xi + \xi_1, \\ x_2 &= w_2 \xi + \frac{1}{w_2} \xi_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \xi + \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \xi_1 \\ &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \xi + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \xi_1 = \frac{-(\xi + \xi_1) + i\sqrt{3}(\xi - \xi_1)}{2}, \\ x_3 &= w_3 \xi + \frac{1}{w_3} \xi_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \xi + \frac{2}{-1 - i\sqrt{3}} \xi_1 \\ &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \xi + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \xi_1 = \frac{-(\xi + \xi_1) - i\sqrt{3}(\xi - \xi_1)}{2}. \end{aligned}$$

Die erste Lösung ist also reell, die zweite und dritte sind konjugiert komplex.

b) Ist dagegen  $a$  reell und  $< 1$ , so steht unter beiden Kubikwurzeln Komplexes, denn man kann schreiben  $\sqrt[3]{a + i\sqrt{1-a^2}}$  bzw.  $\sqrt[3]{a - i\sqrt{1-a^2}}$ . Man erhält in reduzierter Schreibweise als Lösung

$$x = y + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{r} \left[ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{r} \left[ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right]},$$

wo  $r = \sqrt{a^2 + (1-a^2)} = \sqrt{1} = 1$  und  $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$  [lies arcus tangens  $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ , was den Bogen bedeuten soll, dessen Tangente gleich  $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$  ist], oder noch einfacher  $\cos \varphi = \frac{a}{1} = a$ , also  $\varphi = \arccos a$  ist. Also ist die eine Lösung von der Form

$$\begin{aligned} x &= \left[ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right] + \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}} \\ &= \left[ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right] + \left[ \cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right] = 2 \cos \frac{\varphi}{3}. \end{aligned}$$

Sämtliche 3 Lösungen aber sind gegeben durch die reellen Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \frac{\varphi}{3} \\ x_2 &= 2 \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} = -2 \cos \frac{\pi - \varphi}{3} \\ x_3 &= 2 \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} = -2 \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \end{aligned} \right\} \text{ wo } \varphi \text{ aus der Gleichung } \cos \varphi = a \text{ bestimmt wird,}$$

oder auch

$$x_1 = 2 \cos \frac{\varphi^0}{3}, \quad x_2 = -2 \cos \left( 60^\circ - \frac{\varphi^0}{3} \right), \quad x_3 = -2 \cos \left( 60^\circ + \frac{\varphi^0}{3} \right).$$

Versuche für beide Fälle nachzuweisen, daß  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ,  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3$  und  $x_1 x_2 x_3 = 2a$  ist.

71) Ebenso ist die Gleichung  $x^3 + 3x = 2a$  durch die Substitution  $x = y - \frac{1}{y}$  auf entsprechende Form zu bringen, aus der sich als Wurzeln die in

$$x = w \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + 1} + a} - \frac{1}{w} \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + 1} - a}$$

enthaltenen drei Werte ergeben, über die sich ähnliche Betrachtungen anstellen lassen.

Auch die Gleichungen  $x^5 - 5x^3 + 5x = 2a$  und  $x^5 + 5x^3 + 5x = 2a$  lassen sich durch die Substitutionen  $x = y + \frac{1}{y}$  bzw.  $x = y - \frac{1}{y}$  lösen.

72) Durch Obiges ist auch die allgemeine kubische Gleichung erledigt. Es läßt sich nämlich statt

$$x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0$$

schreiben:

$$[(x + \alpha)^3 - 3\alpha^2 x - \alpha^3] + 3\beta x + \gamma = 0.$$

Setzt man hier  $x + \alpha = y$ , also  $x = y - \alpha$ , so entsteht die kubische Gleichung ohne quadratisches Glied

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = [3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma],$$

also eine Gleichung von der Form

$$y^3 - 3ky = 2b.$$

Bei positivem  $k$  setze man  $y = u\sqrt{k}$ , bei negativem  $k$  dagegen  $y = u\sqrt{-k}$  ein. Dann entstehen beziehungsweise die Gleichungen

$$u^3 - 3u = \frac{2b}{\sqrt{k^3}}, \quad u^3 + 3u = \frac{2b}{\sqrt{-k^3}}.$$

Beide Formen sind schon in Abschnitt 69 bis 71 behandelt. Die Wurzeln der ersteren z. B. sind in

$$u = w\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{w}\sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

enthalten, wo  $a = \frac{2b}{\sqrt{k^3}} = \frac{3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta)^3}}$  ist.

Aus  $u$  berechnet man  $y = u\sqrt{k}$ , daraus  $x = y - \alpha$ .

73) **Beispiel.** In  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$  ist  $\alpha = -3$ ,  $\beta = \frac{26}{3}$ ,  $\gamma = -24$ , also  $k = \alpha^2 - \beta = 9 - \frac{26}{3} = \frac{1}{3}$ ,  $3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma = -78 + 54 + 24 = 0 = 2b$ , also  $\frac{2b}{\sqrt{k^3}} = 0$ . Da  $k$  positiv ist, handelt es sich um den ersten der beiden Fälle d. h. um  $u^3 - 3u = 0$  oder  $u(u^2 - 3) = 0$ , woraus folgt  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = +\sqrt{3}$ ,  $u_3 = -\sqrt{3}$ ; also  $y_1 = 0\sqrt{k} = 0$ ,  $y_2 = \sqrt{3}\sqrt{k} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = 1$ ,

$y_3 = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -1$ , so daß  $x_1 = y_1 - \alpha = 0 + 3 = 3$ ,  
 $x_2 = y_2 - \alpha = 1 + 3 = 4$ ,  $x_3 = y_3 - \alpha = -1 + 3 = 2$  ist.  
 Hier also vereinfachte sich die Rechnung durch das Wegfallen der  
 rechten Seite der Hilfsgleichung.

74) Beispiel. In  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$  ist

$$\alpha = -\frac{10}{3}, \quad \beta = \frac{31}{3}, \quad \gamma = -30;$$

folglich 
$$\alpha^2 - \beta = \frac{100}{9} - \frac{93}{9} = \frac{7}{9} = k;$$

$$3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma = -\frac{2790}{27} + \frac{2000}{27} + \frac{810}{27} = \frac{20}{27} = 2b,$$

also 
$$\frac{2b}{\sqrt{k^3}} = \frac{2 \cdot 10}{27\sqrt{\frac{343}{729}}} = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{343}}.$$

Da  $k$  positiv ist, handelt es sich um

$$u^3 - 3u = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{343}},$$

wo  $\frac{10}{\sqrt{343}} = a$  zu setzen ist.

Die eine Lösung ist enthalten in

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{\frac{10}{\sqrt{343}} + \sqrt{\frac{100}{343}}} - 1 + \sqrt[3]{\frac{10}{\sqrt{343}} - \sqrt{\frac{100}{343}}} - 1 \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{100}{343}} + i\sqrt{\frac{243}{343}}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{100}{343}} - i\sqrt{\frac{243}{343}}}. \end{aligned}$$

Es ist der Fall mit drei reellen Lösungen, der auf  $u_1 = 2 \cos \frac{\varphi}{3}$  führt,  
 wo sich  $\varphi$  aus  $\cos \varphi = \frac{10}{\sqrt{343}}$  bestimmt. Es ergibt sich  $\varphi = 57^\circ 19' 11'' 4$ ,  
 $\frac{\varphi}{3} = 19^\circ 6' 25'' 8$ ,  $\lg \cos \frac{\varphi}{3} + \lg 2 = 0,2764215$ , also  $u_1 = 1,889825$ ,  
 $y_1 = \sqrt{k}u_1 = \frac{u_1}{3}\sqrt{7} = \frac{1,889825\sqrt{7}}{3} = \frac{5}{3}$ , endlich  $x_1 = y_1 - \alpha$   
 $= \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5$ .

Suche die beiden anderen Wurzeln selbst nach den früheren  
 Formeln  $u = -2 \cos(60^\circ \pm \frac{\varphi}{3})$ , was auf  $x_2 = 3$  und  $x_3 = 2$  führt,  
 oder wende die folgende Überlegung an.

75) Man kann die Gleichung 3<sup>ten</sup> Grades, deren Wurzeln  
 $x_1, x_2$  und  $x_3$  sein sollen, sofort hinschreiben als

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

denn dieser Gleichung ist sowohl für  $x = x_1$ , als auch für  $x = x_2$  und für  $x = x_3$  genügt. Dies läßt sich schreiben als

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Vergleicht man dies mit

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

so ergibt sich, daß

$$\alpha = x_1 + x_2 + x_3$$

gleich der Summe der Wurzeln ist,

$$\beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

gleich der Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln,

$$\gamma = x_1x_2x_3$$

gleich dem Produkte der drei Wurzeln. So ist im vorigen Beispiele, wo  $x_1 = 5$  bereits berechnet war,

$$x_2 + x_3 = \alpha - 5 = 10 - 5 = 5,$$

$$x_2x_3 = \frac{\gamma}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen giebt  $x_2 = 3$  und  $x_3 = 2$ .

76) Man kann aber auch folgendermaßen verfahren: Die linke Seite

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

muß, da sie mit

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

identisch ist, durch  $(x - x_1)$  ohne Rest teilbar sein, und durch die Teilung auf den 2<sup>ten</sup> Grad zurückgeführt werden.

So ist im obigen Beispiele, wo  $x_1 = 5$  gefunden war,

$$\begin{array}{l} x^3 - 10x^2 + 31x - 30 : (x - 5) = x^2 - 5x + 6 \\ x^3 - 5x^2 \end{array}$$

$$\hline - 5x^2 + 31x$$

$$\hline - 5x^2 + 25x$$

$$\hline 6x - 30$$

$$\hline 6x - 30$$

Aus  $x^2 - 5x + 6 = 0$  folgen als fernere Lösungen  $x_2 = 3$  und  $x_3 = 2$ .

Man kann die obige Gleichung  $x^3 - 3ax = b$  auch ohne Hülfe der reciproken Gleichungen lösen, jedoch soll dies und die Lehre von den Gleichungen 4<sup>ten</sup> Grades vorläufig aufgeschoben bleiben.

Beispiele für die Gleichungen dritten Grades bietet die Stereometrie in Menge. Die Formel für das Kugelsegment z. B. ist

$$J = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2).$$

Demnach führt die Aufgabe, die Höhe  $h$  zu finden, durch die ein Kugelsegment von gegebenem  $r$  (bezw. gegebenem  $a$ ) einen vorgeschriebenen Inhalt  $J$  erhält, auf eine Gleichung dritten Grades, z. B. auf

$$x^3 + 3a^2x = \frac{6J}{\pi}, \quad \text{oder auf} \quad x^3 - 3rx^2 = -\frac{3J}{\pi}.$$

Ebenso folgende Aufgabe: Wie tief taucht eine gegebene Kugel von gegebenem specifischem Gewicht  $p'$  ( $p' < 1$ ) ins Wasser ein?

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch auf die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht und den Kugelsektor ausdehnen. Bei der Halbkugel z. B. kann man noch die Fälle unterscheiden, ob sie mit der Grundebene voran oder mit der Wölbung voran eintauchen soll.

## IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

77) Die allgemeine Form der Gleichungen 2<sup>ten</sup> Grades mit zwei Unbekannten ist die folgende:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind die Glieder mit  $x^2$ , mit  $xy$  und mit  $y^2$  solche, die das Unbekannte in der 2<sup>ten</sup> Potenz enthalten. Die übrigen enthalten es in der 1<sup>ten</sup> Potenz oder gar nicht.

Berechnet man  $y$  aus der einen Gleichung, und setzt man den Wert in die andere ein, so entsteht eine Gleichung 4<sup>ten</sup> Grades für  $x$  allein. Da die Lösung solcher Gleichungen noch nicht gelehrt werden soll, ist auch die Bestimmung der Unbekannten aus den obigen Gleichungen vorläufig nicht möglich. Zu jedem Werte von  $x$  gehört ein bestimmter von  $y$ , so daß man stets vier Wertepaare erhält, die nicht durcheinander gemischt werden dürfen.

Es giebt aber häufig vorkommende Spezialformen, bei denen die Gleichungen sich auf einfachere zurückführen lassen. Abgesehen von den auf der Hand liegenden Vereinfachungen mögen einige Methoden der Reduktion behandelt werden.

$$1) \quad \begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b. \end{cases}$$

Addition giebt  $x^2 + y^2 + 2xy = a + b$ , also  $x + y = \sqrt{a + b}$ .  
Das Weitere ist einfach.

Oder: man schreibe

$$\begin{cases} x(x + y) = a, \\ y(x + y) = b. \end{cases}$$

Division giebt  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  u. s. w.

$$2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Man bilde  $2xy = 2b$ , vereinige dies durch Addition bezw. Subtraktion mit  $x^2 + y^2 = a$ , was  $x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b$  bezw.  $x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b$  giebt. Aus beiden Gleichungen folgt

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}, \end{cases}$$

u. s. w.

$$3) \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Addition giebt  $x^2 + y^2 = \frac{a + b}{2}$ , Subtraktion giebt  $2xy = a - b$ ,  
Fortsetzung ähnlich, wie bei 2).

$$4) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 + y^3$  ist zerlegbar in  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ , so daß  $(x + y)b = a$  ist u. s. w.

$$5) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 - y^3$  ist zerlegbar in  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ .

$$6) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ xy(x + y) = b. \end{cases}$$

Nach der letzteren Gleichung ist  $3x^2y + 3xy^2 = 3b$ , was sich mit der ersten zu

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a + 3b \quad \text{oder} \quad (x + y)^3 = a + 3b$$

vereinigen läßt, so daß  $x + y = \sqrt[3]{a + 3b}$  ist.

$$7) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ xy(x - y) = b. \end{cases}$$

Ähnlich, wie vorher, erhält man  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = a - 3b$ , also  $x - y = \sqrt[3]{a - 3b}$ .

$$8) \quad \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Die erste Gleichung läßt sich schreiben als  $(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = a$  oder durch Produktzerlegung als  $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = a$ . Durch Division erhält man das Weitere.

$$9) \quad \begin{cases} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = a, \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

Das letztere zerlegt sich in  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = b$ , so daß man durch Multiplikation aus beiden Gleichungen  $(x + y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = ab$  erhält, wovon sich  $x^3 + y^3 = b$  abziehen läßt, u. s. w.

$$10) \quad \begin{cases} ax + by = 2(x^2 - y^2), \\ \frac{b}{x - y} - \frac{a}{x + y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}. \end{cases}$$

Betrachtet man hier zunächst  $a$  und  $b$  als Unbekannte, so giebt die Multiplikationsmethode  $a = \frac{x^2 - y^2}{x}$  und  $b = \frac{x^2 - y^2}{y}$ , also  $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$ , so daß einfachere Gleichungen, z. B. die beiden letzteren, zur Verfügung stehen.

$$11) \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Man kann  $\sqrt{x} = v$ , also  $x^2 = v^4$ ,  $\sqrt{y} = w$ , also  $y^2 = w^4$  setzen und die Gleichungen  $v + w = a$ ,  $v^4 + w^4 = b$  behandeln, wo  $w$  leicht zu eliminieren ist.

Weitere Aufgaben findet man in den gebräuchlichen Sammlungen. Bisweilen führen nur Kunstgriffe zur Lösung, die vermieden werden könnten, wenn die Gleichungen 4<sup>ten</sup> Grades schon jetzt zur Verfügung ständen.

78) Gleichungen, wie 11), bei denen die Unbekannten unter irgend welchen Wurzelzeichen stehen, werden als irrationale Gleichungen bezeichnet und kommen hier nur soweit in Betracht, als sie sich auf rationale Gleichungen niederen Grades zurückführen lassen.

Ebenso wird auf ein Durchnehmen der transcendenten Gleichungen, bei denen die Unbekannte als Potenzexponent vorkommt, z. B. als  $a^x$ ,  $b^x$  u. s. w. (wohin nach Kapitel VI auch  $\cos x$ ,  $\sin x$  u. s. w. gehören) verzichtet. Nur auf solche kann hingewiesen werden, die sich in einfacher Weise auf rationale algebraische Hilfsgleichungen zurückführen lassen.

Handelt es sich z. B. um  $10^{2x} + a10^x = b$ , so setze man  $10^x = y$ , dies giebt  $y^2 + ay = b$ , also  $y = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ , folglich  $x = {}^{10}\log y = {}^{10}\log \left[ -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right]$ .

Ebenso führt  $e^{2x} + ae^x = b$  auf  $x = \lg \left[ -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right]$ .

Von hier aus kann man zu Gleichungen übergehen, die sich durch entsprechende Substitution in reducierbare von höherem Grade verwandeln.

Bei  $\cos x + a \sin x = b$  setzt man  $\cos x = z$  und findet  $z + a\sqrt{1 - z^2} = b$ ,  $a^2(1 - z^2) = (b - z)^2$ , bestimmt  $z$  und berechnet  $x$  mit Hilfe der trigonometrischen Tabellen.

Dagegen sind Gleichungen wie  $x + a \cos x = b$  mit elementaren Hilfsmitteln nicht lösbar.

Unten werden unter Nr. 24 der Trigonometrie noch einige goniometrische Gleichungen behandelt.

## X. Zusammenstellung der wesentlichsten Ergebnisse.

$$1) \quad 1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^{n-1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

$$2) \quad e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} + \dots + e + 1 = \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

$$3) \quad x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

4) Hauptgleichung der Rentenrechnung:

$$k = \frac{100r}{\%} \left[ \left( 1 + \frac{\%}{100} \right)^n - 1 \right] = \frac{100r}{\%} [q^n - 1].$$

5) Kaufpreis der Rente:

$$c = \frac{100r}{\%} \left[ 1 - \frac{1}{q^n} \right].$$

6) Für  $-1 < e < +1$  gilt die unendliche Reihe

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots = \frac{1}{1 - e}.$$

7) Die arithmetische Reihe

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d]$$

hat, wenn man das Endglied gleich  $t$  setzt, die Summe

$$s = n \frac{a + t}{2},$$

was das  $n$ -fache des „mittleren Gliedes“ ist.

8) Die Summe der  $n$  ersten ganzen Zahlen ist

$$s = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

9) Das Zahlendreieck für den binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

10) Binomischer Lehrsatz:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

11)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

12)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$

13) Für  $n = \infty$  und  $p$  ganz und positiv ist

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n} m^p = \frac{1}{p+1}.$$

14) Exponentialreihe. Für  $n = \infty$  ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,718\,281\,8\dots = e;$$

15)  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x.$

16) Moivre'scher Lehrsatz:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

17)  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha = e^{im\alpha}.$

18)  $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \dots$

19)  $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{\alpha^1}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$

20)  $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ , also  $\lg(-1) = \pi i.$

21) Ist  $x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , so folgt

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

22) Die drei Werte von  $\sqrt[3]{1}$  sind

$$1; \quad -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}; \quad -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

23) Die Gleichung 3<sup>ten</sup> Grades

$$x^3 - 3x = 2a$$

hat die Lösungen

$$x_1 = \xi + \xi_1, \quad x_2 = \frac{-(\xi + \xi_1) + i\sqrt{3}(\xi - \xi_1)}{2},$$

$$x_3 = \frac{-(\xi + \xi_1) - i\sqrt{3}(\xi - \xi_1)}{2},$$

wo  $\xi = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ ,  $\xi_1 = \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$  ist. Ist dabei  $a$  reell und  $< 1$ , so setze man  $a = \cos \varphi$ , also  $\varphi = \arccos a$ . Dann sind die Lösungen

$$x_1 = 2 \cos \frac{\varphi}{3}; \quad x_2 = -2 \cos \frac{\pi - \varphi}{3}; \quad x_3 = -2 \cos \frac{\pi + \varphi}{3}.$$

24) Bei der Gleichung 3<sup>ten</sup> Grades

$$x^3 + 3x = 2a$$

handelt es sich entsprechend um  $x_1 = \xi - \xi_1$  u. s. w., wo

$$\xi = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + 1} + a}, \quad \xi_1 = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + 1} - a}.$$

## 25) Die Gleichung

$$x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0$$

geht durch die Substitution  $x = y - \alpha$  über in

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = [3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma]$$

oder

$$y^3 - 3ky = 2b,$$

was nach 23) oder 24) zu behandeln ist.

## Dritte Abteilung.

# Trigonometrie.

### I. Verallgemeinerung der Grundbegriffe.

#### 1) Zusammenhang zwischen Bogen und Winkel.

Nach Teil I, Geometrie, 147, gilt für einen Winkel  $\alpha^\circ$  und den zugehörigen, am Einheitskreise zu messenden Bogen  $a$  die Proportion

$$\alpha^\circ : 180^\circ = a : \pi,$$

wo  $\pi = 3,141\,592\,65 \dots$  ist. Daraus folgt

$$\alpha^\circ = \frac{a}{\pi} 180^\circ.$$

Zum Bogen  $a = 1$  gehört z. B. der Winkel  $\frac{1}{\pi} 180^\circ = \frac{180^\circ}{3,141\,59 \dots}$   
 $= 57^\circ 17' 44,81 \dots = 206\,264,81 \dots$

Ebenso ist

$$a = \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ},$$

zum Winkel  $\alpha^\circ = 1^\circ$  gehört also der Bogen  $\pi \frac{1^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{180} = \frac{3,141\,59 \dots}{180}$   
 $= 0,017\,453 \dots$

(In dem Bruche  $\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$  hebt sich die Gradbenennung genau ebenso weg, wie es mit gleichen arithmetischen Faktoren im Zähler und Nenner geschieht. Man erkennt, daß  $a$  und  $\pi$  zunächst unbenannte Zahlen sind, ebenso wie die Zahl  $r = 1$ .)

Setzt man jedoch  $r = 1$  Meter, so ist auch der Bogen in Metern dargestellt. Dasselbe gilt von anderen Längeneinheiten, wie Meile, Kilometer, Centimeter u. s. w.)

Nach Obigem kann man Tabellen anfertigen, in denen zu jedem Winkel der zugehörige Bogen, zu jedem Bogen der zugehörige Winkel berechnet ist.

Am Kreise mit Radius  $r$  gehört zum Winkel  $180^\circ$  der Bogen  $r\pi$ , zum Winkel  $1^\circ$  der Bogen  $\frac{r\pi 1^\circ}{180^\circ} = \frac{r\pi}{180}$ , zum Winkel  $\alpha^\circ$  der Bogen  $\frac{r\pi\alpha^\circ}{180^\circ} = r\alpha$ . Ist  $r$  eine unbenannte Zahl, so ist auch dieser Bogen eine unbenannte Zahl. Ist  $r$  in einer bestimmten Maßeinheit, z. B. in Metern gegeben, so ist auch der Bogen in diesem Maße gegeben.

**Aufgabe.** Jeder Äquatorgrad der Erde habe, gestreckt gedacht, 15 Meilen Länge.\*) Wie groß ist der Radius der Erde?

**Auflösung.** Zum Winkel  $1^\circ$  gehört am Kreise mit Radius  $x$  der Bogen  $x \cdot 0,017453 \dots$ . Setzt man dies gleich 15, so erhält man  $x = \frac{15}{0,017453 \dots} = ?$  Meilen.

**Aufgabe.** Der scheinbare Sonnendurchmesser beträgt im Mittel 32 Minuten. Wie groß ist der wirkliche Durchmesser, wenn die Entfernung von der Erde zu 20 000 000 Meilen angenommen wird?

**Auflösung.** Zum Winkel  $32' = \frac{32^\circ}{60}$  gehört bei gegebenem Radius  $r$  der Bogen  $r \frac{32}{60} \cdot 0,017453 \dots$ . Wird  $r = 20\,000\,000$  Meilen gesetzt, so erhält man ? Meilen.

**Bemerkung.** Wenn hier der geradlinige Durchmesser als Bogen berechnet wird, so handelt es sich um einen verschwindend kleinen Fehler, denn der Winkel beträgt nur etwa die Hälfte eines Grades. — Man löse dieselbe Aufgabe für den Mond mit dem scheinbaren Durchmesser  $31'$  und nehme 50 000 Meilen oder etwa 60 Erdradien Entfernung an.

2) Die goniometrischen Funktionen werden bisweilen vom Winkel, bisweilen vom Bogen (gemessen am Einheitskreise) abhängig gemacht. So spricht man von  $\sin 45^\circ$  und zugleich von  $\sin \frac{\pi}{4}$ , was dasselbe ist. Schreibt man also  $\sin \alpha$ , so ist es ein großer Unterschied, ob die Zahl  $\alpha$  einen Bogen in Längeneinheiten, oder einen Winkel in Grad en darstellt. Wird unter  $\alpha$  ein Bogen verstanden, so soll in der Regel einfach  $\alpha$  geschrieben werden; soll dagegen  $\alpha$  ein Winkel sein, so soll geschrieben werden  $\alpha^\circ$ .

Bei gewissen allgemeinen Betrachtungen ist es nicht nötig, einen Unterschied in der Schreibweise zu machen, wohl aber, wenn es sich

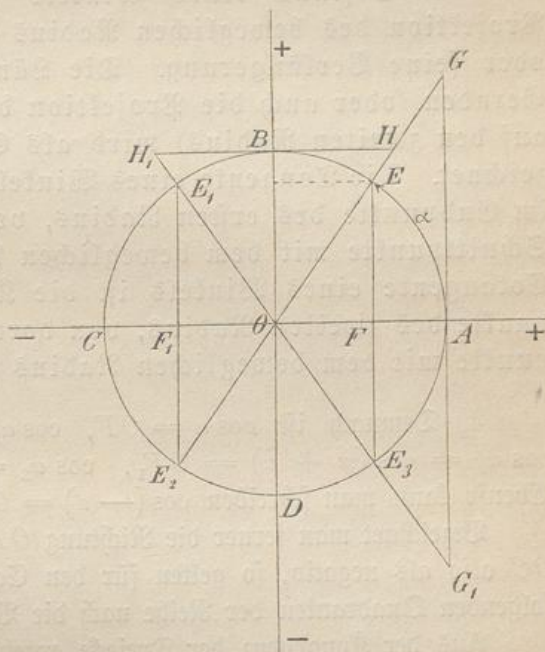
\*) Die Rechnungen sind auch in Kilometern durchzuführen.

um bestimmte Berechnungen handelt. Die Umrechnung ist in jedem Falle einfach, denn es ist z. B.  $\sin n^\circ = \sin \left(\frac{n\pi}{180}\right)$ , dagegen  $\sin \widehat{m} = \sin \left(\frac{180 \widehat{m}}{\pi}\right)^\circ$ .

3) Figur 107 stellt einen Kreis mit dem Radius  $r = 1$  dar, der durch den wagerechten und den senkrechten Durchmesser in seine vier Quadranten geteilt ist. Wandert ein Punkt aus der Anfangslage  $A$  auf der Kreislinie über  $B$ ,  $C$  und  $D$  nach  $A$ , und wiederholt er denselben Weg beliebig oft, so befindet er sich der Reihe nach im ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten u. s. w. Quadranten. Der fünfte deckt sich dabei mit dem ersten, der sechste mit dem zweiten u. s. w. Läßt man den Radius  $OA$  unter Umdrehung um  $O$  die Wanderung mitmachen, so bildet er mit der Anfangslage Winkel, die der Reihe nach den genannten Quadranten angehören. Die beschriebene Art der Drehung nennt man die positive, die im entgegengesetzten Sinne erfolgende die negative.

Es handelt sich zunächst darum, die goniometrischen Funktionen für alle möglichen Bogen und Winkel zu erklären, nachdem im ersten Teile nur von spitzen und stumpfen Winkeln die Rede gewesen war. Die Radien  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  und  $OD$  sollen der Reihe nach als der erste, zweite, dritte, vierte Radius bezeichnet werden. Der sich drehende Radius  $OE$  heiße der bewegliche Radius. Der letztere ist in Fig. 107 in vier Lagen  $OE$ ,  $OE_1$ ,  $OE_2$  und  $OE_3$  gezeichnet, die symmetrisch gegen den senkrechten bzw. wagerechten Durchmesser liegen. Wird der Winkel  $AOE$  mit  $\alpha^\circ$  bezeichnet, so ist der stumpfe Winkel  $AOE_1$  oder  $\alpha_1^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$ , der überstumpfe Winkel  $AOE_2$  oder  $\alpha_2^\circ = 180^\circ + \alpha^\circ$ , der gleichfalls überstumpfe Winkel  $AOE_3 = \alpha_3^\circ$

Fig. 107.



$= 360^\circ - \alpha^\circ$ . Bezeichnet man dagegen den zum Winkel gehörigen Bogen mit  $\alpha$ , so ist  $\widehat{AE} = \alpha$ ,  $\widehat{AE}_1 = \pi - \alpha$ ,  $\widehat{AE}_2 = \pi + \alpha$ ,  $\widehat{AE}_3 = 2\pi - \alpha$ . Diese letzteren Bezeichnungen sollen in der Regel Anwendung finden.

Für sämtliche Quadranten sollen nun folgende Erklärungen gelten, bei denen z. B. die Sinuslinie kurz als Sinus, die Cosinuslinie kurz als Cosinus u. s. w. bezeichnet werden darf:

Der Cosinus eines Winkels (oder Bogens) ist die Projektion des beweglichen Radius auf den ersten Radius oder seine Verlängerung. Die Länge der projizierenden Geraden (oder auch die Projektion des beweglichen Radius auf den zweiten Radius) wird als Sinus des Winkels bezeichnet. Die Tangente eines Winkels ist die Kreistangente im Endpunkte des ersten Radius, von diesem aus bis zum Schnittpunkte mit dem beweglichen Radius gemessen. Die Cotangente eines Winkels ist die Kreistangente im Endpunkte des zweiten Radius, von dort aus bis zum Schnittpunkte mit dem beweglichen Radius gemessen.

4) Demnach ist  $\cos \alpha = OF$ ,  $\cos \alpha_1 = \cos(\pi - \alpha) = OF_1$ ,  $\cos \alpha_2 = \cos(\pi + \alpha) = OF_1$ ,  $\cos \alpha_3 = \cos(2\pi - \alpha) = OF$ . Ebenso kann man schreiben  $\cos(-\alpha) = OF$ .

Bezeichnet man ferner die Richtung  $OA$  als positiv, die Richtung  $OC$  also als negativ, so gelten für den Cosinus in den aufeinanderfolgenden Quadranten der Reihe nach die Vorzeichen  $+$ ,  $-$ ,  $-$ ,  $+$ .

Aus der Kongruenz der Dreiecke ergeben sich ferner die Formeln

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha.\end{aligned}$$

Man kann also kurz schreiben

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha.$$

Selbstverständlich ist auch

$$\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos((2n + 1)\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha,$$

denn die Hinzufügung oder Wegnahme eines ganzen Vielfachen von  $2\pi$  zum Bogen ändert an der Zeichnung nichts.

5) Ebenso ist  $\sin \alpha = FE$ ,  $\sin \alpha_1 = \sin(\pi - \alpha) = F_1E_1$ ,  $\sin \alpha_2 = \sin(\pi + \alpha) = F_1E_2$ ,  $\sin \alpha_3 = \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = FE_3$ .

Bezeichnet man nun die nach oben gehenden Senkrechten  $FE$  und  $F_1E_1$  als positiv, also die nach unten gehenden  $F_1E_2$  und  $FE_3$  als negativ, so hat man für den Sinus in den einzelnen Quadranten die Vorzeichen  $+$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $-$ .

Demnach ist

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Man kann also schreiben

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(\pi \mp \alpha) = \pm \sin \alpha,$$

wobei die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Der Bogen kann hier ebenfalls um  $2n\pi$  vergrößert oder verkleinert werden, ohne daß sich etwas ändert.

6) Für die Tangente ist der Reihe nach

$$\tan \alpha = AG, \quad \tan \alpha_1 = \tan(\pi - \alpha) = AG_1, \quad \tan \alpha_2 = \tan(\pi + \alpha) = -AG,$$

$$\tan \alpha_3 = \tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -AG_1.$$

Die Vorzeichenreihe ist also  $+$ ,  $-$ ,  $+$ ,  $-$ .

Daraus folgt

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha,$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

7) Für die Cotangente ist

$$\cot \alpha = BH, \quad \cot \alpha_1 = \cot(\pi - \alpha) = BH_1, \quad \cot \alpha_2 = \cot(\pi + \alpha) = -BH,$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -BH_1.$$

Auch hier ist die Vorzeichenreihe  $+$ ,  $-$ ,  $+$ ,  $-$ .

Ferner ist

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha,$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

8) Demnach gilt allgemein Folgendes:

Die gleichnamigen goniometrischen Funktionen der Bogen (bezw. Winkel)  $\alpha$ ,  $\pi - \alpha$ ,  $\pi + \alpha$  und  $2\pi - \alpha$ , deren jeder noch um  $2n\pi$  vergrößert oder verkleinert werden kann, stimmen dem absoluten Werte nach überein, ihre Vorzeichen aber bestimmen sich aus der nachstehenden Quadrantentabelle:

Quadrant:	I,	II,	III,	IV
Sinus:	+	+	-	-
Cosinus:	+	-	-	+
Tangente:	+	-	+	-
Cotangente:	+	-	+	-

9) Sämtliche in Teil I für spitze Winkel bewiesene Formeln gelten, wie sich leicht zeigen läßt, für ganz beliebige Winkel. So ist z. B., wenn  $\alpha$  der Bogen eines spitzen Winkels ist,  $\sin^2(\pi \pm \alpha) + \cos^2(\pi \pm \alpha) = \sin^2 \alpha + (-\cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , so daß die Formel  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  auch für stumpfe und überstumpfe Winkel gilt. Geometrisch folgt dies sofort aus Fig. 107, wo z. B.  $OF_1^2 + F_1E_2^2 = (-OF)^2 + (-FE)^2 = OF^2 + FE^2 = OE^2 = 1$  ist.

Ferner ist z. B.

$$\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \tan(\pi + \alpha).$$

Die Formel  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$  gilt also auch für überstumpfe Winkel.

Für die einzelnen Quadranten lassen sich daher die Vorzeichen der Tangente und Cotangente aus denen für Sinus und Cosinus ohne weiteres durch Division ableiten. Ebenso leicht ist zu beweisen, daß auch nach der neuen Definition die Funktionen eines Winkels gleich den Cofunktionen des Complementwinkels sind.

In der Formel  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  ist das Vorzeichen zunächst zweifelhaft. Es ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Winkel  $\alpha$  dem ersten und vierten, oder dem zweiten und dritten Quadranten angehört.

[10) Will man auch die entbehrlicheren Funktionen Sekante oder Cossekante einführen, die sich durch die Gleichungen  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  und  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$  erklären lassen, so ergeben sich daraus die Vorzeichen  $+, -, -, +$  und  $+, +, -, -$ , die mit denen für Cosinus und Sinus übereinstimmen. In Fig. 107 ist ferner  $\sec \alpha = \frac{1}{OF} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OA} = \frac{OG}{1} = OG$  und  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{FE} = \frac{OE}{FE} = \frac{OH}{OB} = \frac{OH}{1} = OH$ . Die Sekante ist also das Stück des beweglichen Radius vom Mittelpunkte bis zum Schnitt mit der Tangente, die Cossekante das Stück desselben vom Mittelpunkte bis zum Schnitt mit der Cotangente. In der Figur ist ferner nach dieser Erklärung  $\sec(\pi - \alpha) = OG_1$ , was als Rückwärtsverlängerung des beweglichen

Radius und daher als negativ aufzufassen ist; ebenso  $\sec(\pi + \alpha) = OG$  aus demselben Grunde als negativ aufzufassen,  $\sec(2\pi - \alpha) = \sec(\pi - \alpha) = OG_1$ , was als positiv zu gelten hat, weil es in der Richtung mit dem beweglichen Radius übereinstimmt.

In entsprechender Weise ist  $\operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = OH_1$ , also positiv,  $\operatorname{cosec}(\pi + \alpha) = OH$ , also negativ,  $\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha) = OH_1$ , also negativ. Die weitere Behandlung dieser Funktionen kann jedoch als überflüssig unterlassen werden.]

11) Wächst der Bogen von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$ , so wächst der Sinus von 0 bis 1, die Tangente von 0 bis  $\infty$ , dagegen nimmt der Cosinus ab von 1 bis 0, die Cotangente von  $\infty$  bis 0. (Vgl. Fig. 107.)

Wächst der Bogen von  $\frac{\pi}{2}$  bis  $\pi$ , so nimmt der Sinus ab von 1 bis 0, der Cosinus von 0 bis  $-1$ , dagegen wächst die Tangente von  $-\infty$  bis 0, und die Cotangente nimmt ab von 0 bis  $-\infty$ .

Wächst der Bogen von  $\pi$  bis  $\frac{3}{2}\pi$ , so nimmt der Sinus ab von 0 bis  $-1$ , der Cosinus wächst von  $-1$  bis 0, die Tangente wächst von 0 bis  $+\infty$ , die Cotangente nimmt ab von  $+\infty$  bis 0.

Wächst der Bogen von  $\frac{3}{2}\pi$  bis  $2\pi$ , so wächst der Sinus von  $-1$  bis 0, der Cosinus von 0 bis 1, die Tangente von  $-\infty$  bis 0, die Cotangente aber nimmt ab von 0 bis  $-\infty$ .

Der Wert der Tangente macht einen Sprung von  $+\infty$  nach  $-\infty$ , sobald der bewegliche Radius die Lage  $\frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3}{2}\pi$  passiert. Für die Cotangente erfolgt der Sprung von  $-\infty$  nach  $+\infty$  bei dem Passieren der Lagen  $\pi$  und  $2\pi$  bzw. 0. Für die kritischen Stellen selbst bleibt der Wert zweifelhaft. Dies stimmt überein mit der Unbestimmtheit des Vorzeichens bei dem Bruche  $\frac{1}{0}$ , der  $+\infty$  und  $-\infty$  bedeuten kann, da man 0 als  $\pm 0$  auffassen darf\*).

[Da der Kreis bei  $A$  senkrecht auf dem ersten Radius steht, fällt der Sinus dort so nahe mit dem zugehörigen Bogen zusammen, daß man sagen darf, für sehr kleines  $\alpha$  sei  $\sin \alpha = \alpha$ . Ebenso ist für sehr kleines  $\alpha$  zu setzen  $\tan \alpha = \alpha$ .]

12) Zur Ergänzung der früher abgeleiteten Formeln sollen noch folgende Aufgaben für die Funktionen eines Winkels bzw. Bogens gelöst werden.

\*) Die Schreibweise  $\frac{1}{0} = \pm \infty$  ist nur als eine auf Übereinkunft beruhende zu betrachten, da wohl durch Unendlichkleines, nicht aber durch Null, wirklich dividiert werden kann.

a) Den Sinus eines Winkels durch die Tangente auszudrücken.

**Auflösung.** Es ist  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ , also durch  
 Quadrierung  $\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ , oder  $\tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ ,  
 $\sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha$ , folglich  $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ .

b) Den Cosinus durch die Tangente auszudrücken.

**Auflösung.**  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ , folglich  $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ ,  
 $\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1$ , folglich  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ .

c) Leite ebenso ab:  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ .

[Andere Ableitungen der Formeln a) und b) ergeben sich so:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha,$$

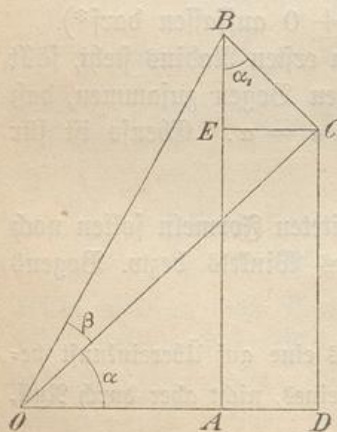
folglich

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}},$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \tan \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.]$$

## II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen.

Fig. 108.



13) **Aufgabe.** Den Sinus des Winkels  $(\alpha + \beta)$  durch die Funktionen der Einzelwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  auszudrücken.

**Auflösung.** In Fig. 108 sei  $\sphericalangle AOB = \alpha + \beta$ ,  $BA \perp OA$ ,  $BC \perp OC$ ,  $CD \perp OD$ ,  $EC \perp AB$ . Dabei ist  $\sphericalangle EBC = \alpha_1 = \alpha$ . (Warum?) Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{AB}{OB} = \frac{AE + EB}{OB} \\ &= \frac{DC}{OB} + \frac{EB}{OB}. \end{aligned}$$

Zu  $DC$  gehört die Hypotenuse  $OC$ , zu  $EB$

die Hypotenuse  $BC$ . Multipliziert man den Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit  $OC$ , die des zweiten mit  $BC$ , so erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DC \cdot OC}{OC \cdot OB} + \frac{BE \cdot BC}{BC \cdot OB} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Es ist also

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

**Bemerkung.** An der Figur sind nur geringfügige Änderungen nötig, wenn  $(\alpha + \beta)$  ein stumpfer Winkel, oder wenn  $\alpha$  oder  $\beta$ , oder beide Winkel stumpf sind. Die Formel hat überhaupt allgemeine Geltung.

14) Der Winkel  $\beta$  kann auch abgezogen werden. Dann handelt es sich, wenn man die Formel vorläufig weiter gelten läßt, um

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

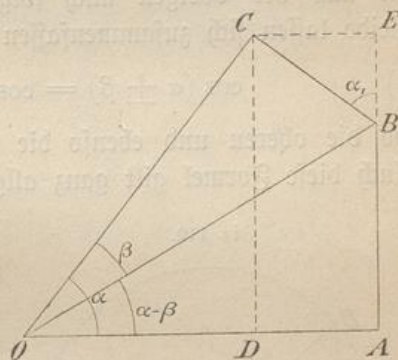
Für diesen Fall ist die entsprechende Zeichnung in Fig. 109 dargestellt, wo Winkel  $AOB = (\alpha - \beta)$ , alles andere wie vorher ist. Es wird

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \frac{AB}{OB} = \frac{AE - BE}{OB} \\ &= \frac{DC}{OB} - \frac{BE}{OB}. \end{aligned}$$

Erweitert man die Brüche wieder mit den zu  $DC$  und  $BE$  gehörigen Hypotenusen, so folgt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \frac{DC \cdot OC}{OC \cdot OB} - \frac{BE \cdot BC}{BC \cdot OB} \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

Fig. 109.



womit das Weitergelten der ersten Formel bewiesen ist. Beide Formeln vereinigen sich zu folgender:

$$1) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

in der die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören.

Ohne Geometrie ergeben sich die Erweiterungen der Gültigkeit für Winkel der übrigen Quadranten auf folgendem Wege. Sind z. B.  $\alpha$  und  $\beta$  spitz, so ist für die Summe der Winkel  $(\pi - \alpha)$  und  $\beta$ , von denen der erstere stumpf ist,

$$\begin{aligned} \sin[(\pi - \alpha) + \beta] &= \sin[\pi - (\alpha - \beta)] = \sin(\alpha - \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\pi - \alpha) \cos \beta + \cos(\pi - \alpha) \sin \beta. \end{aligned}$$

Ebenso ist für zwei stumpfe Winkel  $(\pi - \alpha)$  und  $(\pi - \beta)$

$$\begin{aligned} \sin [(\pi - \alpha) + (\pi - \beta)] &= \sin [2\pi - (\alpha + \beta)] \\ &= -\sin(\alpha + \beta) = -[\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta] \\ &= +\sin(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha) \sin(\pi - \beta). \end{aligned}$$

Dies genügt zum Beweise des Weitergeltens der Formel 1).

15) **Aufgabe.** Den Cosinus des Winkels  $(\alpha + \beta)$  durch die Funktionen der Einzelwinkel darzustellen.

**Auflösung.** In Figur 108 ist  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OD - AD}{OB}$   
 $= \frac{OD}{OB} - \frac{EC}{OB} = \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} - \frac{EC}{BC} \cdot \frac{BC}{OB} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

Demnach ist

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ebenso ergibt sich aus der Figur 109 die Formel

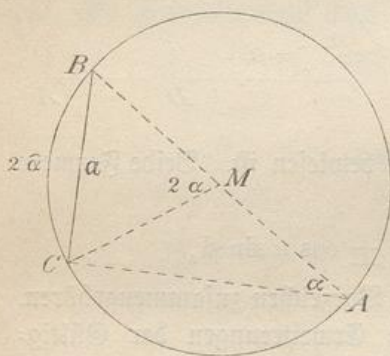
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

die aus der vorigen auch folgt, wenn man  $-\beta$  statt  $\beta$  einsetzt. Beide lassen sich zusammenfassen in

$$2) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Auch diese Formel gilt ganz allgemein.

Fig. 110.



[16] Die Formeln für die Funktionen von  $(\alpha + \beta)$  lassen sich auch mit Hilfe des Ptolemäischen Satzes (vergl. Seite 1) ableiten. Dazu ist folgende Vorbemerkung nötig. In Fig. 110 ist ein Kreis mit Radius 1, eine Sehne  $BC = a$  und der zugehörige Peripheriewinkel  $\alpha^\circ$  mit dem Durchmesser  $AB$  als Schenkel dargestellt. Dabei ist  $\sin \alpha^\circ = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{2}$ ,

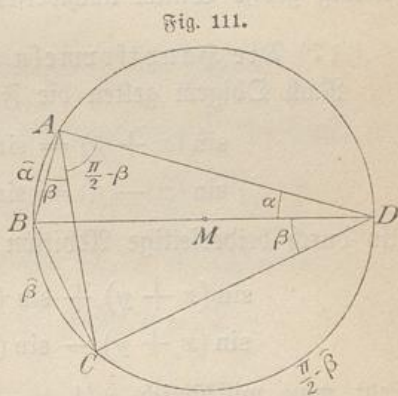
also Sehne  $BC = 2 \sin \alpha^\circ$ . Zum Peripheriewinkel  $\alpha^\circ$  gehört aber der Centriwinkel  $2\alpha^\circ$  und zu diesem der Bogen  $\widehat{BC}$ , der mit  $2\hat{\alpha}$  bezeichnet werden soll. Es ist also Sehne  $BC = 2 \sin \frac{\widehat{BC}}{2}$ , sobald der Kreisradius gleich 1 gesetzt wird. Dies

II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen.

gilt zugleich auch von dem größeren der beiden Kreisbogen, die zur Sehne  $BC$  gehören, d. h. von  $2\pi - 2\hat{\alpha} = 2(\pi - \hat{\alpha})$ , denn es ist  $\sin \frac{2(\pi - \hat{\alpha})}{2} = \sin \hat{\alpha} = \sin \frac{\widehat{BC}}{2}$ . Auch kann man jeden der beiden Bogen um  $2\pi$  oder ein beliebiges Vielfaches von  $2\pi$  vergrößern.

Macht man dagegen den Radius des Kreises  $= \frac{1}{2}$ , so gehört zum Peripheriewinkel  $\alpha^0$  der Bogen  $\widehat{BC} = r \cdot 2\hat{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 2\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$ , und es ist  $\sin \alpha^0 = \frac{BC}{1} = \overline{BC}$ . Folglich: Im Kreise mit dem Durchmesser 1 ist Sehne  $\overline{BC} = \sin \widehat{BC} =$  dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels.

Hieron wird Anwendung auf Fig. 111 gemacht. Im Kreise  $M$  mit Durchmesser  $BD = 1$  (und Radius  $r = \frac{1}{2}$ ) sind an den Durchmesser die Winkel  $BDA = \alpha$  und  $BDC = \beta$  nach verschiedenen Seiten angelegt, so daß  $\widehat{BA} = \hat{\alpha}$  und  $\widehat{BC} = \hat{\beta}$  die zugehörigen Kreisbogen sind. Dabei ist  $\sphericalangle CAD = 90^\circ - \beta$ , ebenso Bogen  $\widehat{CD} = \frac{\pi}{2} - \hat{\beta}$ . (Warum?)



Nach Ptolemäus ist nun

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

also nach der vorigen Entwicklung\*)

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \cdot 1 \\ &= \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\alpha + \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) \sin \beta \end{aligned}$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin \beta,$$

folglich

a)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

Legt man die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  auf derselben Seite des Durchmessers an und ist  $\alpha > \beta$ , so findet man ebenso

b)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$

\*) Die Bogen sind von jetzt ab einfach mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet.

Setzt man in b) statt  $\alpha$  den Bogen  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  ein, so erhält man

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta,$$

oder

$$c) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Setzt man dagegen in Formel b)  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  an Stelle von  $\alpha$ , so entsteht

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Die Ableitung für  $\alpha$  und  $\beta$  gilt allerdings zunächst nur für den Fall, daß  $\alpha$  und  $\beta$  spitze Winkel sind. Durch die in 14) angewandten Substitutionen läßt sich aber auch hier die Allgemeingültigkeit für beliebig große Winkel nachweisen.]

17) Die Hauptformeln für die Addition der Funktionen.  
Nach Obigem gelten die Formeln

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

also durch beiderseitige Addition bzw. Subtraktion:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y,$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

Setzt man willkürlich  $x + y = \alpha$  und  $x - y = \beta$ , so muß man, wie sich durch Addition und Subtraktion ergibt,  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$  und  $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$  setzen. So entstehen die Formeln

$$3) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$4) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ganz ebenso folgen aus den Formeln für  $\cos(x + y)$  und  $\cos(x - y)$  die folgenden:

$$5) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$6) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Die Formeln 3) bis 6) erleichtern die Berechnungen mit Hilfe der Logarithmen. Inwiefern?

## III. Goniometrische Übungen.

18) Im Folgenden werden Formeln abgeleitet, von denen nur die wichtigen nummeriert sind, die übrigen sind bloßes Übungsmaterial. An ihnen soll gezeigt werden, daß sich scheinbar komplizierte Ausdrücke bisweilen durch naheliegende Umformungen vereinfachen und namentlich für den logarithmischen Rechnungsansatz geeigneter machen lassen. Zunächst werden Formeln über die Winkel  $2\alpha$  und  $\frac{\alpha}{2}$  abgeleitet.

Setzt man in der Formel für  $\sin(\alpha + \beta)$  den Winkel  $\alpha$  statt  $\beta$  ein, so entsteht

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha,$$

folglich ist

$$7) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Macht man dasselbe mit der Formel für  $\cos(\alpha + \beta)$ , so erhält man

$$8) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Man kann auch schreiben (mit Hilfe von  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ )

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

und daraus folgt:

$$9) \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$10) \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Durch Division entsteht hieraus

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Es ist

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} \pm \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \pm 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1 \pm \sin \alpha,$$

folglich

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

also durch Addition bezw. Subtraktion

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

und durch Division

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}.$$

Aus  $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  folgt, wenn man die rechte Seite durch 1 oder  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  dividiert, wodurch nichts geändert wird:

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

und wenn man jedes Glied des Zählers und Nenners durch  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$  dividiert:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Auf demselben Wege ergibt sich aus  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  die Formel

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

19) Formeln für den Sinus bezw. Cosinus von  $3\alpha$ ,  $4\alpha$ ,  $5\alpha$ .

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man hier  $1 - \sin^2 \alpha$  statt  $\cos^2 \alpha$ , so folgt

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Ferner ist  $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$ , was sich noch auf  $\sin \alpha$  allein reducieren läßt.

Bilde ferner

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha,$$

was noch auf lauter Cosinus reducirt werden kann,

$$\cos 5\alpha = 5 \cos \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 16 \cos^5 \alpha.$$

20) Einige Tangentenformeln.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}.$$

Dividirt man den Zähler und Nenner der rechten Seite durch  $\cos \alpha \cos \beta$ , so entsteht

$$11) \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

Setzt man  $\beta = \alpha$ , so geben die oberen Vorzeichen

$$12) \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Da  $\tan 45^\circ = 1$  ist, so folgt aus 11)

$$\tan(45^\circ \pm \alpha) = \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}.$$

In ganz entsprechender Weise können auch Formeln für die Cotangente entwickelt werden.

21) Nach 3) ist

$$\begin{aligned} 1 + \sin \alpha &= \sin 90^\circ + \sin \alpha = 2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} 1 - \sin \alpha &= 2 \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Durch Division und Wurzelausziehung folgt

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}},$$

wozu die Schlußformel von Abschnitt 20) verglichen werden kann.

Von geringerer Bedeutung sind die Formeln

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Dagegen findet man Formeln von hervorragender Wichtigkeit im arithmetischen Teile (Abschnitt VI), wo sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt sind.

[22) Berechnung der Funktionen einiger besonderer Winkel.

In Teil I Seite 189 wurden die Werte einiger Winkelfunktionen auf geometrischem Wege berechnet. Goniometrisch erreicht man dasselbe folgendermaßen:

$$\text{Aus } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \text{ folgt z. B.}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Ebenso ist } \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Aus } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \text{ folgt z. B.}$$

$$\cos 90^\circ = 4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

oder, da die linke Seite gleich Null ist, nach Division durch  $\cos 30^\circ$ :

$$4 \cos^2 30^\circ = 3, \text{ also } \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sin 60^\circ.$$

Folglich

$$\sin 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

Aus der Formel für  $\cos 5\alpha$  folgt für  $\alpha = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$ , also für

$$5\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ und } \cos 5\alpha = 0, \quad 0 = 5 \cos \frac{\pi}{10} - 20 \cos^3 \frac{\pi}{10} + 16 \cos^5 \frac{\pi}{10},$$

also nach Division durch  $16 \cos \frac{\pi}{10}$

$$\cos^4 \frac{\pi}{10} - \frac{5}{4} \cos^2 \frac{\pi}{10} = -\frac{5}{16}.$$

Daraus würden sich für  $\cos^2 \frac{\pi}{10}$  die beiden Lösungen  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$  ergeben. Nun kann aber nur einer dieser Werte richtig sein. Bedenkt man z. B. daß  $\cos^2 18^\circ > \cos^2 30^\circ$ , d. h.  $> \frac{3}{4}$  oder  $\frac{6}{8}$  sein muß, so erkennt man, daß das negative Zeichen zu verwerfen ist. Demnach ist

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \sin 72^\circ.$$

Das andere Wurzelzeichen kommt in Folgendem zum Vorschein.  
Die Formel für  $\sin 5\alpha$  geht für  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  d. h.  $5\alpha = \pi$  über in

$$0 = 5 \sin \frac{\pi}{5} - 20 \sin^3 \frac{\pi}{5} + 16 \sin^5 \frac{\pi}{5},$$

oder nach Division durch  $16 \sin \frac{\pi}{5}$  in

$$\sin^4 \frac{\pi}{5} - \frac{5}{4} \sin^2 \frac{\pi}{5} = -\frac{5}{16}.$$

Auch hieraus würde für  $\sin^2 \frac{\pi}{5}$  folgen  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$ . Da aber  $\sin^2 36^\circ < \sin^2 45^\circ$ ,  
d. h.  $< \frac{1}{2}$  sein muß, so ist  $\frac{5 + \sqrt{5}}{8}$  zu groß, und es folgt

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \cos 54^\circ.$$

Aus  $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$  folgt für  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ :

$$\cos \frac{\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{10} - 1 = 2 \frac{5 + \sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos 36^\circ = \sin 54^\circ.$$

Aus  $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = 2 \left[ \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right]^2 - 1$  folgt  $\cos 72^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin 18^\circ$ .

Mit Hilfe der obigen Formeln lassen sich noch viele andere berechnen,  
z. B.  $\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $\cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  
 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ . Daraus folgt z. B.  
 $\sin 7\frac{1}{2}^\circ = \sin \frac{15^\circ}{2} = \frac{1}{4} [\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{6 - 3\sqrt{2}}]$ . Ferner ist  
 $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \sin \frac{45^\circ}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ,  $\cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  
 $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$ ,  $\cot 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + 1$  u. s. w.]

[23] Handelt es sich um die Winkel eines Dreiecks,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ ,  
so ist vor allem zu beachten, daß  $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$  und  $\frac{\alpha + \beta}{2}$   
 $= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  ist. Daraus folgt

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma, \quad \cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma, \quad \tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma,$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \cot \frac{\gamma}{2}.$$

Es folgt z. B. aus

$$\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma,$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\tan \gamma,$$

oder

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

Aus  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  folgt  $(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) + (90^\circ - \frac{\beta}{2}) + (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 270^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 180^\circ$ . Folglich gilt auch für diese neuen Dreieckswinkel die Formel

$$\begin{aligned} \tan\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \\ = \tan\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right), \end{aligned}$$

also ist für Dreieckswinkel überhaupt

$$\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}.$$

Aus

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[ 2 \cos \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

folgt

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Ähnliche Formeln lassen sich noch in größerer Zahl ableiten. Versuche z. B. folgende zu beweisen:

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1,$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \gamma = 4 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2}.$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 1,$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} - \cot \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 1,$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}.$$

[24) Goniometrische Gleichungen. (Vergl. Seite 161.)

Eine besondere Art von transcendenten Gleichungen erhält man, wenn die Unbekannte als Bogen oder Winkel von goniometrischen Funktionen vorkommt. Nur einige Beispiele seien angegeben.

**Aufgabe.** Für welche Winkel bzw. Bogen ist

$$a \sin x = b \cos x?$$

**Auflösung.**  $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}$ ,  $\tan x = \frac{b}{a}$ , also  $x = \arctan \frac{b}{a}$ , d. h.

$x$  ist der Bogen, dessen Tangente  $\frac{b}{a}$  ist. Der Bogen bzw. Winkel ist mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln zu bestimmen.

**Aufgabe.** Für welche Winkel bzw. Bogen ist

$$\sin x + \cos x = a?$$

**Auflösung.**  $\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} = a$ ,

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = a - \sin x, \quad 1 - \sin^2 x = a^2 - 2a \sin x + \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x - a \sin x = \frac{1 - a^2}{2}, \quad \sin x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2},$$

$$x = \arcsin \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

(Wie groß darf der absolute Betrag von  $a$  höchstens sein?)

**Aufgabe.** Für welchen Winkel bzw. Bogen ist

$$a \sin 2x = b \sin x?$$

**Auflösung.**  $2a \sin x \cos x = b \sin x$ ,  $\cos x = \frac{b}{2a}$ ,  $x = \arccos \frac{b}{2a}$ .

**Aufgabe.** Für welchen Winkel ist  $a \sin x = b \cot x$ ?

**Auflösung.**  $x = \arccos \frac{-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2a}$ .

## IV. Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks.

25) Der Tangentensatz.

Für die Dreieckswinkel gilt der Sinussatz  $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$ . Aus der Proportion

$$\sin \alpha : \sin \beta = a : b$$

folgt nach Teil I, Geometrie Nr. 152

$$(\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta) = (a + b) : (a - b).$$

Schreibt man dies in Bruchform, so ergibt sich durch Umformung der Klammern

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}$$

oder

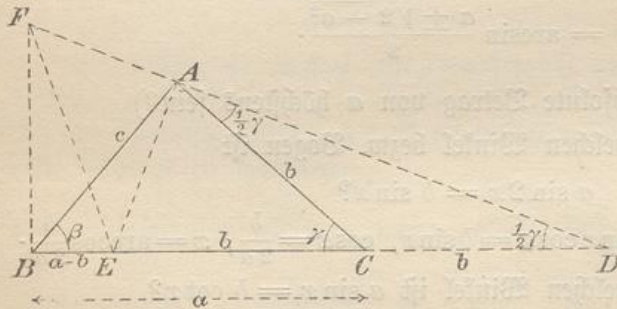
$$1) \quad \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}.$$

Dieser Satz heißt der Tangentensatz. Drücke ihn in Worten aus. Mit seiner Hilfe kann man ein Dreieck aus  $a$ ,  $b$  und  $\gamma$  berechnen, da dann  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  ist. Man berechnet

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und findet durch Addition und Subtraktion aus  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  und  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ 

Fig. 112.

die Werte für  $\alpha$  und  $\beta$ . (Eine leichte Probe ergibt sich daraus, daß  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  sein muß.)[Geometrische Ableitung des Tangentensatzes: Am Dreieck  $ABC$  in Fig. 112 sei  $CE = b$  und die Verlängerung  $CD = b$ ,also  $BE = a - b$  und  $BD = a + b$ . Die Verbindungslinie  $DA$  ist bis zum Schnitte mit dem Lote  $BF$  verlängert. Dabei ist  $\sphericalangle CDA$

$= \frac{\gamma}{2}$ , folglich  $\sphericalangle BFD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Da ferner  $BEAF$  ein Sehnenviereck ist, denn seine Winkel bei  $A$  und  $B$  sind rechte, so ist  $\sphericalangle AFE = \sphericalangle \beta$  als Peripheriewinkel über  $AE$ . Folglich ist  $\sphericalangle BFE = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Nun ist  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{BD}{BF} = \frac{a + b}{BF}$ , und  $\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{BE}{BF} = \frac{a - b}{BF}$ . Durch beiderseitige Division folgt aus den letzten Gleichungen

$$\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}.$$

[Diese Entwicklung ist von den goniometrischen Summenformeln unabhängig und kann auch vor denselben durchgenommen werden.]

25a) Folgerungen des Cosinussatzes.

Nach dem Cosinussatz ist

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten 1 addiert,

$$1 + \cos \gamma = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab},$$

oder, wenn man im Zähler die Differenz der Quadrate in ein Produkt zerlegt,

$$1 + \cos \gamma = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab}.$$

Nun ist aber

$$1 + \cos \gamma = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

folglich ist

$$2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab},$$

und

$$2) \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4ab}} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}} = \sqrt{\frac{p \cdot p_3}{ab}},$$

wo in früherer Bezeichnungsweise (vgl. Teil I Geom. Nr. 119 und 120)  $\frac{a + b + c}{2} = p$ ,  $\frac{a + b - c}{2} = p_3$  gesetzt ist, und eine einfache Deutung der  $p$  als Tangenten des In-Kreises möglich ist.

In ähnlicher Weise folgt aus der Anfangsgleichung

$$1 - \cos \gamma = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab},$$

also, da  $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$  ist,

$$3) \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{4ab}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{ab}}.$$

Aus 2) und 3) folgt durch Multiplikation und Zusetzung des Faktors 2, da  $2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \gamma$  ist,

$$4) \quad \sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\ = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{ab} \sqrt{pp_1 p_2 p_3};$$

durch Division dagegen folgt

$$5) \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{pp_3}}.$$

Der Inhaltsatz giebt, wie in Teil I:

$$6) \quad F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{pp_1 p_2 p_3}.$$

Damit sind die in Teil I auf geometrischem Wege abgeleiteten Formeln im wesentlichen goniometrisch entwickelt. Die Radien der Berührungskreise  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  ergeben sich, wie in Teil I, aus  $F = \frac{p q}{2} = \frac{p_1 q_1}{2} = \frac{p_2 q_2}{2} = \frac{p_3 q_3}{2}$  als

$$q = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}}, \quad q_3 = \sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}};$$

die Tangenten der halben Winkel ergeben sich in Bezug auf  $q$  als

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{p_1}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{q}{p_2}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q}{p};$$

es ist aber auch

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q_1}{p}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{q_2}{p}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q_3}{p}.$$

25b) Nach dem Sinussatze ist  $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$  und  $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ ,  
also auch

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma}$$

oder, da  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$  ist,

$$(a+b) \sin(\alpha + \beta) = c(\sin \alpha + \sin \beta),$$

also

$$(a+b) 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2c \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

so daß

$$7) \quad (a+b) \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ebenso folgt aus dem Sinussatze

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \gamma}$$

oder

$$(a-b) 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2c \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

folglich

$$8) \quad (a-b) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Durch Division kann man aus 7) und 8) den Tangentensatz ableiten.  
Durch beiderseitige Quadrierung und Addition erhält man ferner

$$(a+b)^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = c^2.$$

Ist von einem Dreieck  $a$ ,  $b$  und  $\gamma$  gegeben, so erhält man durch Berechnung der Logarithmen der linken Seiten von 7) und 8) zugleich die Logarithmen der rechten Seiten und durch Subtraktion derselben  $\lg \left[ c \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right] - \lg \left[ c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right] = \lg \tan \frac{\alpha - \beta}{2}$ , woraus sich der Winkel  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  ergibt. Durch Addition bezw. Subtraktion zu  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  gelangt man auf  $\alpha$  und  $\beta$ , so daß man sämtliche Dreieckswinkel hat, deren Summe wieder auf  $180^\circ$  führen muß, wenn man richtig gerechnet hat. (Probe.)

Die Sätze 7) und 8) werden bisweilen als der Gaußsche Doppelsatz bezeichnet.

## V. Dreiecksberechnungen.

26) Bei den Dreiecksberechnungen kommt es wesentlich darauf an, ob nur nach einem einzigen Stück gefragt ist, oder ob sämtliche noch nicht bekannten Seiten bezw. Winkel und zugleich der Inhalt oder auch die Radien der Hauptkreise berechnet werden sollen.

Sind z. B.  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben und wird nur nach einem Winkel, z. B.  $\gamma$ , gefragt, so benutzt man z. B. die Formeln

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}} \quad \text{oder} \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}}$$

die im allgemeinen bequemer sind, als die aus dem Cosinussatze entspringende Formel  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ . (Letztere ist nur bei kleineren Zahlenwerten vorzuziehen, bei denen Logarithmen nur gegen den Schluß nötig sind.)

Wird dagegen nach allen Winkeln und zugleich nach dem Inhalt gefragt, so berechnet man die Hilfsgröße

$$q = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}$$

und bildet  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{p_1}$ ,  $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{q}{p_2}$  (zur Probe  $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q}{p_3}$ ) und endlich  $F = p \cdot q$ .

Ist  $a$ ,  $b$  und  $\gamma$  gegeben, und wird nur nach  $F$  gefragt, so nimmt man die Formel  $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ . Wird dagegen nach  $\alpha$  und  $\beta$  gefragt, so benutzt man zur Berechnung von  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  den Tangentensatz, wie es früher erläutert wurde, oder auch den Gaußschen Doppelsatz. Aus  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  und  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  findet man  $\alpha$  und  $\beta$  und mit Hilfe des Sinussatzes  $c$ . Den Cosinussatz  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$  wird man nur anwenden, wenn lediglich nach  $c$  gefragt wird.

Bei Anwendung von Logarithmen wird man im allgemeinen die Produktformeln vorziehen.

27) Im allgemeinen entspricht jeder Aufgabe aus dem Gebiete der Dreieckskonstruktionen eine Berechnungsaufgabe trigonometrischer Art. Ist die erstere gelöst, so kann man in der Regel daraus den Berechnungsweg für die andere ableiten. Bisweilen kommt man aber auf rein trigonometrischem Wege noch schneller zum Ziele.

Bei schwieriger erscheinenden Aufgaben helfen bisweilen Beziehungen, die aus der Geometrie bekannt sind oder sich leicht auf trigonometrischem Wege ableiten lassen. Namentlich zwischen  $r$ ,  $\varrho$ ,  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$ ,  $F$  und den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  finden zahlreiche Beziehungen solcher Art statt. Einige mögen im Folgenden entwickelt werden.

28) Soll die Dreiecksfläche aus  $r$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  berechnet werden, so handelt es sich um  $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ , wo  $a = 2r \sin \alpha$ ,  $b = 2r \sin \beta$  ist, also um

$$1) \quad F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Soll außerdem  $\varrho$  berechnet werden, so erhält man aus  $F = \frac{a+b+c}{2} \varrho$  durch Einsetzung von  $a = 2r \sin \alpha$  u. s. w.

$$F = r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \varrho,$$

oder, da nach Abschnitt 23 für die Klammer  $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$  geschrieben werden kann,

$$2) \quad F = 4r\varrho \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Führt man in Formel 1)  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$  und  $\frac{\gamma}{2}$  ein, z. B.  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ , so ergibt sich aus der Vergleichung von 1) und 2)

$$3) \quad \varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Durch Division folgt noch aus 2) und 3)

$$4) \quad F = \varrho^2 \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2},$$

so daß  $F$  auch aus  $\varrho$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  berechnet werden kann.

Es ist ferner

$$F = \frac{a+b-c}{2} \varrho_3 = r(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma) \varrho_3,$$

oder, da nach Abschnitt 23 für die Klammer  $4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$  geschrieben werden kann,

$$5) \quad F = 4r\varrho_3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Durch Vergleich mit der auf die halben Winkel reducierten Formel 1) folgt

$$6) \quad \varrho_3 = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

so daß auch  $\varrho_3$  aus  $r$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ , und ebenso  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  berechnet werden können.

Durch Division folgt aus 3) und 6)

$$7) \quad \frac{\varrho}{\varrho_3} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2},$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Radien der sämtlichen Berührungskreise gegeben ist. (Cyclische Vertauschung der Indices und Winkel.)

Durch Vergleich mit 4) folgt noch

$$8) \quad F = \varrho \varrho_3 \cot \frac{\gamma}{2}.$$

Aus den Formeln 3) und 6) und aus Abschnitt 23 folgen die nachstehenden:

$$9) \quad \begin{cases} -1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{\varrho}{r}, \\ 1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{\varrho_1}{r}, \\ 1 + \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{\varrho_2}{r}, \\ 1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{\varrho_3}{r}. \end{cases}$$

Durch Addition der drei letzten erhält man

$$3 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3}{r},$$

oder nach Abschnitt 23

$$4r \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1 \right] = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3.$$

Aus 3) folgt ebenso

$$4r \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1 \right] = \varrho + 4r,$$

also gilt die geometrische Formel

$$1) \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

(Vergl. Geometrie Nr. 10.)

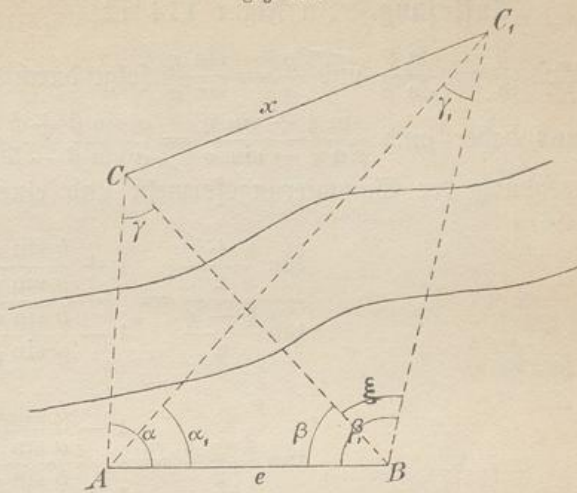
Es giebt noch eine reiche Fülle ähnlicher Formeln, aus denen sich ganze Gruppen von Berechnungsaufgaben ableiten lassen.

## 29) Aufgabe.

Fig. 113.

Diesseits eines Stromes ist eine Standlinie  $AB = e$  gemessen. Um eine Strecke  $CC_1$  jenseits desselben zu bestimmen, mißt man bei  $A$  die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha_1$ , bei  $B$  die Winkel  $\beta$  und  $\beta_1$ . Wie ist  $CC_1 = x$  zu berechnen? (Figur 113.)

**Auflösung.** Die Winkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$  und  $\xi = \beta_1 - \beta$  sind be-

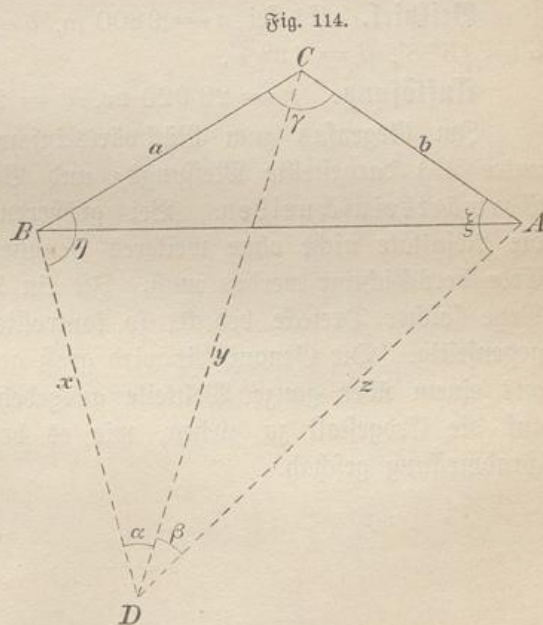


kannt. Aus dem Sinussatze folgt  $BC = \frac{e \sin \alpha}{\sin \gamma}$ ,  $BC_1 = \frac{e \sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}$ , also aus dem Cosinussatze die Berechnungsformel

$$x = e \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}\right)^2 - 2 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} \cos \xi}.$$

30) Bei der letzten Aufgabe mußte mit den Feldmehapparaten bei  $A$  und  $B$  gearbeitet werden. Wichtiger ist es für den Landmesser, den Ort eines Standpunktes zu bestimmen, indem man nur von dort aus nach den Ecken eines bereits festgelegten Dreiecks visiert. Dies ist die sogenannte *Pothentische Aufgabe* oder das sogenannte *Rückwärtseinschneiden*. Die Aufgabe kommt auf folgende hinaus:

**Aufgabe.** Die Seiten  $a$  und  $b$  eines Dreiecks, von dem man auch den Winkel  $\gamma$  kennt, erscheinen von einem Standpunkte  $D$  aus unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Wie weit ist  $D$  von den Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  entfernt?



**Auflösung.** In Figur 114 ist  $\frac{\xi + \eta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ .

Aus  $\frac{y}{b} = \frac{\sin \xi}{\sin \beta}$  und  $\frac{y}{a} = \frac{\sin \eta}{\sin \alpha}$  folgt durch Division  $\frac{\sin \xi}{\sin \eta} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}$  und daher auch  $\frac{\sin \xi + \sin \eta}{\sin \xi - \sin \eta} = \frac{a \sin \beta + b \sin \alpha}{a \sin \beta - b \sin \alpha}$ , oder unter Anwendung der Summierungsformeln und einer einfachen Umformung

$$\frac{\tan \frac{\xi + \eta}{2}}{\tan \frac{\xi - \eta}{2}} = \frac{1 + \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}{1 - \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}$$

also

$$\tan \frac{\xi - \eta}{2} = \frac{1 - \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}{1 + \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}} \tan \frac{\xi + \eta}{2}.$$

Daraus bestimmt sich  $\frac{\xi - \eta}{2}$ , so daß man mit Hülfe von  $\frac{\xi + \eta}{2}$  auch  $\xi$  und  $\eta$  findet.

Nach dem Sinussatze erhält man schließlich

$$x = a \frac{\sin(\eta + \alpha)}{\sin \alpha}, \quad y = a \frac{\sin \eta}{\sin \alpha} = b \frac{\sin \xi}{\sin \beta}, \quad z = b \frac{\sin(\xi + \beta)}{\sin \beta}.$$

**Beispiel.** Es sei  $a = 9800$  m,  $b = 12500$  m,  $\gamma = 110^\circ 20'$ ,  $\alpha = 15^\circ 8'$ ,  $\beta = 19^\circ 7'$ .

**Auflösung.**  $x = 29920$  m,  $y = 28435$  m,  $z = 17392$  m.

Im Gegensatz zum Rückwärtseinschneiden bezeichnet man die unter 29) dargestellte Messungs- und Berechnungsmethode als das Vorwärtseinschneiden. Bei größeren Entfernungen darf man die Resultate nicht ohne weiteres benutzen, da die Krümmung der Erde berücksichtigt werden muß. Ist ein Land vollständig mit einem Netze solcher Dreiecke bedeckt, so kontrollieren sie sich gewissermaßen gegenseitig. Die Genauigkeit wird groß genug, um z. B. zu gestatten, aus einem über ganze Weltteile ausgebreiteten Dreiecksnetze Schlüsse auf die Erdgestalt zu ziehen, wie es bei der großen europäischen Gradmessung geschah.

## VI. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha.$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Bedeutet  $f(\alpha)$  eine goniometrische Funktion von  $\alpha$ , so ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = f(\pi + \alpha) = f(2\pi - \alpha) = f(-\alpha).$$

Das Vorzeichen bestimmt sich aus der Quadrantentabelle:

$$\text{Sinus} \quad + \quad + \quad - \quad -$$

$$\text{Cosinus} \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$\text{Tangente} \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$\text{Cotangente} \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Sinusſatz:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Cosinusſatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma.$$

Tangentenſatz:

$$(a + b) : (a - b) = \tan \frac{\alpha + \beta}{2} : \tan \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Inhaltsſatz:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{pp_1p_2p_3},$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{ab}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{ab}},$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{pp_3}{ab}}.$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{pp_3}}, \quad \sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{pp_1p_2p_3}.$$

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}}, \quad q_3 = \sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}}.$$

$$F = pq = p_1q_1 = p_2q_2 = p_3q_3.$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{p_1} = \frac{q_1}{p}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{q}{p_2} = \frac{q_2}{p}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q}{p_3} = \frac{q_3}{p}.$$

## Vierte Abteilung.

# Stereometrie.

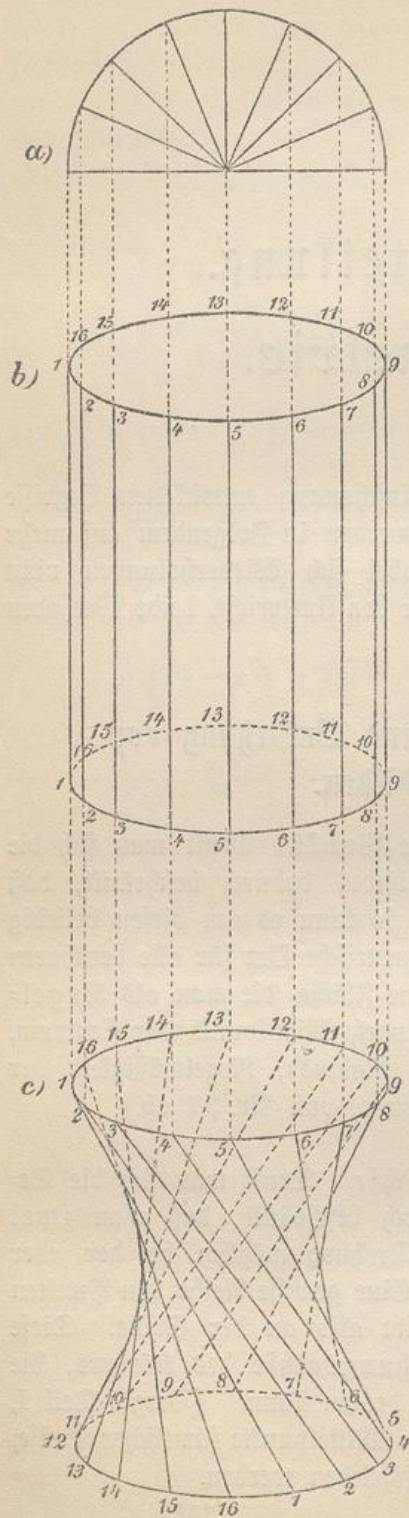
Die im ersten Teile aus der Anschauung entwickelten Begriffe und Grundlagen der Raumgeometrie werden in Folgendem auf mehr mathematischem Wege untersucht, wobei sich Wiederholungen nicht vermeiden lassen. Es empfiehlt sich für den Unterricht, beide Methoden vergleichend zu behandeln.

### I. Begriff der Drehung und Entstehung von Drehungsgebilden.

1) Drehung um einen festen Punkt. Denkt man sich die Beweglichkeit eines (starren) Raumgebildes dadurch beschränkt, daß man einen seiner Punkte fest macht, so kann es um diesen beliebig bewegt, d. h. gedreht werden. Der geometrische Ort für alle denkbaren Lagen jedes seiner Punkte ist dabei eine Fläche, die man als Kugelfläche bezeichnet. [Kugelförper, oder Kugel, Mittelpunkt oder Centrum, Durchmesser (Diameter), Halbmesser (Radius), Regelmäßigkeit der Fläche u. s. w. siehe in Teil I, Geometrie, von Nr. 37 ab.]

2) Drehung um eine feste Achse. Denkt man sich die Beweglichkeit eines Raumgebildes dadurch beschränkt, daß man zwei seiner Punkte fest macht, so ist eine Drehung möglich, bei der jeder seiner Punkte einen Kreis beschreibt. Eine gewisse Reihe von Punkten beschreibt unendlich kleine Kreise, bleibt also an der Stelle. Diese Punkte bilden die (geradlinige) Drehungsachse des Körpers, die man sich bis ins Endlose verlängert denken kann. (Vergl. Teil I, Geometrie, Nr. 11.) Sie geht durch die Mittelpunkte sämtlicher Kreise, die von den Punkten des Gebildes beschrieben werden.

Fig. 115.



Jede Linie des Raumgebildes beschreibt eine Fläche, die man als Drehungsfläche (oder Rotationsfläche) bezeichnet.

Jede Gerade, welche die Drehungsachse unter einem unveränderlichen Winkel schneidet, beschreibt eine besondere Art von Kegelfläche (Kreiskegel). Der Schnittpunkt heißt die Spitze des Kegels. In ihr treffen die beiden Teile des Kegels zusammen.

Ist der Schnittwinkel ein rechter, so geht die Kegelfläche in eine Fläche über, die man als Ebene bezeichnet.

Liegt der Schnittpunkt unendlich fern, ist also die Gerade parallel zur Drehungsachse, so entsteht eine besondere Art von Cylinderfläche (Kreiscylinder).

Jede unbegrenzte Gerade, die weder parallel zur Drehungsachse ist, noch sie irgendwo schneidet (welche sie also kreuzt, vergl. Teil I, Geom. Nr. 13), beschreibt beim Drehen eine eigentümliche Fläche, die den Namen Drehungshyperboloid\*) führt. Im besonderen Falle der später zu erläuternden senkrechten Kreuzung wird diese Fläche zur Ebene.

[Ihr Modell kann man ohne Mühe anfertigen. Zwei kreisförmige Pappscheiben werden am Rande in regelmäßigen Abständen durchlöchert, und durch die Löcher werden Fäden gezogen, so daß ein Cylindermodell (Fig. 115 b) entsteht. Verdreht man die parallel bleibenden Pappscheiben gegen einander, so entsteht das Modell einer nach der Mitte hin eingeschnürten Fläche, der

\*) Die Entstehung des Namens kann hier noch nicht erklärt werden.

besprochenen Hyperboloidfläche (Fig. 115 e). Man kann durch fortgesetztes Verdrehen die Einschnürung so weit treiben, daß der (doppelte) Kegel entsteht. Fig. 115 a deutet an, wie die Zeichnung korrekt herzustellen ist.]

Jeder Halbkreis, dessen Durchmesser mit der Drehungsachse zusammenfällt, beschreibt eine Kugel, denn die Radien des Halbkreises bleiben auch bei der Drehung einander gleich und werden solche der Kugel.

3) Unbeweglichkeit. Macht man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines starren Raumgebildes fest, so ist eine Drehung und überhaupt eine Bewegung nicht mehr möglich. An Stelle der drei Punkte können eine Gerade und ein Punkt außerhalb derselben treten. Auch zwei Gerade leisten dasselbe.

## II. Ebenen und Gerade im Raume.

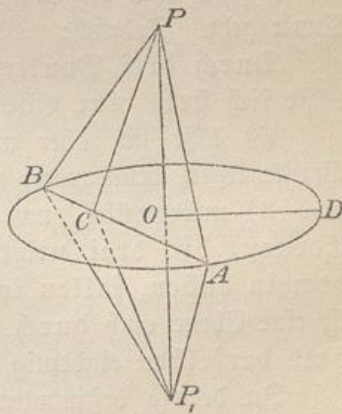
4) Gerade und Normalebene. Nach 2) entsteht eine Ebene durch Drehung einer Geraden um eine sie senkrecht schneidende Achse. Aus dieser Entstehungsart lassen sich die Eigenschaften der Ebene ableiten.

Markiert man auf der Drehungsachse zwei Punkte, die gleichweit von der Geraden entfernt sind, so ist jeder Punkt der letzteren von den beiden markierten Punkten gleichweit entfernt. Dies bleibt auch bei der Drehung der Fall, so daß jeder Punkt der entstehenden Ebene gleichweit von den beiden markierten Punkten entfernt ist. Folglich:

Die Ebene ist der geometrische Ort aller Raumpunkte, die von dem einen von zwei festen Punkten dieselbe Entfernung haben, wie von dem anderen.

Verbindet man zwei beliebige Punkte  $A$  und  $B$  der entstandenen Ebene (Fig. 116) durch eine Gerade, so liegt diese ganz in der Ebene. Verbindet man nämlich  $A$  und  $B$  und außerdem einen beliebigen Punkt  $C$  der Geraden mit den markierten Punkten  $P$  und  $P_1$ , so ist zunächst  $\triangle APB \cong \triangle AP_1B$ , weil Übereinstimmung in allen drei Seiten stattfindet, folglich  $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BAP_1$ . Daraus folgt, daß

Fig. 116.



$\triangle CAP \cong \triangle CAP_1$  ist, folglich ist  $CP = CP_1$ . Demnach liegt  $C$  und ebenso jeder andere Punkt der Geraden  $AB$  und ihrer Verlängerung in der entstandenen Ebene. Also:

Die Ebene ist diejenige Fläche, die jede Gerade, die zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in sich aufnimmt.

Da bei der Drehung des rechten Winkels ( $POD$  in Fig. 116) um den einen Schenkel ( $PO$ ) seine Größe sich nicht ändert, so steht jede durch  $C$  gelegte Gerade der entstandenen Ebene auf der Drehungsachse  $PP_1$  senkrecht. Daher sagt man, die Ebene stehe senkrecht auf der Drehungsachse, sie sei eine Normalebene der Achse  $PP_1$ . Umgekehrt sagt man, die Drehungsachse stehe senkrecht auf der Ebene, sei eine Normale derselben. (Lot auf der Ebene.)

Man kann auch sagen: Der geometrische Ort aller Geraden, die auf einer anderen Geraden in einem gegebenen Punkte senkrecht stehen, ist eine Normalebene der letzteren Geraden.

Die Gerade  $AB$  in Fig. 116 liegt in einer Ebene, die senkrecht zu  $PP_1$  ist und schneidet dabei  $PP_1$  nicht. Da die Parallele zu  $AB$ , die sich in der Ebene durch  $O$  legen läßt, senkrecht zu  $PP_1$  ist, so sagt man,  $AB$  kreuze die Gerade  $PP_1$  senkrecht. Bei der Drehung um  $PP_1$  bewegt sich die Ebene in sich selbst, folglich beschreibt  $AB$  dabei dieselbe Ebene. Dies ist der unter 2) bei dem Drehungshyperboloid bemerkte Spezialfall.

5) Festlegung einer Ebene. Macht man zwei Punkte einer unbegrenzten Ebene fest, so ist eine Drehung möglich. Nimmt man außerhalb der geraden Verbindungslinie einen festen Punkt im Raume an, so kann man die Ebene so weit drehen, daß sie auch durch diesen Punkt geht. Folglich:

Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, läßt sich stets eine Ebene legen.

Es läßt sich aber nur eine einzige Ebene durch drei solche Punkte legen, denn macht man diese Punkte der Ebene fest, so ist sie nach 3) unbeweglich, und eine zweite Lage für sie ist unmöglich. Ebenen, die drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemein haben, fallen in allen Punkten zusammen. Demnach ist eine Ebene auch durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben eindeutig bestimmt.

In der so bestimmten Ebene läßt sich zur gegebenen Geraden eine Parallele legen. Also ist eine Ebene auch durch zwei gegebene Parallele vollständig bestimmt.

Ebenso ist eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade

eindeutig bestimmt, denn diese lassen sich als Verbindungslinien dreier gegebener Punkte betrachten.

So ist z. B. die Normalebene zu einer Geraden in jedem Punkte der letzteren vollständig bestimmt, sobald man auf der Geraden in dem betreffenden Punkte zwei Lote errichtet. Man schließt daraus:

Wird eine Ebene von einer Geraden geschnitten, und steht die letztere senkrecht auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so ist die Gerade ein Lot auf der Ebene, und die Ebene ist eine Normalebene der Geraden.

Durch vier Punkte läßt sich im allgemeinen keine Ebene legen, denn der vierte Punkt braucht nicht in der durch die drei anderen bestimmten Ebene zu liegen.

Ebenso läßt sich durch zwei Gerade im allgemeinen keine Ebene legen, da ihre vier Endpunkte nicht in einer solchen zu liegen brauchen. Gerade, durch die sich keine Ebene legen läßt, sind die besprochenen sich kreuzenden Geraden.

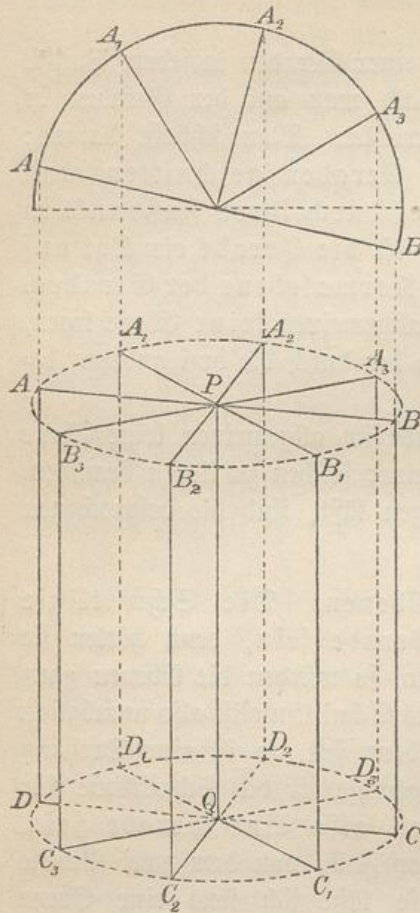
6) Zwei sich schneidende Ebenen. Die Schnittlinie zweier Ebenen kann nur eine Gerade sein, denn hätten sie einen Punkt außerhalb derselben gemein, so würden die Ebenen ganz zusammenfallen. Eine krumme Linie als Schnittlinie ist also unmöglich.

[Hält man zwei Punkte einer Ebene fest, so ist eine Drehung möglich. Die unveränderliche Drehungsachse ist die Schnittlinie für je zwei Lagen der Ebene. Sie muß also eine Gerade sein. Letzteres ist auch bei jedem Körper der Fall, von dem zwei Punkte festgehalten werden, denn durch diese läßt sich stets eine Ebene legen. So bestätigt sich die entsprechende Bemerkung in 2.]

7) Schnittwinkel zweier Ebenen. In Fig. 117 ist ein Rechteck  $ABCD$  dargestellt, welches durch Drehung um die Mittellinie  $PQ$  in verschiedene Lagen  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ ,  $A_3B_3C_3D_3$  gebracht worden ist. Dabei haben sich die Geraden  $AD$  und  $BC$  auf einem Kreiszylinder bewegt, die Geraden  $AB$  und  $CD$  dagegen in Normalebene zu  $PQ$ , die man als die Grundflächen (Grundkreise) des Zylinders bezeichnet. Folgen nun die verschiedenen Lagen von  $AB$  bzw.  $CD$  z. B. unter Winkeln von  $45^\circ$  aufeinander, so sagt man auch von dem Schnittwinkel je zweier benachbarter dieser Ebenen, daß er  $45^\circ$  betrage. (Für die Figur ist absichtlich eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Lage gewählt worden, damit Anleitung zur Behandlung schwierigerer Fälle gegeben werde.)

Also: Man mißt den Schnittwinkel zweier Ebenen, indem man auf der Schnittlinie in einem Punkt Lote er-

Fig. 117.



richtet, die in den Ebenen liegen, und in der Ebene dieser Lote den von ihnen eingeschlossenen Winkel mißt.

In Fig. 117 stehen z. B. sämtliche durch  $PQ$  gelegte Ebenen auf beiden Grundebenen senkrecht, denn die Ebene  $ABCD$  z. B. hat mit der unteren Ebene die Schnittlinie  $CD$ , auf der in  $Q$  die Lote  $QP$  und  $QC_2$  errichtet sind. Nun ist aber  $PQC_2$  ein rechter Winkel, also steht die Ebene  $ABCD$  senkrecht auf der Grundebene. Folglich:

Sämtliche Ebenen, die sich durch eine Gerade legen lassen, stehen senkrecht auf jeder Normalebene der Geraden.

In Fig. 117 ist  $ABCD$  Normalebene zu  $C_2D_2$ . Sie steht auf der Grundebene senkrecht, weil  $\sphericalangle C_2QP = 90^\circ$  ist. Folglich:

Jede Normalebene zu einer Geraden einer Ebene steht auf der letzteren senkrecht.

Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht auch ihre Schnittlinie senkrecht auf der dritten. Handelt es sich z. B. um die Ebenen  $ABCD$  und  $A_1B_1C_1D_1$ , die sich in  $PQ$  schneiden und auf der Grundebene (Fig. 117) senkrecht stehen, so muß das auf der letzteren in  $Q$  errichtete Lot beiden Ebenen gemeinsam sein, also mit ihrer Schnittlinie zusammenfallen.

8) Parallele Ebenen. Die um  $PQ$  gedrehten Geraden  $AB$  und  $DC$  in Fig. 117 haben an allen Stellen denselben Abstand von einander. Durch die Drehung der durch  $AB$  und  $DC$  gelegten Ebene um  $PQ$  wird dies nicht geändert, die entstehenden Grundebenen haben also überall denselben Abstand von einander, der durch das gemeinschaftliche Lot  $PQ$  gemessen werden kann. Folglich: Die Normalen ebener derselben Geraden sind unter einander parallel.

Zieht man in einer von zwei parallelen Ebenen eine Gerade

so hat sie von der anderen Ebene überall denselben Abstand, man sagt also, die Gerade sei zur anderen Ebene parallel.

Legt man durch die Gerade eine die parallele Ebene schneidende Ebene, so ist die Schnittlinie zur Geraden parallel, denn soweit man auch beide Gerade verlängert, giebt es doch keinen Schnittpunkt, obwohl sie derselben Ebene angehören.

Sind eine Ebene und eine Gerade parallel, so lassen sich demnach in der Ebene unzählige Parallelen zur Geraden ziehen.

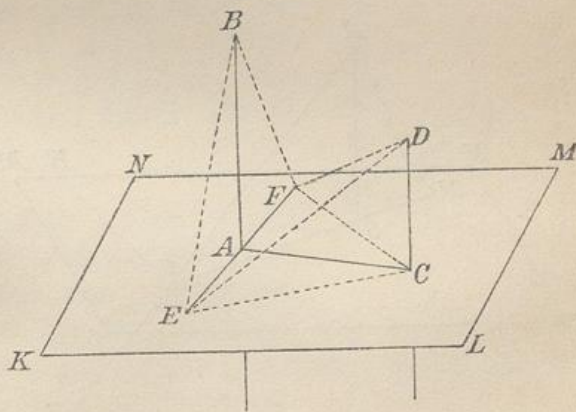
Eine Ebene ist zu einer Geraden parallel, wenn sich in der Ebene eine Parallele zur Geraden ziehen läßt.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Geraden in der einen zur anderen Ebene parallel sind. Denn schnitten sich die Ebenen, so müßte die Schnittlinie zu jeder der sich schneidenden Geraden parallel sein, was unmöglich ist.

Zieht man in zwei parallelen Ebenen zwei nicht parallele Geraden, so schneiden sie sich nicht, obwohl sie nicht parallel sind, sie kreuzen sich also. Legt man durch die sich kreuzenden Geraden Ebenen, die auf den beiden gegebenen Ebenen senkrecht stehen, so schneiden sie sich in einer Geraden, die senkrecht auf beiden Ebenen, also auch senkrecht auf den sich kreuzenden Geraden steht. So findet man das gemeinschaftliche Lot und zugleich den kleinsten Abstand der sich kreuzenden Geraden. Die beiden Hülfs Ebenen haben einen Schnittwinkel, den man zugleich den Kreuzungswinkel der beiden Geraden nennt.

9) Parallele Gerade im Raume.  
In Fig. 118 sind zwei Gerade  $AB$  und  $CD$  dargestellt, die auf einer Ebene  $KLMN$  senkrecht stehen. Es fragt sich, ob diese Lote als parallel betrachtet werden dürfen. Zur Untersuchung ziehe man  $AC$  und durch  $A$  in der Ebene  $EF \perp AC$ , wobei  $EA = FA$  gemacht werde. Verbindet man  $E$  und  $F$  mit  $B$ ,  $C$  und  $D$ , so findet man aus der Kongruenz entsprechender Dreiecke, daß auch  $EB = FB$

Fig. 118.



man aus der Kongruenz entsprechender Dreiecke, daß auch  $EB = FB$

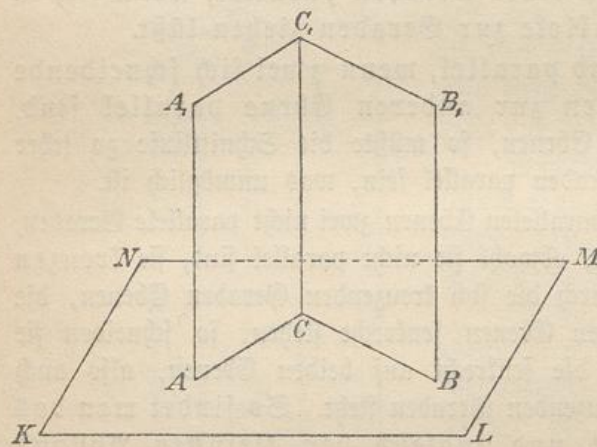
$EC = FC$ ,  $ED = FD$  ist, folglich liegen  $B$ ,  $A$ ,  $C$  und  $D$  als Punkte, die gleichweit von  $E$  und  $F$  entfernt sind, in einer Ebene. In dieser Ebene ist  $AB \parallel CD$ , denn beide stehen senkrecht auf  $AC$ . Folglich:

Lote auf derselben Ebene sind zu einander parallel.

Zugleich bestätigt sich die Möglichkeit, durch zwei parallele Gerade eine Ebene zu legen.

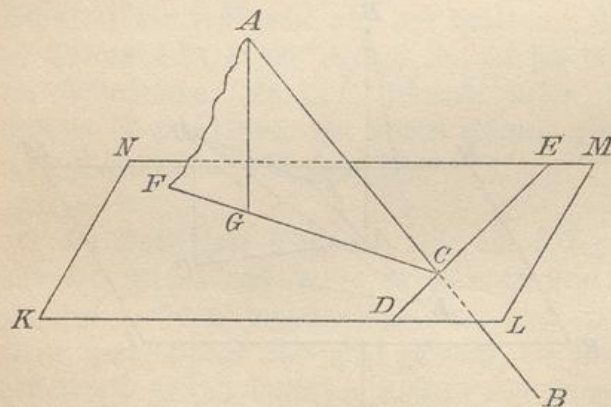
Steht von zwei parallelen Geraden die eine senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

Fig. 119.



linie zu beiden Geraden parallel. Denn legt man zu  $AA_1$  in Fig. 119 eine Normalebene  $KLMN$ , so ist diese auch normal zur

Fig. 120.



einer Ebene. Eine Gerade  $AB$  (Fig. 120) schneide eine Ebene  $KLMN$  in  $C$ . Denkt man sich in  $C$  die Normalebene zu  $AB$ , so schneidet

Sind zwei Gerade zu einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel, denn legt man zur dritten eine Normalebene, so ist diese zugleich Normalebene für die beiden anderen.

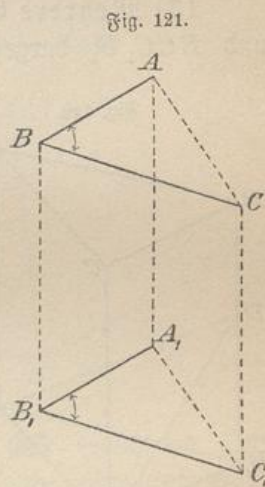
Legt man durch zwei parallele Gerade Ebenen, die sich schneiden, so wird die Schnittlinie zu beiden Geraden parallel. Die Ebenen  $AA_1C_1C$  und  $BB_1C_1C$  stehen aber senkrecht auf der Ebene  $KLMN$ , folglich ist ihr Schnitt  $CC_1$  ein Lot auf derselben und als solches parallel zu  $AA_1$  und  $BB_1$ .

10) Schnittwinkel zwischen einer Geraden und

diese die gegebene Ebene in einer Geraden  $DE$  senkrecht zu  $AC$ . Errichtet man in dieser Grundebene auf  $DE$  das Lot  $CF$ , so ist  $ACF$  die Normalebene zu  $DE$ , sie steht also senkrecht zur Grundebene. Die durch  $AC$  gelegte Ebene, die senkrecht zur Grundebene steht, heißt die projizierende Ebene von  $AC$ . In ihr befindet sich die durch das Lot  $AG$  begrenzte Projektion  $GC$  von  $AC$ . In der projizierenden Ebene wird der von der Geraden und der Ebene gebildete Winkel gemessen. Er ist der Komplementwinkel des Winkels, den das in  $C$  auf der Ebene errichtete Lot mit  $AC$  bildet.

Suche zu beweisen, daß jede in der Grundebene durch  $C$  gelegte Gerade mit  $AC$  einen größeren Winkel bildet als  $FC$ . Winkel  $ACG$  ist zugleich der Schnittwinkel, den die Grundebene mit der durch  $A$  und  $DE$  bestimmten Ebene bildet. Dabei ist  $AC$  die steilste Linie, die sich von  $A$  aus auf dem schrägen Dache ziehen läßt. (Warum?) In dieser Beziehung ist also  $ACG$  ein größter Winkel, während er vorher als kleinster auftrat.

11) Winkel im Raume, deren Schenkel gleichgerichtet sind, sind einander gleich. In Fig. 121 mögen die Winkel  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  gleichgerichtete Schenkel haben. Je zwei gleichgerichtete mache man gleich lang und lege durch sie Ebenen. Diese Ebenen  $ABB_1A_1$  und  $BCC_1B_1$  sind dann Parallelogramme, so daß  $AA_1 \parallel BB_1$  und  $CC_1 \parallel BB_1$ , also auch  $AA_1 \parallel CC_1$  ist. Durch letztere Linien läßt sich also eine Ebene  $ACC_1A_1$  legen, die ein Parallelogramm ist, so daß  $AC \parallel A_1C_1$  wird. Jetzt ist  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$  wegen der Uebereinstimmung in den drei Seiten, also ist  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$ .



12) Übungsaufgaben. a) Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel, und zwischen den Schnittwinkeln finden dieselben Beziehungen statt, wie bei parallelen Geraden, die von einer dritten geschnitten werden. Stelle diese Beziehungen auf und beweise das Entsprechende.

b) Untersuche die Beziehungen für den Fall, daß zwei parallele Ebenen von einer Geraden geschnitten werden.

c) Welche Proportionen finden statt, wenn drei parallele Ebenen

von zwei sich kreuzenden Geraden geschnitten werden? Was findet statt, wenn die schneidenden Geraden parallel sind?

d) Zwei Ebenen mögen mit einander den Schnittwinkel  $\alpha$  bilden. Innerhalb des Winkels liege ein Punkt, von dem aus Lote nach beiden Ebenen gefällt werden. Welchen Winkel bilden diese mit einander? Welchen Winkel bilden aber die Lote, wenn ihr Ausgangspunkt außerhalb des durch den Winkel und seinen „Scheitelwinkel“ bestimmten Raumes liegt? (Bilden die Lote den Winkel  $\alpha$ , so sollen sie Lote gleichen Sinnes heißen, bilden sie den Winkel  $180^\circ - \alpha$ , so sollen sie als Lote entgegengesetzten Sinnes bezeichnet werden. Solche sind z. B. die beiderseits nach außen gehenden Lote.)

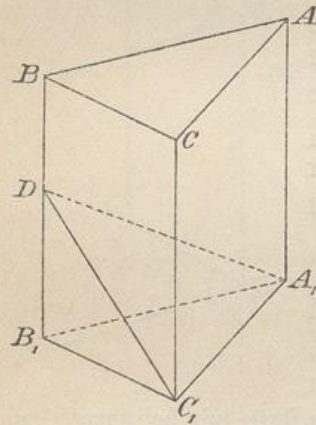
e) Werden die Seitenkanten eines  $n$ -seitigen Prismas durch parallele Ebenen geschnitten, so sind die Schnitte kongruente Flächen.

f) Der Parallelschnitt zur Grundfläche einer  $n$ -seitigen Pyramide ist der Grundfläche ähnlich. (Vgl. Teil I. Seite 208.)

### III. Die körperlichen Ecken.\*)

13) Mehrere Ebenen. In Fig. 122 sind zwei Ebenen  $ABB_1A_1$  und  $BCC_1B_1$  dargestellt, die sich in  $BB_1$  schneiden. Bringt man eine dritte Ebene hinzu, die z. B. durch  $A_1C_1$  gelegt wird, so sind zwei Fälle möglich.

Fig. 122.



Entweder schneidet die dritte Ebene die Schnittlinie  $BB_1$  in einem Punkte  $D$ , dann sind  $A_1D$  und  $C_1D$  ihre Schnitte mit den gegebenen Ebenen; oder sie ist parallel zur Schnittlinie  $BB_1$ , dann sind nach dem Früheren die Schnitte  $CC_1$  und  $AA_1$  parallel zu  $BB_1$ . Folglich: Die drei Schnittlinien dreier sich schneidenden Ebenen schneiden sich entweder in einem Punkte, oder sie sind parallel. Im ersteren Falle sagt man, sie bilden eine dreiseitige körperliche Ecke. (So hat

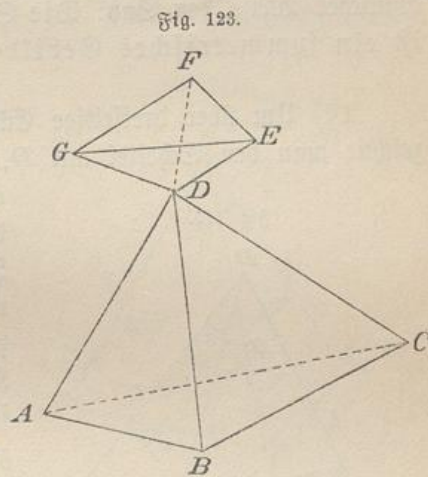
man z. B. jede Ecke einer dreiseitigen Pyramide als eine dreiseitige körperliche Ecke zu betrachten.) Im anderen Falle erhält man die Kanten eines dreiseitigen Prismas.

\*) Abschnitt III kann auf dem Gymnasium vollständig überschlagen werden.

14) Ecke. Zieht man durch einen Punkt des Raumes  $n$  beliebige Gerade und legt man durch je zwei aufeinanderfolgende derselben eine Ebene, so entstehen  $n$  Ebenen, die sämtlich durch den gegebenen Punkt gehen. Von ihnen sagt man, sie bilden eine  $n$ -seitige körperliche Ecke. So ist z. B. die Spitze jeder  $n$ -seitigen Pyramide eine  $n$ -seitige Ecke.

Der Ausgangspunkt der  $n$  Geraden heißt der Scheitel der Ecke (die Spitze), die Geraden heißen die Kanten der Ecke, die von den Kanten eingeschlossenen Winkel heißen die Kantenwinkel, die von den Kanten begrenzten Ebenen (ins Endlose ausgedehnt zu denken) heißen die Seiten (Seitenflächen) der Ecke, die Schnittwinkel benachbarter Seiten heißen die Winkel (Seitenwinkel oder Flächenwinkel) der Ecke. Ecken, bei denen überstumpfe Winkel nicht vorkommen, werden konvexe Ecken genannt. Nur von solchen soll hier die Rede sein.

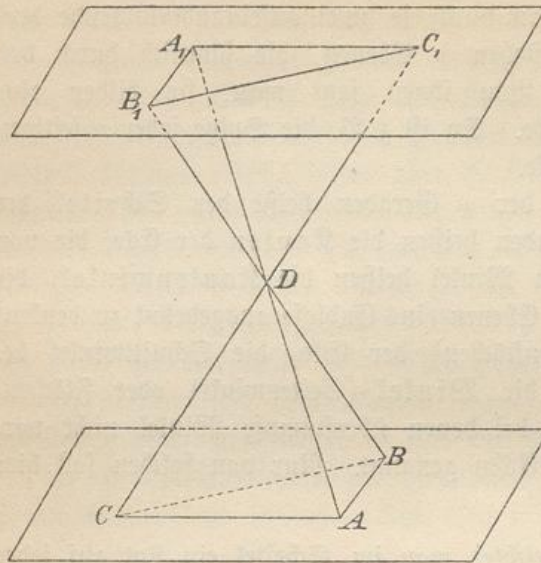
[15) Polarecke. Errichtet man im Scheitel ein Lot auf jeder Seite der Ecke, so bilden die  $n$  Lote eine neue Ecke, die Polarecke der gegebenen. In Fig. 123 ist z. B. die dreiseitige Ecke  $D(ABC)$  dargestellt. Auf  $BCD$  ist das Lot  $DE$ , auf  $CAD$  das Lot  $DF$ , auf  $ABD$  das Lot  $DG$  errichtet. Die Ecke  $D(EFG)$  ist die Polarecke der vorigen. Weil nun  $BD$  sowohl auf  $DE$ , als auch auf  $DG$  senkrecht ist, so ist  $BD$  ein Lot auf der Fläche  $DEG$ ,  $CD$  ein Lot auf  $DEF$  und  $DA$  ein Lot auf  $DFG$ . Folglich gilt allgemein der Satz: Ist eine Ecke die Polarecke einer anderen, so ist die letztere zugleich die Polarecke der ersteren.



Die auf den zwei Nachbarflächen jeder Ecke errichteten Lote gehen beide nach außen, sind also nach 12) solche entgegengesetzten Sinnes. Bilden also die Nachbarflächen den Winkel  $\alpha$ , so bilden die Lote den Winkel  $180^\circ - \alpha$ . Folglich: Die Seitenwinkel jeder Ecke sind die Supplementwinkel zu den Kantenwinkeln der Polarecke (und umgekehrt).]

16) Scheitelecke. Verlängert man die Kanten einer dreiseitigen Ecke über den Scheitel hinaus, so entsteht die Scheitel-

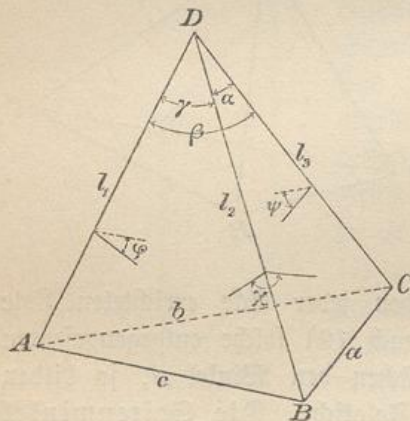
Fig. 124.



ecke der Ecke. Obwohl diese dieselben Seitenwinkel und Kantenwinkel hat, wie die gegebene, ist sie ihr im allgemeinen doch nicht kongruent, denn die einzelnen Teile folgen in entgegengesetzter Reihenfolge aufeinander. Jedoch lassen sich beide Ecken in symmetrische Lage bringen. So läßt sich z. B. die obere der beiden dreiseitigen Ecken in Fig. 124 so unter die Grundfläche stellen, daß sie als das Spiegelbild der unteren Ecke gegen die Grundfläche erscheint. Ganz allgemein erkennt man in ähnlicher Weise den Satz: Die Scheitecke jeder  $n$ -seitigen Ecke ist ein symmetrisches Gebilde (Spiegelbild) der letzteren.

17) Um über dreiseitige Ecken Sätze aussprechen zu können, bezeichne man den Scheitel mit  $D$ , die Ecke selbst mit  $D(ABC)$ . Es

Fig. 125.



empfehlen sich, die Kanten als gleich lang anzunehmen, also  $l_1 = l_2 = l_3$ . Im Grunddreieck  $ABC$  bezeichne man die Gegenseiten der Dreiecks- punkte gleichnamig mit  $a, b, c$ . Die Kantenwinkel bei  $D$  oder die Seiten seien  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , und zwar so bezeichnet, daß sie der Reihe nach den Dreiecksseiten  $a, b, c$  gegenüberliegen. Die zu  $l_1, l_2$  und  $l_3$  gehörigen Seitenwinkel oder Winkel seien  $\varphi, \chi, \psi$ .

Nach 16) kann man von Ecken mit übereinstimmenden Stücken nicht ohne weiteres die Kongruenz beweisen, sondern es bleibt unentschieden, ob es sich um Symmetrie oder Kongruenz handelt. Im Falle der Symmetrie aber ist dann die Scheitecke der einen Ecke der anderen kongruent.

18) Die Hauptfälle der Kongruenz bzw. Symmetrie dreiseitiger Ecken ergeben sich aus der Übereinstimmung in 1)  $\alpha, \beta$  und  $\psi$ , 2)  $\alpha, \chi$  und  $\psi$ , 3)  $\alpha, \beta, \gamma$ , 4)  $\varphi, \chi, \psi$ . Also:

Zwei dreiseitige Ecken sind entweder kongruent oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen

- 1) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
- 2) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln,
- 3) in den drei Seiten,
- 4) in den drei Winkeln.

Im Falle des gleichartigen Aufeinanderfolgens der Stücke kann man die Kongruenz ganz ähnlich beweisen, wie bei den Dreiecken, z. B. im Falle 1) folgendermaßen:

Man lege die Seite  $\alpha'$  Fig. 126 b so auf  $\alpha$  in Fig. 126 a, daß das gleichschenklige Dreieck  $B'C'D'$  auf  $BCD$  fällt. Weil nun die Seitenwinkel  $\psi'$  und  $\psi$  übereinstimmen, so fällt die Fläche  $D'C'A'$  in die Richtung von  $DCA$ . Da aber  $\beta'$  und  $\beta$  gleich sind, so fällt Dreieck  $D'C'A'$  genau auf  $DCA$ . Ganz von selbst muß nun Dreieck  $D'B'A'$  auf  $DAB$  fallen, demnach deckt sich alles, und auch die übrigen Seiten und Winkel der Ecken  $D(ABC)$  und  $D'(A'B'C')$  stimmen überein.

Fig. 126 a.

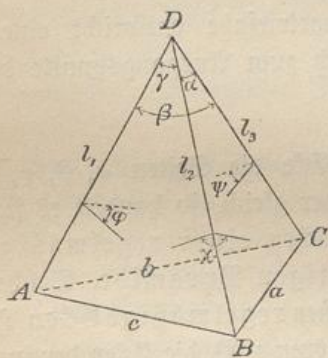
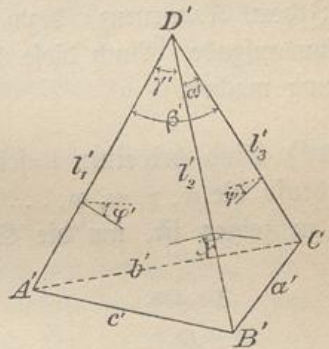


Fig. 126 b.

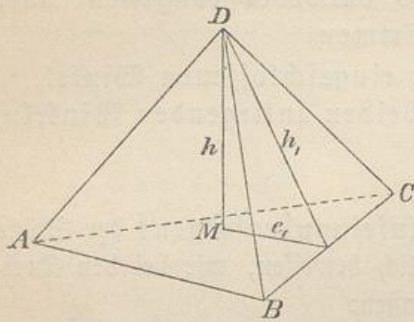


**Beweis für Fall 2**, wenn Übereinstimmung in den  $\alpha, \chi$  und  $\psi$  stattfindet. Man legt  $D'B'C'$  auf  $DBC$ , dann fällt wegen  $\psi' = \psi$  Dreieck  $D'A'C'$  in die Richtung von  $DAC$  und wegen  $\chi' = \chi$  Dreieck  $D'B'A'$  in die Richtung von  $DBA$ . Da aber die so ineinander fallenden Flächenpaare nur eine einzige Schnittlinie haben können, so muß Kante  $D'A'$  auf  $DA$  fallen, womit die Kongruenz und die Übereinstimmung der übrigen Stücke nachgewiesen ist.

**Beweis für Fall 3.** Weil  $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$  und  $l_1 = l'_1, l_2 = l'_2, l_3 = l'_3$  ist, so sind die gleichschenkligen Seitendreiecke kongruent,

also  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ , d. h. die Grundflächen stimmen überein. Aber auch die Höhen beider Pyramiden stimmen in der Lage und

Fig. 127.



Länge vollständig überein. Sie liegen nämlich im gemeinschaftlichen Durchschnitt der drei Normalebene in den Halbierungspunkten von  $a$ ,  $b$  und  $c$  bzw.  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ , d. h. ihr Fußpunkt ist der Mittelpunkt  $M$  des umschriebenen Kreises der Grundfläche. Setzt man also die Grundfläche  $A'B'C'$  auf  $ABC$ , so fallen die Höhen beider Pyramiden in einander, und da in beiden  $h = \sqrt{h_1^2 + e_1^2}$

und  $h' = \sqrt{h_1'^2 + e_1'^2}$  dasselbe ist, so fällt  $D'$  mit  $D$  zusammen. Folglich fallen die Kanten zusammen, und die Kongruenz ist nachgewiesen.

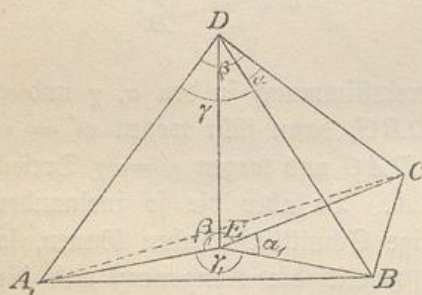
Weil endlich zu kongruenten Ecken kongruente Polarecken gehören, so sind Ecken auch kongruent bzw. symmetrisch, wenn die drei Winkel übereinstimmen. **Fall 4)** bedarf also keines neuen Beweises.

Von anderen Fällen möglicher Kongruenz und Symmetrie wird hier abgesehen, da vielfach Mehrdeutigkeit eintritt.

Jedem Kongruenz- bzw. Symmetriesatz entspricht eine Konstruktionsaufgabe. Auch diese läßt sich zum Ausgangspunkte der Betrachtung machen.

19) Sind bei einer  $n$ -seitigen Ecke die Seiten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  und ebenso die  $\varphi, \chi, \psi, \omega, \dots$  einander gleich, so handelt es sich, wie leicht zu zeigen ist, um die Seitenflächen einer regelmäßigen  $n$ -

Fig. 128.



seitigen Pyramide. Solche Ecken heißen regelmäßige Ecken. Hierher gehören z. B. die Ecken der in Teil I besprochenen regelmäßigen Körper.

20) Die Summe der Kantenwinkel einer Ecke ist stets kleiner als  $360^\circ$ . Bei Fig. 128 ist dies an der dreiseitigen Ecke (mit gleich langen Kanten) leicht nachzuweisen. Projiziert man nämlich  $D$  auf die Ebene  $ABC$ , so entstehen gleichschenklige Dreiecke  $BCE$ ,  $CAE$ ,  $ABE$ , deren Winkel an der Spitze  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  größer sind als  $\alpha$  bzw.

$\beta, \gamma$ , denn es sind z. B. die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks  $BCE$  kleiner als die des über derselben Grundlinie stehenden Dreiecks  $BCD$ . Da nun  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$  ist, so ist  $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ .

Hierauf beruht z. B. der Nachweis, daß nur fünf regelmäßige Polyeder möglich sind. (Vergl. Teil I, Stereometrie Nr. 14.)

#### IV. Die Fundamentalkonstruktionen und einige Anwendungen derselben.

21) Die in Folgendem gegebenen Konstruktionen sind zunächst nur in der Vorstellung durchzuführen.

a) Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte die Normalebene zu errichten.

**Auflösung.** Man denke sich durch die Gerade zwei Ebenen gelegt und in diesen vom Schnittpunkte aus Lote auf der Geraden gezeichnet. Durch diese beiden Lote ist die Normalebene vollständig bestimmt.

b) Auf einer gegebenen Ebene und zwar über einer gegebenen Geraden derselben die senkrechte Ebene zu errichten.

**Auflösung.** Man errichte auf der gegebenen Geraden in einem beliebigen ihrer Punkte das in der gegebenen Ebene liegende Lot. Die Normalebene zu letzterem im Fußpunkte des Lotes ist die gesuchte Ebene.

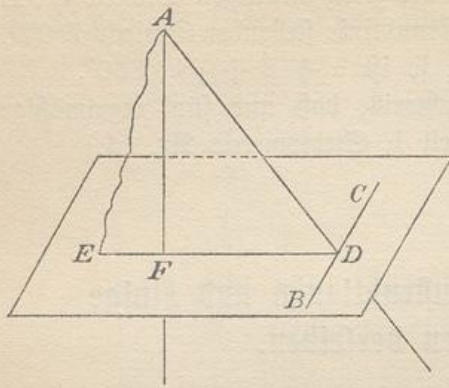
c) Auf einer gegebenen Ebene in einem gegebenen Punkte ein Lot zu errichten.

**Auflösung.** Man lege durch den Punkt in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade, errichte über ihr die senkrechte Ebene und in dieser auf der Geraden im gegebenen Punkte ein Lot. — Hierauf beruht die Konstruktion senkrechter Prismen über gegebenen Grundflächen.

d) Von einem gegebenen Raumpunkte aus auf eine gegebene Ebene ein Lot zu fällen.

**Auflösung.** Man ziehe in der Ebene eine beliebige Gerade  $BC$  (Fig. 129). In der durch den gegebenen Punkt  $A$  und diese Gerade bestimmten Ebene falle man ein Lot  $AD$  auf die Gerade. In  $D$  errichte man auf  $BC$  das in der gegebenen Ebene liegende Lot  $DE$ . In der durch  $AD$  und  $DE$  bestimmten Ebene falle man von  $A$  aus das Lot  $AF$  auf  $DE$ . (Eine Variante ergibt sich aus Nr. 10.) Hierauf beruht die Lehre von der senkrechten Projektion von Punkten und Geraden auf Ebenen; z. B.

Fig. 129.



e) Eine gegebene Gerade auf eine gegebene Ebene zu projizieren.

Für den Fall des Schneidens ist die Auflösung bereits durch 10) gegeben. Im Falle des Parallelismus hat man von einem der Punkte der Geraden aus ein Lot auf die Ebene zu fallen. Durch dieses und die gegebene Gerade ist übrigens für alle Fälle die projizierende Ebene bestimmt.

f) Durch die eine von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene zu legen, die zur anderen parallel ist.

**Auflösung.** Man lege durch die zweite Gerade eine die erste schneidende Ebene. In dieser Ebene ziehe man durch den Schnittpunkt eine Parallele zur zweiten Geraden. Die Parallele und die erste Gerade bestimmen die gesuchte Ebene.

g) Das gemeinschaftliche Lot (und den kürzesten Abstand) zweier sich kreuzenden Geraden zu finden.

**Auflösung.** Lege durch jede der gegebenen Geraden eine zur anderen parallele Ebene und durch jede der Geraden die auf beiden Hülfebenen senkrechte Ebene. Die beiden letzteren Ebenen schneiden sich in dem gesuchten Lote.

h) Den Schnittwinkel zweier Ebenen zu halbieren.

**Auflösung.** Man konstruiere in einem beliebigen Punkte der Schnittlinie die Normalebene, so daß durch die Schnitte der letzteren mit den gegebenen Ebenen der Schnittwinkel sichtbar wird. Die Halbierungslinie dieses Winkels (in der Normalebene) und die erstgenannte Schnittlinie bestimmen die halbierende Ebene.

Auch die Konstruktion vorgeschriebener Flächenwinkel, das Antragen gegebener Flächenwinkel, das Verdoppeln gegebener Flächenwinkel geschieht mit Hülfe einer Normalebene zur gegebenen Schnittlinie. Man kann also über beliebigen Grundflächen auch schräge Prismen konstruieren, deren Seitenkanten gegebene Projektionsrichtung und gegebene Neigung haben.

22) Einige Übungsaufgaben, bei denen die Konstruktionen zunächst nur in der Vorstellung durchzuführen sind. Die Zeichnungen befinden sich teilweise in Teil I, Stereometrie.

a) Einen Würfel von gegebener Kantenlänge  $k$  zu konstruieren und an ihm die in Teil I, Stereometrie Nr. 3 angegebenen Berechnungen durchzuführen.

b) Ein senkrechtcs regelmäÙiges Prisma von 3, 5, 6 u. f. w. quadratischen Seitenfläc hen mit Kante  $k$  zu konstruieren, die Oberfläc he, den Inhalt, den Radius der umbeschriebenen Kugel zu bestimmen, den letzteren auch zu konstruieren, etwaige Diagonalen und Diagonalfläc hen nach GröÙe und Neigung zu untersuchen.

c) Dieselben Aufgaben für ein regelmäÙiges Prisma von Grundkante  $k$  und Höhe  $h$ .

d) Dieselben Aufgaben für ein regelmäÙiges Prisma mit der Grundkante  $k$ , dessen Höhe so zu bestimmen ist, daÙ sich ihm eine Kugel einbeschreiben läÙt.

e) Über einem Kreise von gegebenem Radius einen senkrechten Cylinder von quadratischem Hauptschnitt zu konstruieren, den Inhalt, den Mantel, die Oberfläc he, die Radien der um- und einbeschriebenen Kugel zu bestimmen.

f) Dieselbe Aufgabe für einen Cylinder derselben Art, jedoch von Höhe  $h$  durchzuführen. (Eine einbeschriebene Kugel ist dabei nicht vorhanden.)

g) Entsprechende Aufgaben für schräge Prismen, deren Seitenkanten die Länge  $l$  und die Neigung  $\alpha$  (z. B.  $45^\circ$ ) haben, während ihre Projektionen in die Richtung vorgeschriebener Kanten bezw. Diagonalen der regelmäÙigen Grundfläc he fallen. (Die Kugelaufgaben sind dabei ebenfalls auszuschließen.)

h) Eine senkrechte Pyramide\*) von gegebener Höhe  $h$  über einem regelmäÙigen Vieleck von 3, 4, 5, 6 u. f. w. Seiten von gegebener Kante zu konstruieren, die Seitenkanten, die Winkel der Seitenfläc hen, die Neigungswinkel der Seitenkanten und Seitenfläc hen gegen die Grundfläc he, die Schnittwinkel benachbarter Seitenfläc hen, die Radien der um- und einbeschriebenen Kugel, die Oberfläc he und den Inhalt des Körpers zu berechnen.

i) Entsprechende Aufgaben für den senkrechten Kreiskegel mit Grundradius  $r$  und Höhe  $h$ .

k) Die Konstruktion des regelmäÙigen Oktaeders und Tetraeders, des Pyramidenwürfels und des Rhombendodekaeders sind im AnschluÙ an Teil I, Stereometrie durchzuführen und geeignete Berechnungen an den Körpern vorzunehmen.

\*) Unter senkrechten Pyramiden sollen solche verstanden werden, bei denen die Spitze senkrecht über dem Schwerpunkte der Grundfläc he liegt. Ein Spezialfall sind dann die senkrechten Pyramiden mit regelmäÙiger Grundfläc he. Alle anderen Pyramiden heißen schiefe Pyramiden.

## V. Anleitung zum korrekten stereometrischen Zeichnen.

### a) Die schräge Parallelprojektion.

23) In Teil I, Stereometrie 2) ist der Begriff der schrägen Parallelprojektion am Beispiele des Würfels bereits erörtert worden. Bei den dortigen Zeichnungen war die Richtung der Projektionsstrahlen (z. B. Sonnenstrahlen) willkürlich so gewählt worden, daß der Würfel in Frontstellung nach Art der Fig. 130 erschien, wobei die nach hinten gehenden Kanten unter  $30^\circ$  Neigung und  $\frac{1}{3}$  Verkürzung gezeichnet waren.

Fig. 130.

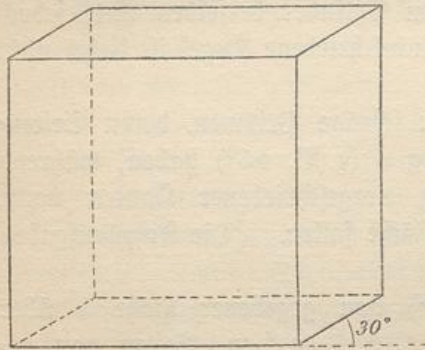
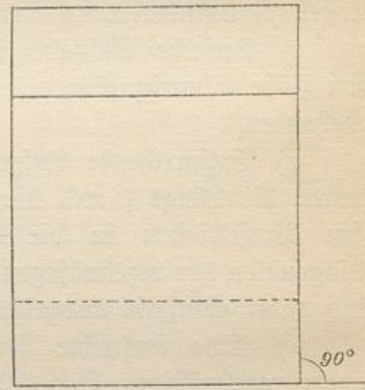


Fig. 131.



24) Für gewisse Zeichnungen, z. B. die des Cylinders, eignet sich mehr eine andere Schrägprojektion, bei der die nach hinten gehenden Geraden unter  $90^\circ$  Neigung und beliebig zu wählender Verkürzung erscheinen. In dieser Projektion würde die Würfelzeichnung nach Art der Fig. 131 erscheinen.

In diesem Sinne wird man es verstehen, wenn von der Parallelperspektive mit Neigungswinkel  $\alpha^\circ$  und der Verkürzung  $\frac{1}{n}$  gesprochen wird.

Eine ganze Reihe von Konstruktionen ist schon im ersten Teile mit Hilfe dieser geringen Vorkenntnisse streng durchgeführt worden. Dabei erschienen Parallelogramme auch in der Projektion stets als Parallelogramme. Es soll untersucht werden, ob dies allgemeine Geltung hat.

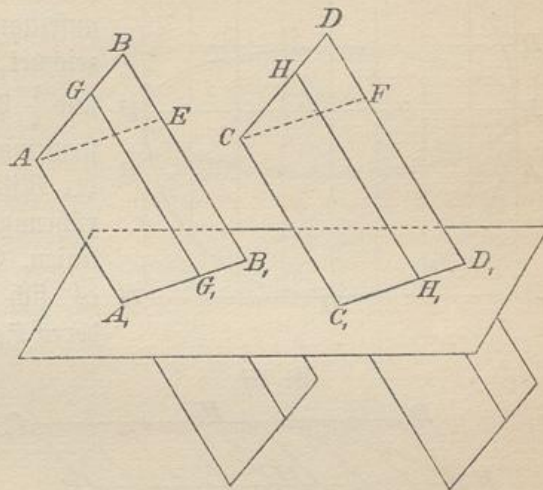
25) In Fig. 132 sind zwei gleiche und parallele Gerade  $AB$  und  $CD$  schräg auf eine Ebene projiziert worden. Die Projektionen

$A_1B_1$  und  $C_1D_1$  sind nach dem Satze über parallele Ebenen, die von einer dritten geschnitten werden, parallel, und aus der Kongruenz der Dreiecke  $AEB$  und  $CFD$ , für die  $AE \parallel A_1B_1$  und  $CF \parallel C_1D_1$  gezeichnet ist, folgt, daß  $A_1B_1 = C_1D_1$  ist. Folglich gilt der Satz:

Schräge Parallelprojektionsgleicher und paralleler Geraden giebt gleiche und parallele Gerade.

Folglich werden auch Parallelogramme stets in Parallelogramme verwandelt.

Fig. 132.



26) Ferner: Sind auf einer Geraden gleiche Stücke abgetragen, so sind auch in der Projektion die entsprechenden Stücke gleich. Dasselbe ist der Fall, wenn die gleichen Stücke auf parallelen Geraden abgetragen sind. Folglich: Ist eine Gerade im Verhältnis  $m:n$  geteilt, so ist auch ihre Projektion in diesem Verhältnis geteilt. So ist in Fig. 132  $AG:GB = A_1G_1:G_1B_1 = CH:HD = C_1H_1:H_1D_1$ .

Bei der schrägen Parallelprojektion bleiben die Teilungsverhältnisse auf derselben Geraden, oder auf parallelen Geraden erhalten. So bleibt z. B. Halbierung in der Projektion Halbierung, stetige Teilung bleibt stetige Teilung, harmonische Punkte bleiben harmonische Punkte.

Mit Hilfe dieser Bemerkung kann man zahlreiche Konstruktionsaufgaben lösen, z. B.:

27) **Aufgabe.** Ein Quadrat mit dem einbeschriebenen Kreise, in horizontaler Frontlage befindlich, soll erstens in der Parallelperspektive mit  $90^\circ$  und  $\frac{1}{3}$  Verkürzung, zweitens in der Parallelperspektive mit  $45^\circ$  und  $\frac{1}{2}$  Verkürzung gezeichnet werden.

**Auflösung.** In Fig. 133 ist in den Kreis ein System paralleler Sehnen eingezeichnet, die in gleichen Abständen aufeinander folgen. Sämtliche sind auf  $\frac{1}{3}$  verkürzt worden.  $A_1B_1C_1D_1$  mit der einbeschriebenen Ellipse ist die eine der verlangten Zeichnungen.

Fig. 133.

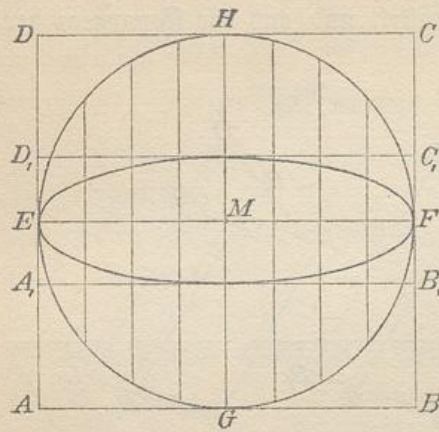


Fig. 134.

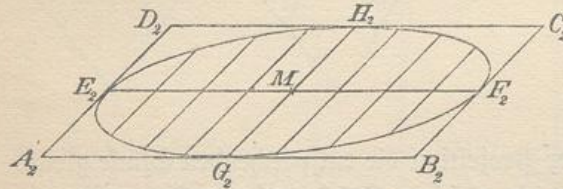
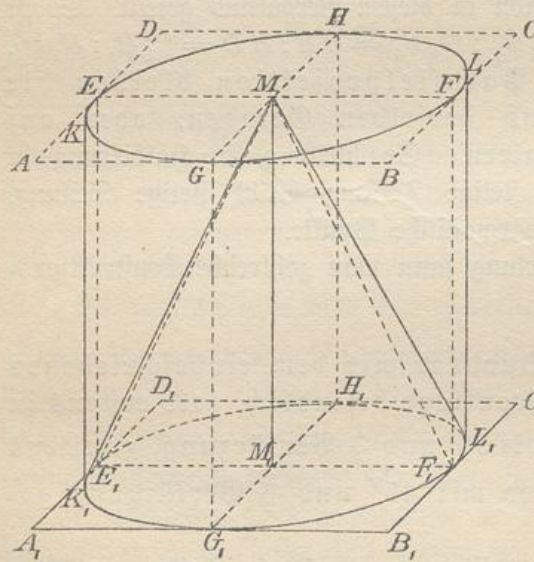


Fig. 135.



tive  $30^\circ$  mit  $\frac{1}{3}$  Verkürzung zu zeichnen und in den sichtbaren Flächen die Ellipsen zu zeichnen, durch welche die einbeschriebenen Kreise dargestellt werden.

In Fig. 134 ist  $A_2B_2C_2D_2$  das Quadrat in der anderen Parallelperspektive. Wiederum ist das System paralleler, in gleichen Abständen aufeinander folgender Sehnen gezeichnet, jedoch mit Neigung  $45^\circ$  und  $\frac{1}{2}$  Verkürzung. Bei der Konstruktion geht man am besten von der Mittellinie  $E_2F_2$  aus. Die Berührungspunkte fallen in die Mittellinien. Später wird bewiesen, daß es sich um eine Ellipse handelt, deren Hauptachsen ein wenig schräg liegen.

28) Daraus würde z. B. die nebenstehende Zeichnung des senkrechten Kreiszylinders in schräger Parallelperspektive von  $45^\circ$  und  $\frac{1}{2}$  Verkürzung folgen. Man beachte, daß dabei der senkrechte Frontschnitt  $EFF_1E_1$  sich durchaus nicht mit den Sichtbarkeitsgrenzen des Mantels deckt, die durch die gemeinschaftlichen Tangenten  $KK_1$  und  $LL_1$  dargestellt sind. Zieht man von  $M$  aus Tangenten an die untere Ellipse, so erhält man zugleich die Darstellung des Kegels mit dem Hauptschnitte  $E_1F_1M$ .

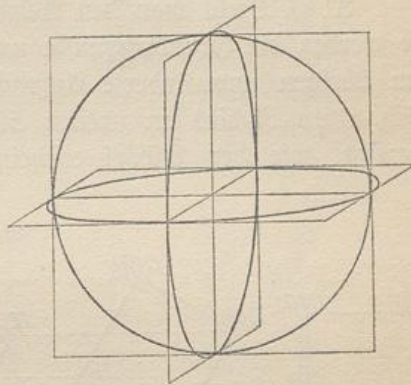
**Aufgabe.** Den Würfel in der Parallelperspektive

**Aufgabe.** Den liegenden Cylinder in derselben Perspektive mit der Achse in Frontlage zu zeichnen.

29) **Aufgabe.** Drei Kreise gleichen Durchmessers zu zeichnen, die aufeinander senkrecht stehen und mit den Mittelpunkten zusammenfallen, wobei der eine sich in Frontstellung befindet (also als Kreis erscheint). Die Auflösung ist in Fig. 136 durchgeführt. Dabei handelt es sich um die Darstellung der Hauptschnitte einer Kugel, die demnach nicht als Kreis erscheinen kann. [Auch sie erscheint als leicht zu konstruierende Ellipse, obwohl sie in den Lehrbüchern conventionell als Kreis dargestellt zu werden pflegt.]

Diese Andeutungen mögen genügen. In des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“\*) sind Übungsaufgaben konstruktiver Art in großer Zahl durchgeführt.

Fig. 136.

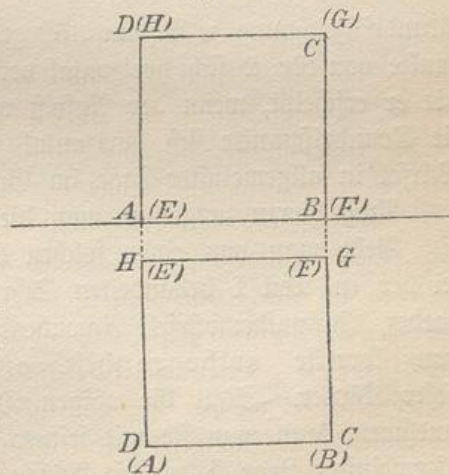


### b) Die senkrechte Projektion

(orthographische oder orthogonale Projektion, die Lehre vom Grundriß und Aufriß, orthographische Axonometrie).

30) In der Bau- und Maschinentechnik u. s. w. werden die darzustellenden Körper senkrecht auf eine Horizontalebene (Grundriß) und zugleich auf eine Vertikalebene (Aufriß) projiziert, bisweilen auch noch auf eine dritte, zu beiden senkrechte Ebene (Seitenansicht). Die beiden erstgenannten Zeichnungen werden dabei so auf einem Blatte vereinigt, daß der Aufriß oben, der Grundriß unten gezeichnet ist, und daß die sich gegenseitig entsprechenden Punkte beider Zeichnungen jedesmal in derselben Senkrechten liegen. So stellt z. B. Fig. 137 die Zeichnung

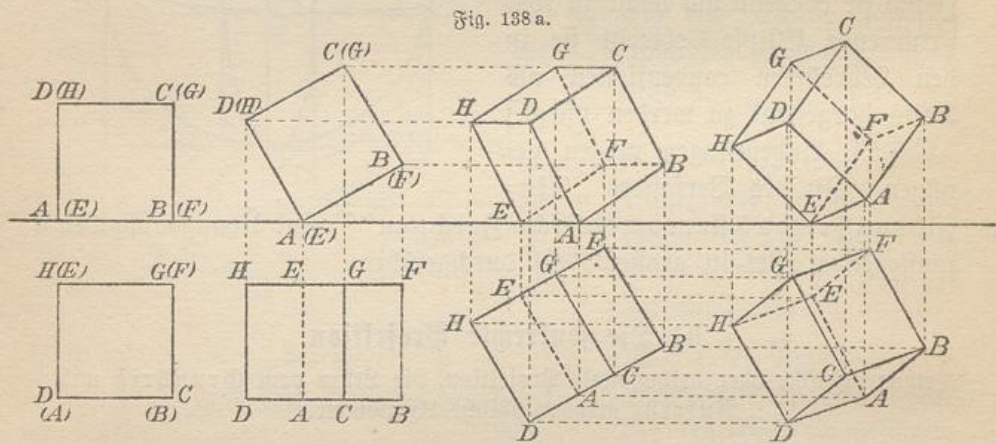
Fig. 137.



\*) Leipzig, bei B. G. Teubner 1886.

des Würfels in Frontstellung dar. Im Aufriß sind  $A, B, C, D$  die sichtbaren Ecken der Vorderfläche,  $(E), (F), (G), (H)$  die von ihnen verdeckten der hinteren Fläche. Im Grundriß sind  $D, C, G, H$  die sichtbaren Ecken der oberen Fläche,  $(A) (B) (F) (E)$  die von ihnen verdeckten der unteren Fläche.

31 a) Dreht man den Würfel um die Kante  $AE$ , z. B. um  $30^\circ$ , so werden die Grundrißpunkte nur horizontal verschoben, während die im übrigen unveränderte Aufrißfigur um  $30^\circ$  gedreht erscheint. In Fig. 138 a ist dies an zweiter Stelle dargestellt. An dritter Stelle ist gezeigt, wie der Würfel erscheint, wenn die unverändert bleibende



Grundrißzeichnung z. B. um  $35^\circ$  gedreht wird, während die Aufrißpunkte von Nr. 2 sich horizontal verschieben. Endlich ist noch gezeigt, wie er erscheint, wenn der Aufriß von 3) um  $20^\circ$  gedreht wird und die Grundrißpunkte sich horizontal verschieben. So erhält man den Würfel in allgemeinsten Lage im Grund- und Aufriß.

Auch hierzu vergleiche man die „Einführung“.

Geht man von einer solchen Würfelprojektion aus ebenso, wie bei der in Teil I behandelten Schrägprojektion, zum Oktaeder, Tetraeder, Pyramidenwürfel, Rhombendodekaeder u. s. w. über, so erhält man korrekte orthographisch-axonomische Darstellungen dieser Körper. Statt die obigen Drehungen mit dem Würfel vorzunehmen, kann man sie mit seinem Achsenkreuz ausführen. In der allgemeinsten Lage haben die Achsen verschiedene Längen. Aus diesen erkennt man die für ihre Richtungen zu nehmenden Verkürzungsverhältnisse bezw. Maßstäbe. Daraus erklärt sich der Name „Axonometrie“.





**Beweis.**

$$FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2$$

$$= a^2 + a^2 + b^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = 4a^2.$$

(Vgl. Geom. 5a.) Also ist  $FC = 2a = FG = GC$ , d. h.  $FCG$  ein gleichseitiges Dreieck. Dasselbe gilt von den 19 anderen Dreiecken, so daß der Körper von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. An ihm lassen sich entsprechende Berechnungen anstellen, wie am Dodekaeder. Es ergibt sich

$$\rho = a \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}, \quad J = a \sqrt{3} \frac{3+\sqrt{5}}{12}.$$

**VI. Berechnungsübungen.****a) Körperstumpfe.**

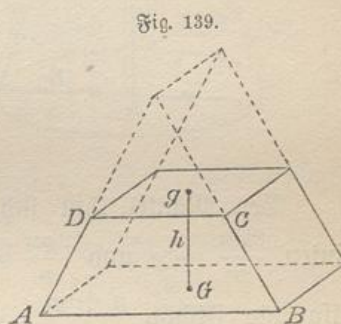
Unter Körperstumpf versteht man einen einfach gestalteten Körper, der von zwei parallelen Grundflächen  $G$  und  $g$  begrenzt ist.\*)

32) Stumpf des Dachkörpers. Sind  $G$  und  $g$  die beiden Grundflächen, und ist  $h$  die Höhe, so ist der Inhalt

$$J = \frac{G + g}{2} h.$$

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe der Inhaltsformel des Trapezes  $ABCD$ , welches ebenfalls als Grundfläche benutzt werden kann.

Der mittlere Horizontalschnitt  $\frac{G + g}{2}$  befindet sich in halber Höhe.



33) Stumpf des Kreiskegels. Fig. 140 stellt zunächst den Stumpf des senkrechten Kreiskegels dar, der andeutungsweise zum vollständigen Kegel ergänzt ist;  $r$  und  $\rho$  seien die Grundradien,  $h$  die Höhe des Stumpfes,  $x$  die des ganzen Kegels. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $BCD$  und  $BAM$  folgt  $(r - \rho) : h = r : x$ , also  $x = \frac{hr}{r - \rho}$ .

\*) Im Unterrichte empfiehlt es sich, die beiden Grundflächen der Stumpfe als  $G_1$  und  $G_2$  zu bezeichnen. Hier wurden sie mit Rücksicht auf die vorhandenen Gleiches mehrfach als  $G$  und  $g$  bezeichnet.

Der Stumpf ist gleich dem ganzen Kegel vermindert um den Ergänzungskegel, also

$$J = \frac{r^2 \pi x}{3} - \frac{\varrho^2 \pi (x-h)}{3} = \frac{\pi}{3} [x(r^2 - \varrho^2) + \varrho^2 h]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[ \frac{hr}{r-\varrho} (r + \varrho) (r - \varrho) + \varrho^2 h \right],$$

also

$$1) \quad J = \frac{\pi h}{3} [r^2 + r\varrho + \varrho^2].$$

Bringt man  $\pi$  in die Klammer, so erhält man in dieser  $r^2 \pi = G$ ,  $\varrho^2 \pi = G_1$ ,  $r\varrho \pi = \sqrt{(r^2 \pi)(\varrho^2 \pi)} = \sqrt{G \cdot G_1}$ , wo  $G$  und  $G_1$  die beiden Grundflächen sind. Man hat also die Inhaltsformel

$$2) \quad J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{GG_1} + G_1].$$

Fig. 140.

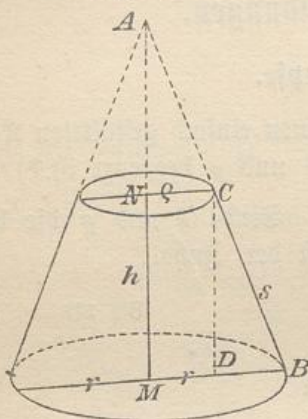
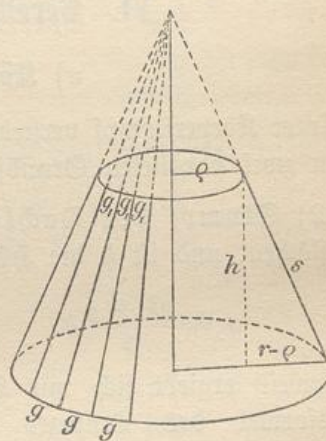


Fig. 141.



Der Mantel läßt sich in  $n$  schmale Trapeze mit den Grundlinien  $\frac{2r\pi}{n} = g$  und  $\frac{2\varrho\pi}{n} = g_1$  einteilen, von denen jedes die Höhe  $s$ , also die Fläche  $\frac{g+g_1}{2} s = \frac{\pi}{n} (r + \varrho) s$  hat. Der Mantel des Stumpfes hat also die Fläche

$$3) \quad M = (r + \varrho) \pi s.$$

Statt  $s$  kann gesetzt werden

$$s = \sqrt{(r - \varrho)^2 + h^2}.$$

34) **Aufgabe.** In welcher Höhe befindet sich die mittlere Querschnittsfläche des Kegelstumpfes?

**Auflösung.** Ist ihr Radius gleich  $z$ , so müßte sein:

Inhalt = mittlerer Schnitt mal Höhe, also

$$J = z^2 \pi h = \frac{\pi h}{3} [r^2 + r\varrho + \varrho^2],$$

also  $z = \sqrt{\frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3}}$ . Um die Höhe  $y$  zu finden, in der sich dieser Radius  $z$  befindet, benutze man die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Fig. 142 folgende Proportion

$$(r - z) : y = (z - \varrho) : (h - y),$$

woraus folgt

$$y = \frac{h(r - z)}{r - \varrho},$$

wo der Wert von  $z$  einzusetzen ist. (Der mittlere Querschnitt befindet sich also nicht etwa in halber Höhe.)

**Bemerkung.** Die Inhaltsformel (nicht aber die Mantelformel) gilt nach dem Satze des Cavalieri auch für den Stumpf des schiefen Kreiskegels.

35) Pyramidenstumpf. Nach Teil I, Ster. Nr. 26 haben Kegel und Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in demselben Niveau gleiche Horizontalschnitte. Haben also Kegel- und Pyramidenstumpf gleiche Grundflächen  $G$  und  $g$  und dieselbe Höhe  $h$ , so haben die ergänzten Körper dieselbe Höhe  $x$ . Demnach sind auch die Stumpfe nach Cavalieri inhaltsgleich. Folglich ist auch für den Pyramidenstumpf

$$J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g].$$

Selbständig ergibt sich dies folgendermaßen: Der Parallelschnitt in Fig. 143 schneidet einen der ganzen Pyramide ähnlichen Körper ab, folglich ist

$$G : g = x^2 : (x - h)^2,$$

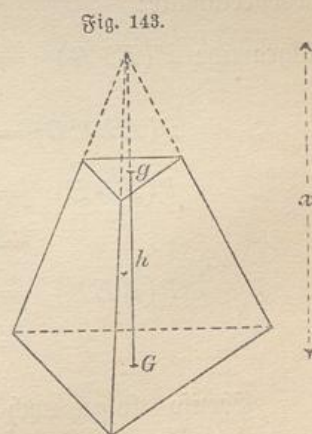
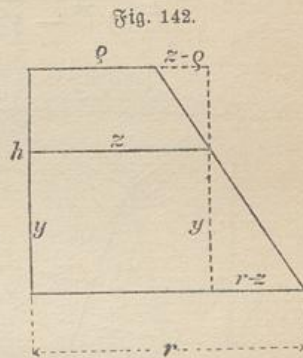
denn in ähnlichen Körpern verhalten sich homologe Flächen wie die Quadrate homologer Linien. Daraus folgt

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : (x - h)$$

und

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Setzt man dies in



$$J = \frac{Gx}{3} - \frac{g(x-h)}{3} = \frac{1}{3} [x(G-g) + gh]$$

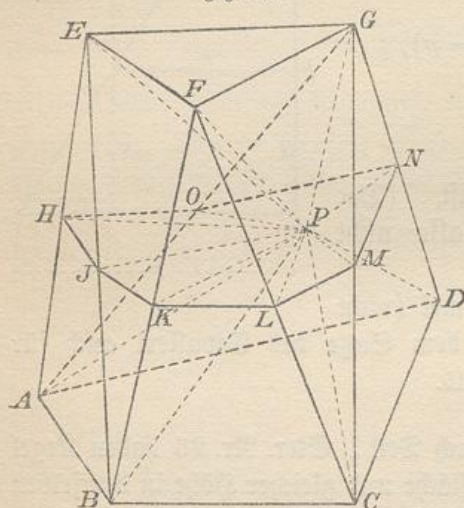
ein, so entsteht

$$J = \frac{1}{3} \left[ \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} (\sqrt{G} + \sqrt{g}) \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) + gh \right],$$

oder endlich

$$J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g].$$

Fig. 144.



36) Ebenflächiges Prismatoid. Man versteht darunter einen Körper, dessen parallele Grundflächen Vielecke sind, während als Seitenflächen im allgemeinen nur Dreiecke auftreten, von denen jedoch zwei benachbarte zu einem ebenen Viereck zusammenfallen können (sobald die obere und die untere Kante parallel sind).

In Fig. 144 ist als untere Grundfläche ein Viereck  $ABCD$ , als obere ein Dreieck  $EFG$  gewählt. Die Halbierungspunkte der Seitenkanten liegen in einem Horizontalschnitt. Die untere Grundfläche  $U$  bezeichne man als Unterschnitt, die obere  $O$  als Oberschnitt, die in halber Höhe durchgelegte Fläche  $M$  als Mittelschnitt, der hier  $4 + 3 = 7$  Seiten hat, im allgemeinen  $m + n$  Seiten haben kann.

Ein beliebiger Punkt  $P$  des Mittelschnitts werde mit allen Ecken der drei Schnitte verbunden. Dann erhält man folgende Körper und Körperinhalte:

$$\text{Pyramide } P(EFG) = \frac{h}{2} \cdot \frac{O}{3} = \frac{hO}{6},$$

$$\text{„ } P(ABCD) = \frac{h}{2} \cdot \frac{U}{3} = \frac{hU}{6},$$

$$\text{„ } P(ABE) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(HJE) \\ = 4 \cdot \text{Pyramide } E(HJP) = 4 \cdot HJP \cdot \frac{h}{6},$$

$$\text{„ } P(BEF) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(JKB) \\ = 4 \cdot \text{Pyramide } B(JKP) = 4 \cdot JKP \cdot \frac{h}{6}.$$

$$\text{Ebenso folgt noch } 4KLP \cdot \frac{h}{6}, \quad 4LMP \cdot \frac{h}{6}, \quad 4MNP \cdot \frac{h}{6},$$

$4NOP \frac{h}{6}$  und  $4OPH \frac{h}{6}$ . Dabei geben die den Faktor 4 enthaltenden Inhalte zusammengenommen den Mittelschnitt  $M$  multipliziert mit  $\frac{4h}{6}$ . Der ganze Körper hat also den Inhalt

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M].$$

Er hat diese Inhaltsformel, die Newton-Simpson'sche Formel, mit zahlreichen anderen Körpern gemein, so daß das ebenflächige Prismatoid nur ein spezieller Fall eines weit allgemeineren Körpers ist.

Spezielle Fälle des Prismatoids sind das Prisma, der Dachkörper, bei dem die eine Grundfläche Null ist, die Pyramide und der Kegelskörper, bei denen dasselbe stattfindet und die Stumpfe der letztgenannten Körper. Von ihnen gilt also die genannte Inhaltsformel. Sie dient jedoch bei diesen nicht zur Berechnung, sondern zum Nachweis wichtiger Sätze.

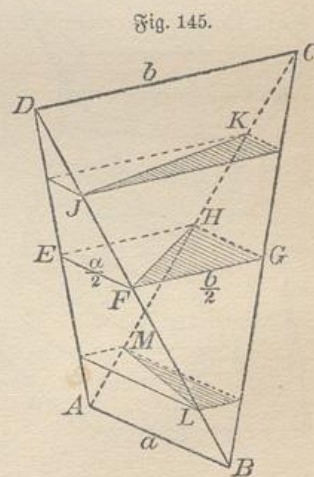
[37] Das Halbtetraeder. Jedes beliebige Tetraeder (Fig. 145) kann mit der Kante  $a$  auf einen horizontalen Tisch gestellt und um diese Kante so gedreht werden, daß schließlich auch die Kante  $b$  horizontal ist. Dann ist der Körper der Spezialfall des Prismatoids, bei dem das obere und das untere Polygon zu geraden Linien geworden sind. Ist also  $EFGH$  der horizontale Mittelschnitt  $M$ , und ist  $h$  der senkrechte Abstand der Kanten  $a$  und  $b$ , so ist der Inhalt des Körpers  $J = \frac{h}{6} [U + O + 4M]$ , oder, da  $U = 0$  und  $O = 0$  ist,  $J = \frac{2}{3} hM$ . (Der Mittelschnitt ist ein Parallelogramm mit den Seiten  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{b}{2}$ , die denselben Winkel  $\gamma$  einschließen, unter dem sich die Geraden  $a$  und  $b$  kreuzen. Es ist also

$$M = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin \gamma$$

und

$$J = \frac{4}{6} h \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sin \gamma = \frac{abh}{6} \sin \gamma.)$$

Zieht man nun zahlreiche Horizontalschnitte, so erkennt man, daß jeder ein Parallelogramm ist, welches durch die Diagonale  $JK$  bzw.  $FH, LM$  u. s. w. halbiert wird. Die Gesamtheit dieser Diagonalen giebt eine gekrümmte Fläche, das sogenannte windschiefe Viereck  $ABCD$ , dessen gerade Horizontalen der Reihe nach von der Richtung  $DC$  aus in



die Richtungen  $JK, FH, LM, BA$  übergehen. Nach dem Satze des Cavalieri wird das Tetraeder durch diese windschiefe Fläche in zwei inhaltsgleiche Körper geteilt, die sogenannten Halbtetraeder. Jedes derselben hat den Mittelschnitt  $M_1 = \frac{M}{2}$  und den Inhalt  $J = \frac{2}{3} h M_1 = \frac{h}{6} [U + O + 4M_1]$ , wo  $U = 0$  und  $O = 0$  ist. Folglich: Das Halbtetraeder gehorcht der Newton-Simpson'schen Formel.

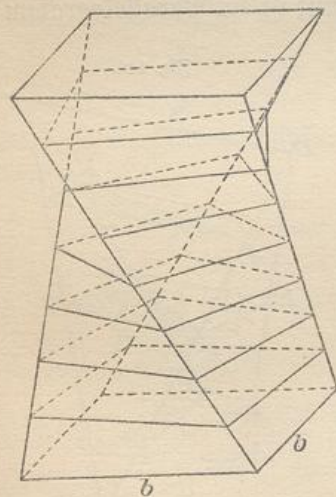
38) Das Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen. Läßt man in dem ebenflächigen Prismatoid Fig. 144 an Stelle zweier benachbarter Seitendreiecke eine windschiefe Vierecksfläche mit horizontalen Geraden treten, so schneidet man vom Gesamtkörper ein Halbtetraeder von der besprochenen Stellung ab. Ist der abgeschnittene Teil des Mittelschnitts  $M_1$ , so bleibt ein Körper übrig vom Inhalte

$$J = \frac{h}{6} (U + O + 4M) - \frac{4h}{6} M_1 = \frac{h}{6} [U + O + 4(M - M_1)],$$

wo  $M - M_1$  der neue Mittelschnitt ist. Folglich gilt die Simpson'sche Regel auch weiter, wenn man an Stelle von beliebig vielen der benachbarten Dreieckspaare windschiefe Flächen der besprochenen Art treten läßt. Also:

Der Inhalt des Prismatoids mit (teilweise oder ausnahmslos) windschiefen Seitenflächen (die durch horizontale Geraden gebildet sind) ist

$$J = \frac{h}{6} (U + O + 4M).$$



39) Fig. 146 stellt den Spezialfall dar, bei dem die Grundflächen gleichliegende Quadrate sind. In diesem Falle ist der Mittelschnitt, wie man durch Herunterprojizieren erkennt, die Hälfte der Grundfläche  $b^2$ , also

$$J = \frac{h}{6} [b^2 + b^2 + 4 \frac{b^2}{2}] = \frac{2}{3} b^2 h,$$

d. h.  $\frac{2}{3}$  des zugehörigen Prismas.

40) Sind die Grundflächen regelmäßige Polygone von unendlicher Seitenzahl, also Kreise, so entsteht das durch Fig. 115 dargestellte Drehungshyperboloid, dessen Inhalt also ebenfalls

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M]$$

ist. Besonders einfach wird die Formel, wenn der Mittelschnitt diesen Körper, wie in der Figur, in zwei kongruente Teile zerlegt. Dann wird

$$J = \frac{h}{6} [U + U + 4M] = \frac{h}{3} [U + 2M].$$

**Bemerkung.** Aus dem bei dem windschiefen Prismatoid angewandten Verfahren ergibt sich, daß, wenn die Newton-Simpson-Formel von zwei Körpern derselben Höhe gilt, sie auch von der Summe und Differenz dieser Körper gilt. Die Querschnittsflächen, die in derselben Höhe liegen, können dabei zu ganz beliebigen Gestalten vereinigt werden, sei es durch Addition oder durch Subtraktion.

41) **Übungsaufgaben.** Unter den Aufgaben über Körperstumpfe sind z. B. diejenigen von besonderem Interesse, bei denen es sich um das spezifische Gewicht  $p'$  in Verbindung mit dem wirklichen Gewichte  $p$  handelt. Dabei ist zunächst  $p = Kp'$ , wo  $K$  der Körperinhalt ist. Schwimmt ein Körper, und ist  $W \cdot 1 = W$  der verdrängte Wasserraum und zugleich sein Gewicht, so ist, da der Körper ebensoviel wiegt, wie  $W$ ,  $Kp' = W$ , also  $p' = \frac{W}{K}$  das spezifische Gewicht. Ist z. B. letzteres gegeben, so kann man fragen, wie tief ein Cylinder oder Prisma, eine Pyramide, ein Kegel- oder Pyramidenstumpf, ein Prismatoid u. s. w. eintaucht, je nachdem das Eintauchen in diesem oder jenem Sinne erfolgt.

Ferner sind von Interesse Übungsaufgaben über Stumpfe, denen Kugeln um- oder einbeschrieben werden können.

Abstumpfungen kommen in der Krystallographie vielfach vor. So ist z. B. das an den Vierkant-Ecken abgestumpfte Rhombendodekaeder identisch mit dem abgekanteten Würfel, das an den Dreikant-Ecken abgestumpfte identisch mit dem abgekanteten Oktaeder. Zahlreiche Beispiele aus des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ geben Veranlassung zu Konstruktionen und Berechnungen.

### b) Kugelberechnungen.

42) Kugelabschnitt (Kugelsegment). In Teil I, Ster. Nr. 27, wurde der Inhalt der Halbkugel gefunden durch Vergleich mit einem Cylinder von Radius  $r$  und Höhe  $r$ , aus dem der auf der Grund-



Sektor = Summe der Pyramiden =  $\frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \dots)$ ,  
 oder Sektor =  $\frac{r}{3} \cdot \text{Kalotte}$ , also Kalotte =  $\frac{3 \cdot \text{Sektor}}{r} = \frac{3}{r} \cdot \frac{2}{3} r^2 \pi h$ , oder  
 Kalotte =  $2r\pi h$ .

Genau ebenso groß ist in Fig. 147 der Mantel des der ganzen Kugel umbeschriebenen Cylinders von der Grundfläche bis zur Höhe  $h$ .

45) Zonenfläche. Zwei Parallelkreise schneiden aus der Kugelfläche eine Zonenfläche aus, die als Differenz zweier Kalotten betrachtet werden kann. Gehört zur einen die „Pfeilhöhe“  $h_1$ , zur anderen die Pfeilhöhe  $h_2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \text{Zonenfläche} &= 2r\pi h_1 - 2r\pi h_2 \\ &= 2r\pi(h_1 - h_2). \end{aligned}$$

Setzt man die senkrechte Höhendifferenz  $h_1 - h_2 = h$ , so erhält man

$$\text{Zonenfläche} = 2r\pi h.$$

In der Aufsichtzeichnung Fig. 149 ist daher jede Zonenfläche gleich der gleich hohen Schicht des Cylindermantels. Ist also der Durchmesser  $AB$  in  $n$  gleiche Teile geteilt, so wird durch die Normalebene in den Teilpunkten die Kugelfläche in flächengleiche Zonen zerlegt. Projiziert man also die Länder der Erdoberfläche normal auf den Berührungscylinder des Aquators, so erhält man eine flächentreue Weltkarte, die nach Ausschneiden des Cylinders ein Rechteck in der Ebene giebt (äquivalente Abbildung nach Lambert).

46) Kugelschicht. Die durch zwei Horizontalschnitte aus dem Kugelförper geschnittene Schicht  $ABCD$  ist gleich dem Cylinder  $EHGF$  vermindert um den Kegeltumpf  $LNOP$ . Ist nun die senkrechte Höhe  $KJ = h$ , Radius  $JD = a$  und Radius  $KA = b$ , so hat man:

Fig. 149.

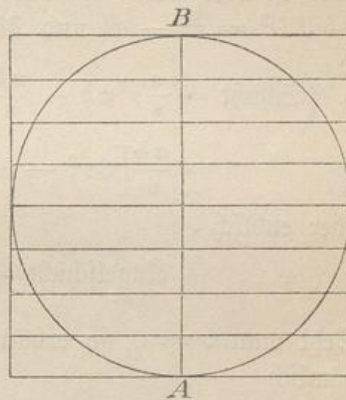
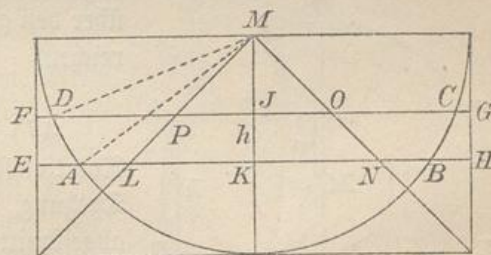


Fig. 150.



$$\begin{aligned}
 \text{Schicht} &= r^2 \pi h - \frac{\pi h}{3} [KL^2 + KL \cdot JP + JP^2] \\
 &= r^2 \pi h - \frac{\pi h}{3} [MK^2 + MK \cdot MJ + MJ^2] \\
 &= r^2 \pi h - \frac{\pi h}{6} [2 MK^2 + 2 MK \cdot MJ + 2 MJ^2] \\
 &= r^2 \pi h - \frac{\pi h}{6} [3 MK^2 + 3 MJ^2 - (MK - MJ)^2].
 \end{aligned}$$

Nun ist aber  $MK^2 = MA^2 - KA^2 = r^2 - b^2$ , und  $MJ^2 = MD^2 - JD^2 = r^2 - a^2$  und  $MK - MJ = h$ , also hat man

$$\begin{aligned}
 \text{Schicht} &= \frac{\pi h}{6} r^2 \pi h - \frac{\pi h}{6} [3(r^2 - b^2) + 3(r^2 - a^2) - h^2] \\
 &= \frac{\pi h}{6} [6r^2 - 3(r^2 - b^2) - 3(r^2 - a^2) + h^2],
 \end{aligned}$$

oder endlich

$$\text{Kugelschicht} = \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3b^2 + h^2].$$

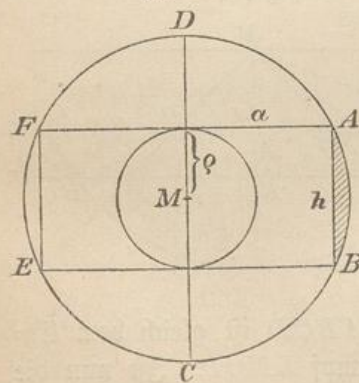
Setzt man  $b = 0$ , so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$\text{Kugelsegment} = \frac{\pi h}{6} [3a^2 + h^2],$$

die gegen die frühere den Vorzug hat, daß  $a$  und  $h$  am Segment gemessen werden können, während dort zwar  $h$ , aber nicht  $r$  meßbar war, sondern berechnet werden mußte.

**Bemerkung.** Die Formeln für das Segment, den Sektor und die Schicht sind hier zwar nur an der Halbkugel bewiesen, gelten aber, wie ganz einfache Betrachtungen zeigen, auch dann, wenn die Kugelteile über den größten Kreis der Kugel hinausreichen.

Fig. 151.



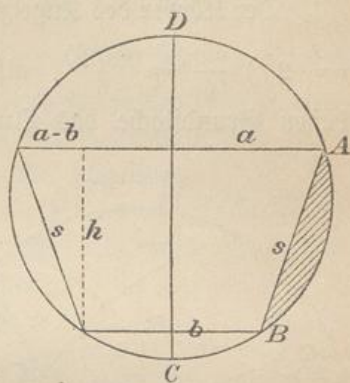
47) **Aufgabe.** Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Drehung des durch die Sehne  $AB$  abgeschnittenen Kreissegments um die parallele Achse  $CD$  entsteht.

**Auflösung.** Kugelschicht  $ABEF$  - Cylinder  $ABEF$

$$= \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3a^2 + h^2] - \frac{6a^2 \pi h}{6} = \frac{\pi h}{6} [6a^2 + h^2 - 6a^2] = \frac{\pi h^3}{6},$$

oder, wenn man  $q = \frac{h}{2}$  einführt,  $\frac{4}{3} q^3 \pi$ . Der durch Rotation des Segments entstandene Körper ist also inhaltsgleich mit einer Kugel vom Radius  $\frac{h}{2}$ . Der Inhalt ist also nur abhängig von  $h$ , nicht aber vom Kugelradius  $r$ . (Je größer  $r$ , desto kleiner zwar das Kreissegment für dasselbe  $h$ , desto größer aber der Drehungsweg. Beides gleicht sich aus.)

Fig. 152.

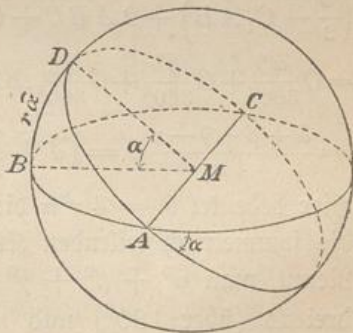


48) **Aufgabe.** Den entsprechenden Körper für den Fall zu berechnen, daß das Kreissegment um einen Durchmesser gedreht wird, der nicht parallel zur Sehne ist.

**Auflösung.** Schicht — Kegeltumpf  $= \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3b^2 + h^2] - \frac{\pi h}{3} [a^2 + ab + b^2] = \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3b^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6} [2a^2 + 2ab + 2b^2] = \frac{\pi h}{6} [a^2 + b^2 - 2ab + h^2] = \frac{\pi h}{6} [(a-b)^2 + h^2]$ . Da aber  $(a-b)^2 + h^2 = s^2$  ist, so folgt  $J = \frac{\pi h}{6} s^2$ .

Ganz allgemein folgt also der Satz: Rotiert ein Kreissegment um einen beliebigen Durchmesser, so ist der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers das  $\frac{h}{s}$ -fache einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Sehne des Segmentes ist.

Fig. 153.



[49] Fläche und Körper des Kugelzweiecks.\*) In Fig. 153 ist von der Kugeloberfläche durch die größten Kreise  $ABC$  und  $ADC$  ein Zweieck mit den Ecken  $A$  und  $C$  ausgeschnitten. Seine Fläche folgt aus der Proportion  $F : O = \alpha^0 : 360^0$ , also  $F = O \frac{\alpha^0}{360^0}$ , wo  $O = 4r^2\pi$  die Oberfläche der Kugel ist.

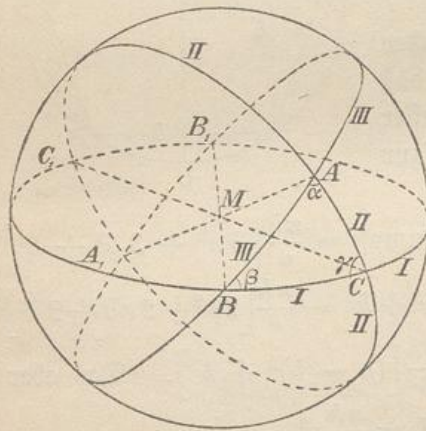
Ist dagegen der Bogen  $BD = r\hat{\alpha}$  in Längeneinheiten bestimmt, so ist  $F = O \frac{\hat{\alpha}}{2\pi}$ .

\*) Auf dem Gymnasium sind die Abschnitte 49 bis 51 zu überschlagen.

Aus  $F = 4r^2\pi \frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = 2r \cdot (r\widehat{\alpha}) = d \cdot \widehat{BD}$  folgt, daß die Fläche des Kugelzweiecks gleich einem Rechteck aus dem Durchmesser und dem symmetrisch teilenden Bogen ist.

Der Körper des Kugelzweiecks ist  $K = J \frac{\alpha^0}{360^0} = J \frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = \frac{4}{3} r^3 \pi \frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = (2r)^2 \frac{\widehat{\alpha}r}{6} = \frac{d^2(r\widehat{\alpha})}{6}$ , also gleich dem 6<sup>ten</sup> Teile eines Prismas, dessen Grundfläche das Quadrat des Durchmessers, dessen Höhe der symmetrisch teilende Bogen ist.

Fig. 154.



50) Fläche und Körper des Kugeldreiecks. In Fig. 154 ist durch die größten Kreise I, II und III, die sich unter den Durchmessern  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  schneiden, ein Kugeldreieck  $ABC$  mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gebildet, dessen Fläche, wenn man die Zweiecke mit  $Z_\alpha$ ,  $Z_\beta$ ,  $Z_\gamma$  bezeichnet, folgendermaßen gefunden werden kann:

$$Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma = (ABC + A_1BC) + (BCA + B_1CA) + (CAB + C_1AB)^* = (ABC + A_1BC + B_1CA) + 2ABC + C_1AB.$$

Der erste Posten ist die Fläche der durch den Kreis III abgeschnittenen Halbkugel  $\frac{O}{2}$  vermindert um das Dreieck  $CA_1B_1$ , welches als Scheiteldreieck symmetrisch und flächengleich mit  $C_1AB$  ist. Also hat man die Gleichung  $(\frac{O}{2} - C_1AB) + 2ABC + C_1AB = Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma$ , oder  $\frac{O}{2} + 2ABC = O \frac{\alpha^0}{360^0} + O \frac{\beta^0}{360^0} + O \frac{\gamma^0}{360^0}$ , d. h. Kugeldreieck  $ABC = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} O = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} O = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)r^2 = (r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi)r$ .

Hier bedeutet  $O = 4r^2\pi$  die Kugeloberfläche, während  $r\widehat{\alpha}$ ,  $r\widehat{\beta}$  und  $r\widehat{\gamma}$  die symmetrisch teilenden Kreisbogen der einzelnen Kugelzweiecke sind. Nennt man  $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0$  den Winkelüberschuß des Kugeldreiecks (über  $180^0$ ) und  $r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi$  den Bogenüberschuß der entsprechenden Zweiecke (über den Halbkreisbogen), so ergibt sich Folgendes: Die Fläche des Kugeldreiecks ist proportional dem Quadrate des Radius und proportional dem Winkelüber-

\*) Achte auf die cyklischen Vertauschungen.

schuffe; sie ist gleich einem Kugelzweieck, dessen Winkel der halbe Winkelüberschuß ist und gleich dem Rechteck aus dem Radius und dem Bogenüberschuffe der drei Zweiecke.

Handelt es sich um gleichseitige Kugeldreiecke, so daß der Inhalt wird  $\frac{3\alpha^{\circ} - 180^{\circ}}{720^{\circ}} O$  oder  $\frac{\alpha^{\circ} - 60^{\circ}}{240^{\circ}} O$ , und setzt man dies der Reihe nach gleich  $\frac{1}{4} O$ ,  $\frac{1}{8} O$  und  $\frac{1}{20} O$ , so folgt  $\alpha = 120^{\circ}$  bezw.  $\alpha = 90^{\circ}$ ,  $\alpha = 72^{\circ}$ , und die Ecken sind der Reihe nach die Sektoren des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, deren Hauptschnitte Kreise geben, die sich unter den gefundenen Winkeln schneiden.

Stellt man die entsprechenden Formeln für das Kugelviereck und Kugelfünfeck auf, so kommt man durch ähnliche Spezialisierung auf den Fall des Würfels und des Pentagondodekaeders. Es handelt sich also um Probleme der Kugelteilung.

51) Verbindet man die Ecken des Kugeldreiecks mit dem Kugelcentrum, so erhält man den Körper des Kugeldreiecks, dessen Inhalt man aus der Fläche durch Multiplikation mit  $\frac{r}{3}$  erhält (Pyramidenformel), so daß man hat:

$$K = \frac{\alpha^{\circ} + \beta^{\circ} + \gamma^{\circ} - 180^{\circ}}{720^{\circ}} \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$= (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) \frac{r^3}{3} = (r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi) \frac{r^2}{3}$$

oder, wenn  $J$  den Kugelinhalt bedeutet,

$$K = \frac{\alpha^{\circ} + \beta^{\circ} + \gamma^{\circ} - 180^{\circ}}{720^{\circ}} J = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi}{4\pi} J.$$

[Auch diese Formeln sind leicht in Worte zu kleiden. Bei der einen handelt es sich um den Inhalt einer Pyramide über  $r^2$ , deren Höhe der Bogenüberschuß der drei Zweiecke ist.]

### c) Übungsaufgaben.

52) Unter den Übungsaufgaben sind die mit der mathematischen Geographie zusammenhängenden die wichtigsten; z. B.: Wie groß ist die Fläche der heißen, der beiden gemäßigten, der beiden kalten Zonen, und in welchem Verhältnisse stehen sie? Wie groß ist die Zonenfläche zwischen dem Äquator und dem ersten Grade nördlicher Breite\*); wie groß die vom 45<sup>ten</sup> und 46<sup>ten</sup> Grade

\*) Gemeint ist der zu 1° nördlicher Breite gehörige Parallelkreis. Die abgekürzte Redeweise wird schwerlich zu Mißverständnissen führen.

nördlicher Breite eingeschlossene Zone? Wie groß ist jedes Meridianzweieck von Grad zu Grad? Wie viele Quadratmeilen Meeresfläche überseht man von 10 m, 100 m, 1000 m, 10 000 m, 100 000 m Meereshöhe aus? Eine wie große Fläche wird durch ein Meteor beleuchtet, welches sich 8 Meilen über der Erdoberfläche befindet? Wie hoch muß ein Meteor schweben, um 1000 Quadratmeilen Erdoberfläche zu beleuchten? Der Erschütterungskreis eines Erdbebens reiche von  $10^{\circ}$  nördlicher Breite bis  $60^{\circ}$  nördlicher Breite; wie viele Quadratmeilen umfaßt er, und der wievielte Teil der Erdoberfläche wird erschüttert? Den wievielten Teil der Erdoberfläche schließt der  $45^{\text{te}}$  Breitenkreis ein? Welcher Parallelkreis schließt den vierten Teil der Erdoberfläche ein (d. h. um welchen Grad nördlicher Breite handelt es sich)? Die Fläche der scheinbaren Himmelskugel ist wieviel mal so groß, als die scheinbare Fläche der Sonne (deren scheinbarer Durchmesser 32' beträgt)? Der wievielte Teil der Sonnenausstrahlung kommt der Erde zu gute? (Es ist zu untersuchen, wieviel mal so groß die scheinbare Himmelskugel ist, als die scheinbare Fläche der Erde für den Sonnenbewohner. Die Erde habe dabei den Durchmesser 1720 Meilen, und die Entfernung von der Sonne betrage 20 Millionen Meilen.) Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Kugeldreiecks auf der Erde, wenn jeder seiner Winkel  $70^{\circ}$  beträgt? Wie viele Sonnenmassen enthält der Erdkörper, wenn sein spezifisches Gewicht 5,6 ist? (Unter Sonnenmasse soll hier eine Masse verstanden werden, die an der Erdoberfläche 1000 kg wiegt. Nach dem Gewichte wird deshalb nicht gefragt, weil die Erde nicht an ihrer eigenen Oberfläche gewogen werden kann, weil ferner die Masse unveränderlich, das Gewicht aber von der Lage, Gestalt und Massenverteilung des anziehenden und angezogenen Körpers abhängig ist.) Wieviel Tonnen würde der nach der Sonnenoberfläche versetzte Erdkörper wiegen, wenn dort die Anziehung 28 mal so groß ist, als auf der Erde? Für die Bewohner des  $50^{\text{ten}}$  Grades nördlicher Breite gehen die bis zu  $50^{\circ}$  vom Polarstern entfernten Gestirne nie unter (Circumpolarsterne), die bis zu  $50^{\circ}$  vom Südpol entfernten gehen nie auf. Den wievielten Teil des gestirnten Himmels lernen diese Bewohner nur kennen? Angenommen, bei der Fluterscheinung steige der vierte Teil der Oberfläche des über den ganzen Erdball verbreiteten gedachten Ozeans (die eine Flutwelle) durchschnittlich um  $\frac{1}{2}$  m, wie viele Kubikmeilen Wasser würde die Flutwelle enthalten? (Wie viele Meterkilogramme oder Metertonnen Arbeit bedeutet eine solche Steigung?)

Aufgaben über die den regelmäßigen Körpern um- und eingeschriebenen Kugeln befinden sich schon in Teil I. Sie können

hier ergänzt werden. Aufgaben über Kugeln, die Kegeln und regelmässigen Pyramiden einbeschrieben sind, ebenso über gewisse Kugelreihen, befinden sich in dem Kapitel über geometrische Reihen.

Umbeschriebene Körper. Einer Kugel einen Kegel umzubeschreiben, der den  $n$ -fachen Inhalt oder die  $n$ -fache Oberfläche hat als die erstere. Dieselbe Aufgabe für die 3-, 4-seitige Pyramide. Auch Kegeltumpfe und Pyramidentumpfe, die gewissen Forderungen entsprechen, können umbeschrieben werden.

Aus dem Radius der Kugel die Elemente sämtlicher einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen regelmässigen Polyeder zu berechnen. (Die Resultate befinden sich in zahlreichen Übungsbüchern.)

Aufgaben wie folgende: Wie groß muß die Segmenthöhe sein, damit der  $n^{\text{te}}$  Teil vom Kugelförper abgeschnitten werde, führen auf Gleichungen 3<sup>ten</sup> Grades.

Spezifisches Gewicht. Eine Kugel sinke bis zur Tiefe  $h$  ins Wasser ein. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht? Auflösung

$$p' = \frac{W}{K} = \frac{\frac{\pi h^2}{3} (3r - h)}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \frac{h^2 (3r - h)}{4r^3}. \text{ Dieselbe Aufgabe für die}$$

Hohlkugel von Radius  $r$  und  $r_1$ . Wie groß muß die Wandstärke einer gußeisernen Halbkugel von 1 m Durchmesser ( $p' = 7,5$ ) genommen werden, damit sie bis zum 4<sup>ten</sup> Teile des Durchmessers, zur Hälfte, zu Dreiviertel desselben, oder ganz untertaucht? Statt der Kugel nehme man die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht, die beiden ersten lasse man erst mit der Wölbung voran, dann mit der Ebene voran eintauchen. Auch Segmente von Hohlkugeln können genommen werden. (Die Frage nach der Tiefe des Eintauchens führt auf Gleichungen dritten Grades.)

## VII. Der Schwerpunkt, die Guldin'schen Regeln, und die Sätze über abgeschrägte Körper.

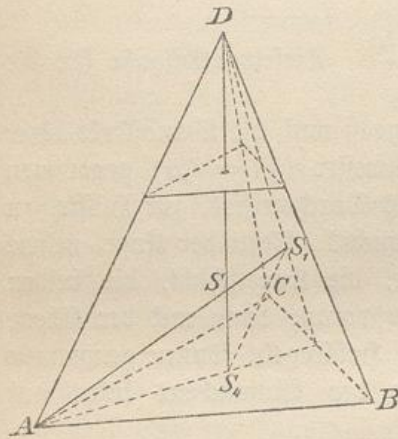
53) Geometrisch und mit Hilfe der Mechanik (Gesetz der statischen Momente) kann bewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems im Raume der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist; daß speziell der Schwerpunkt eines ebenen Punktsystems der Punkt mittleren Abstandes von jeder Geraden der

Ebene ist\*). Unter statischem Moment eines Punktsystems (Punkt als sehr kleiner Raumteil aufzufassen) in Bezug auf eine Ebene versteht man die Summe der Produkte aus jedem Punkte und seinem Abstände von der Ebene. Diese Summe ist gleich dem Produkte aus dem Schwerpunktsabstände des Körpers und seinem Inhalte. Ist nur von ebenen Gebilden die Rede, so handelt es sich in der Regel um die Abstände von einer Geraden.

Bei zahlreichen Körpern findet man den Schwerpunkt durch einfache geometrische Überlegungen, bei anderen mit Hilfe des Satzes, daß die Summe der einzelnen statischen Momente gleich dem Momente des gesamten Körpers ist. Auch andere Methoden der Schwerpunktsbestimmung sollen zur Sprache kommen, z. B. wird der Satz von Cavalieri zu Hilfe genommen.

Bei jedem (homogenen) regelmäßigen Körper liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte. Bei jedem senkrechten oder schrägen Prisma und Cylinder liegt er im Halbierungspunkte der Mittellinie.

Fig. 155.



54) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide zu finden.

**Auflösung.** Alle ebenen Parallelschichten zur Grundfläche haben den Schwerpunkt auf der durch ihn im Verhältnis 1 : 2 geteilten Mittellinie des Dreiecks. Diese Punkte liegen sämtlich auf  $DS_4$ . Auf dieser Geraden muß also der Schwerpunkt des Körpers liegen. Ebenso muß er auf  $AS_1$ ,  $BS_2$ ,  $CS_3$  liegen. Die vier Mittellinien der Pyramide schneiden sich also in einem Punkte. Von jeder ist durch den Schwerpunkt  $S$  der 4<sup>te</sup> Teil abgeschnitten, denn  $\triangle ASD \sim \triangle S_1SS_4$ , und die Dimensionen beider Dreiecke verhalten sich wie 1 : 3. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide schneidet also von jeder Mittellinie den 4<sup>ten</sup> Teil ab, und seine Höhe ist der 4<sup>te</sup> Teil der Pyramidenhöhe.

Diese Höhenbestimmung gilt nach Cavalieri von allen Pyramiden und allen zur Pyramide gehörigen Körpern, z. B. von den Kegeln.

\*) Vgl. Seite 88.

55) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des Kegeltumpfs zu finden, wenn  $r$ ,  $q$  und  $h$  gegeben sind.

**Auflösung.** Der ergänzte Kegel hat die Höhe  $x = \frac{hr}{r-q}$ , also liegt  $S_2$  in der Höhe  $h + \frac{x-h}{4} = \frac{3h+x}{4}$ ,  $S$  in der Höhe  $\frac{x}{4}$ . Also ist nach dem Satze von den statischen Momenten:

$$AS_1 \cdot \text{Stumpf} + AS_2 \cdot (\text{K. Kegel}) \\ = AS \cdot (\text{ganzer Kegel}),$$

oder

$$y \left[ \frac{\pi h}{3} (r^2 + r q + q^2) \right] + \frac{3h+x}{4} \left( q^2 \pi \frac{x-h}{3} \right) = \frac{x}{4} \cdot r^2 \pi \frac{x}{3}.$$

Setzt man für  $x$  seinen Wert ein, so findet man schließlich für den Schwerpunkt des Stumpfes die Höhe

$$y = \frac{h r^2 + 2 r q + 3 q^2}{4 r^2 + r q + q^2}.$$

Für jeden Pyramidenstumpf ist, wie man nach Multiplikation des Zählers und Nenners mit  $\pi$  erkennt, die Schwerpunkthöhe

$$y = \frac{h G + 2 \sqrt{Gg} + 3 g}{4 G + \sqrt{Gg} + g},$$

wo  $G$  und  $g$  die beiden Grundflächen bedeuten.

56) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der Halbkugel bzw. des Restkörpers zu finden.

**Auflösung.** Wie vorher wird:

$$y \cdot \text{Restkörper} + \frac{r}{4} \cdot \text{Kegel} = \frac{r}{2} \cdot \text{Cylinder},$$

$$\text{oder} \quad y \cdot \frac{2}{3} r^3 \pi + \frac{r}{4} \cdot \frac{r^3 \pi}{3} = \frac{r}{2} \cdot r^3 \pi,$$

$$\text{oder nach Hebung und Umformung: } y = \frac{5}{8} r.$$

57) Die Guldin'sche Regel für Drehungskörper.

Dreht man das Rechteck  $ABCD$  in Fig. 158 um eine zu  $AD$  parallele Achse  $KL$ , so entsteht ein Hohlzylinder vom Inhalte

$$J = \pi (r^2 - r_1^2) h = \pi (r + r_1) (r - r_1) h = 2 \pi \frac{r + r_1}{2} b h = 2 \pi q F,$$

Fig. 156.

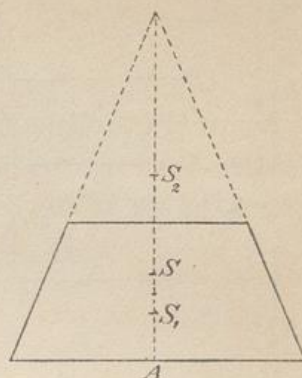


Fig. 157.

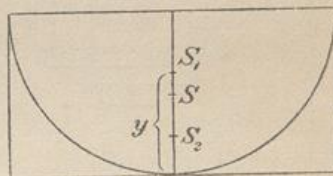
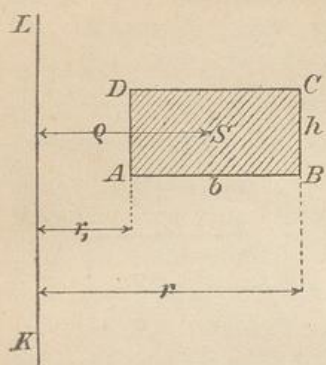


Fig. 158.



wo  $F$  die Rechtecksfläche und  $\rho$  ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen  $F_1, F_2, F_3$  u. s. w., deren Schwerpunktsabstände  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2 \rho_1 \pi F_1 + 2 \rho_2 \pi F_2 + 2 \rho_3 \pi F_3 + \dots,$$

oder

$$J = 2 \pi [\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \rho_3 F_3 + \dots].$$

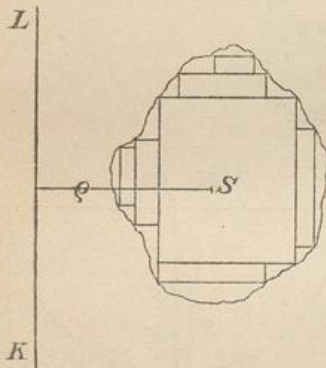
Ist nun  $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$  die Gesamtfläche und  $\rho$  ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

$$\rho F = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \rho_3 F_3 + \dots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2 \rho \pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Fig. 159.



Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, daß  $S$  als Punkt mittleren Abstandes von der Achse  $KL$  den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so daß der Körperinhalt ist: Bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

### 58) Die Guldin'sche Regel für Drehungsflächen.

Wird die Gerade  $AB$  von Länge  $s$  um eine Achse  $KL$  derselben Ebene gedreht, so entsteht der Regelmantel  $M = (r + r_1) \pi s = 2 \frac{r + r_1}{2} \pi s = 2 \rho \pi s$ , wo wiederum  $\rho$  der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

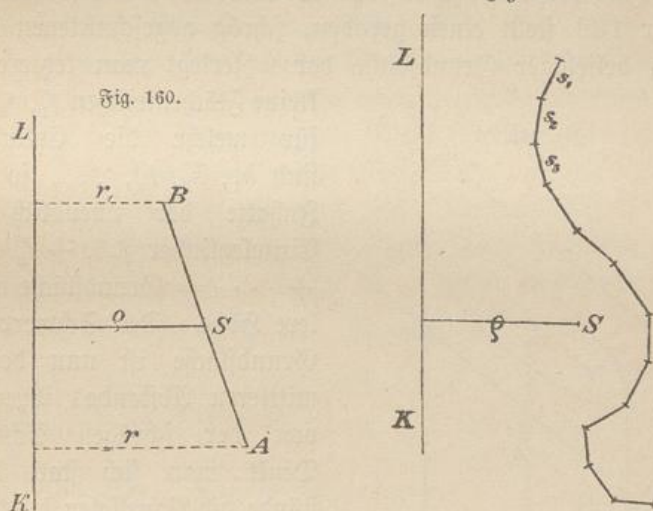
Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner  $s_1, s_2, s_3, \dots$  die Längen der Ge-

raden,  $q_1, q_2, q_3, \dots$  ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

$$\begin{aligned} M &= 2 q_1 \pi s_1 + 2 q_2 \pi s_2 + 2 q_3 \pi s_3 + \dots \\ &= 2 \pi [q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s_3 + \dots]. \end{aligned}$$

Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit  $qs$ , wo  $s = s_1 + s_2 + s_3 \dots$  die Länge des gesamten

Fig. 161.



Linienzugs,  $q$  sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$$M = 2 q \pi s = \text{Schwerpunktsweg mal Länge des Linienzugs.}$$

Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

**Beispiel.** Dreht sich ein Kreis mit Radius  $r$  um eine Gerade seiner Ebene im Abstände  $q$  vom Mittelpunkte, die ihn nicht schneidet, so wird der Inhalt des entstehenden Ringkörpers  $J = 2 q \pi r^2 \pi = 2 q r^2 \pi^2$ , der Mantel (die Oberfläche) desselben wird  $2 q \pi \cdot 2 r \pi = 4 q r \pi^2$ .

59) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der Halbkreisfläche zu finden.

**Auflösung.** Er liegt auf dem halbierenden Radius. Durch Drehung um den Durchmesser entsteht eine Kugel, für welche  $2 q \pi F = J$

$$\text{ist, so daß der Schwerpunktsabstand } q = \frac{J}{2 \pi F} = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2 \pi \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4 r}{3 \pi} \text{ wird.}$$

60) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu finden.

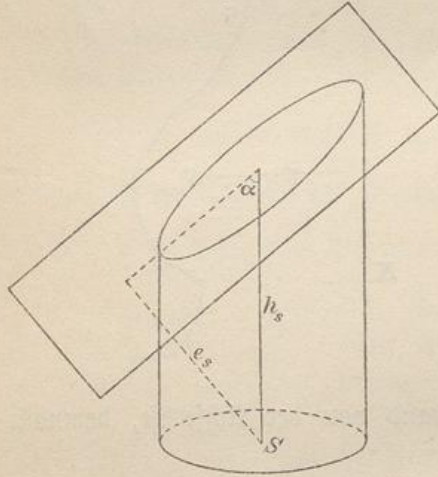
**Auflösung.** Ähnlich wie vorher entsteht eine Kugelfläche, für welche  $2 \rho \pi s = M$  ist, so daß  $\rho = \frac{M}{2 \pi s} = \frac{4 r^2 \pi}{2 \pi \cdot r \pi} = \frac{2r}{\pi}$  wird.

Auch für Kreissegmente und Kreisbogen von beliebiger Größe kann man so den Schwerpunkt bestimmen.

61) Inhalt abgechrägter Prismen und Cylinder.

Figur 162 stellt einen geraden, schräg abgechnittenen Cylinder über ganz beliebiger Grundfläche dar. Zerlegt man letztere in sehr

Fig. 162.



kleine Flächenteilchen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , für welche die Cylinderhöhen sind  $h_1, h_2, h_3, \dots$ , so sind die Inhalte der unendlich dünnen Einzylinder  $f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + \dots =$  Grundfläche mal mittlere Höhe. Der Schwerpunkt der Grundfläche ist nun der Punkt mittleren Abstandes ihrer Punkte von der schrägen Schnittebene. Denkt man sich statt der Abstände die Parallelen  $h_1, h_2, h_3, \dots = \frac{e_1}{\sin \alpha}, \frac{e_2}{\sin \alpha}, \frac{e_3}{\sin \alpha}, \dots$  gezogen, so ist ebenso das zum Schwerpunkte gehörige  $h_s$  das mittlere

unter den verschiedenen  $h$ , denn jedes  $e$  ist mit demselben Faktor multipliziert. Folglich ist der Inhalt jedes abgechrägten geraden Prismas und Cylinders

$$J = G h_s,$$

wo  $G$  die Grundfläche,  $h_s$  die zu ihrem Schwerpunkte gehörige Höhe ist. [Dreht man die Figur um  $90^\circ$ , so erhält man z. B. das Diagramm des seitlichen nach unten zunehmenden Wasserdrucks gegen die jetzt senkrechte Grundfläche des Cylinders oder Prismas. Der Druck ist also Fläche mal Schwerpunkttiefe. Seine Resultante geht durch den schwerer zu berechnenden Schwerpunkt des zugehörigen Diagrammförpers.]

62) Der Mantel abgechrägter Cylinder und Prismen.

Ist in Fig. 162  $S$  der Schwerpunkt der Grundperipherie, so ist  $h'_s$  das Mittel unter den auf den Peripheriepunkten stehenden Höhen. Folglich ist der Mantel

$$M = uh'_s,$$

wo  $u$  der Umfang der Grundperipherie,  $h'_s$  die über ihrem Schwerpunkte stehende Cylinderhöhe ist.

**Bemerkung.** Der Schwerpunkt der schrägen Schnittfläche liegt allerdings stets senkrecht über dem Schwerpunkte der Grundfläche, der Schwerpunkt ihrer Peripherie aber liegt im allgemeinen nicht senkrecht über dem der Peripherie der Grundfläche. Den Grund von letzterem erkennt man daraus, daß, wenn man auf der schrägen Peripherie Punkte in gleichen Abständen markiert und sie nach unten projiziert, wegen der wechselnden Steilheit der Peripherie die Punkte in der Projektion ungleich verteilt liegen, wodurch die Schwerpunktlage beeinflusst wird. (Bei der Ebene dagegen ist die Steilheit überall dieselbe.)

Sind die Prismen oder Cylinder oben und unten schräg abgeschnitten, so hat man einen Normalschnitt  $G$  zu führen und von seinem Schwerpunkte bezw. dem seiner Peripherie aus ein Lot zu ziehen. Ist dieses  $h_s$  bezw.  $h'_s$ , so wird wiederum

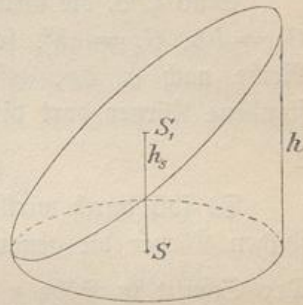
$$J = G \cdot h_s, \quad M = u \cdot h'_s.$$

**Beispiel.** Für den in Fig. 163 dargestellten Cylinderhuf ist z. B.

$$J = r^2 \pi h_s = r^2 \pi \frac{h}{2}, \quad M = 2r\pi h_s = r\pi h.$$

Hier fallen die beiden Schwerpunkte  $S$  und  $S'$  zusammen. Dies würde bei dem Hufe über dem bloßen Halbkreise nicht der Fall sein, da der Schwerpunkt der Halbkreisfläche anders liegt, als der Schwerpunkt des Halbkreisbogens und Durchmessers (beide als eine Linie betrachtet).

Fig. 163.



### VIII. Die Newton-Simpsonsche Regel und die Summenformel.\*)

63) Erste Ableitung. Für das Prismatoid und seine Spezialfälle, Prisma, Dachkörper und Pyramide (Regel), galt die Inhaltsformel

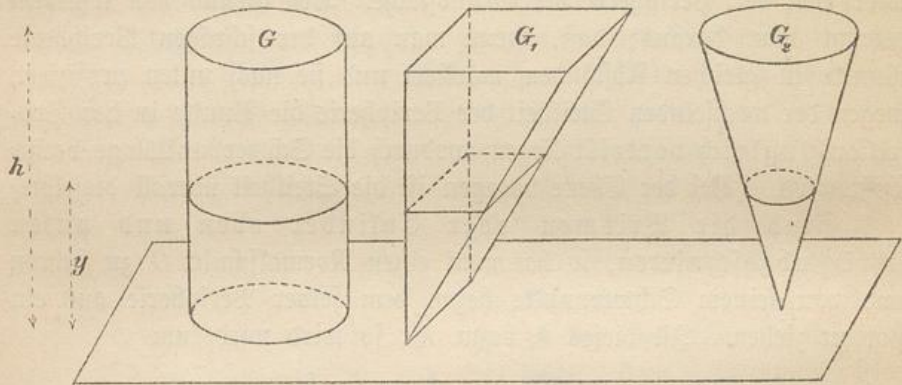
$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M].$$

In Fig. 164 sind die letzteren Körper auf die Spitze gestellt.

\*) Abschnitt VIII kann auf dem Gymnasium überschlagen werden.

Legt man die drei Querschnitte für jedes Niveau addierend oder (teilweise) subtrahierend als irgendwie gestalteten Querschnitt zusammen, so daß der neue Querschnitt  $q = q_1 \pm q_2 \pm q_3$  wird, so gilt nach früherer Bemerkung die Simpson-Regel auch für den neu entstandenen Körper.

Fig. 164.



Sind z. B. die Grundflächen der Körper der Reihe nach  $G = a$ ,  $G_1 = bh$ ,  $G_2 = ch^2$ , so sind die Querschnittsflächen in Höhe  $y$  der Reihe nach  $a$ ,  $by$ ,  $cy^2$ , also hätte der durch Zusammenlegen entstandene Körper dort die Querschnittsfläche

$$1) \quad q_y = a + by + cy^2.$$

Es soll durch wirkliche Rechnung geprobt werden, ob für einen solchen Körper die genannte Regel gilt.

Der Schnitt in Höhe  $y = 0$  ist  $U = q_0 = a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = a$ ,

$$\begin{aligned} \text{" " " " } y = \frac{h}{2} \text{ " } M = q_{\frac{h}{2}} &= a + b \frac{h}{2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{" " " " } y = h \text{ " } O = q_h = a + bh + ch^2.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \frac{h}{6} [U + O + 4M] &= \frac{h}{6} \left[ a + (a + bh + ch^2) + 4 \left( a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{h}{6} [6a + 3bh + 2ch^2] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}. \end{aligned}$$

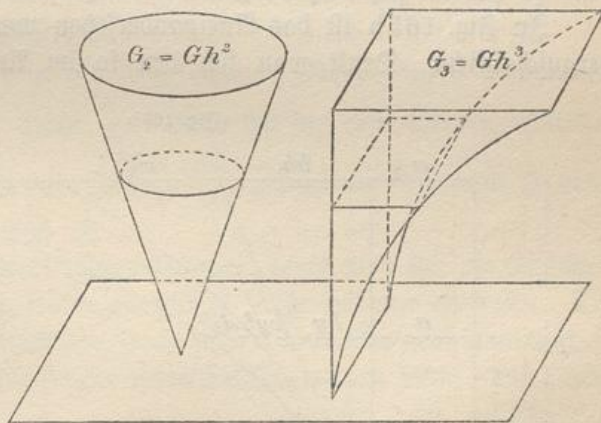
Dies sind in der That die Einzelinhalte der drei Körper, so daß die Regel als richtig nachgewiesen ist. Man kann diese Körper als Simpson'sche Körper 0<sup>ten</sup>, 1<sup>ten</sup> und 2<sup>ten</sup> Grades bezeichnen, weil ihre Querschnitte in Bezug auf  $y$  von diesem Grade sind.

Setzt man  $G_1 = Gh$  und  $G_2 = Gh^2$ , so treten die drei Körper in eine merkwürdige Beziehung. Jeder Querschnitt des folgenden stellt nämlich das statische Moment vom Querschnitt des vorhergehenden in Bezug auf die Grundfläche dar. So ist z. B.  $Gh$  das statische Moment von  $G$  in Bezug auf die Basis,  $Gh^2$  das statische Moment von  $Gh$  in Bezug auf die Basis. Ebenso erhält man als statisches Moment des Querschnitts in Höhe  $y$  beim ersten Körper  $Gy$ , und ebenso groß ist die entsprechende Querschnittsfläche des zweiten Körpers. Das statische Moment davon in Bezug auf die Grundfläche ist  $(Gy)y = Gy^2$ . Die gleich hohe Querschnittsfläche des dritten Körpers ist ebensogroß. Demnach muß auch übereinstimmen der Inhalt des zweiten Körpers mit dem statischen Momente des ersten in Bezug auf die Grundfläche, der Inhalt des dritten mit dem statischen Momente des zweiten. Die Inhalte sind der Reihe nach  $Gh$ ,  $G_1 h = G \frac{h^2}{2}$ ,  $G_2 h = G \frac{h^3}{3}$ . In der That ist das statische Moment des ersten Körpers  $Gh \cdot \frac{h}{2} = G \frac{h^2}{2}$ , das des zweiten  $G_2 \left(\frac{2}{3} h\right) = G \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h = G \frac{h^3}{3}$ .

In Fig. 165 a ist aus dem dritten Körper ein vierter derart abgeleitet, daß wiederum der Querschnitt in jeder Höhe gleich dem statischen Momente des gleich hohen Querschnitts des vorigen in Bezug auf die Grundfläche ist.

Bei letzterem hat man in Höhe  $h$  den Schnitt  $Gh^2$ , dessen statisches Moment  $Gh^3$  ist. In Höhe  $y$  hatte man  $G_2 \frac{y^2}{h^2} = Gh^2 \frac{y^2}{h^2} = Gy^2$ . Das Moment ist  $Gy^3$ . Beim andern Körper ist deshalb in Höhe  $y$  der Schnitt  $Gy^3$  angenommen. Nun ist aber das Moment des vorigen Körpers  $\frac{Gh^3}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} h\right) = G_3 \frac{h^4}{4}$ , denn der Schwerpunkt liegt in Höhe  $\frac{3}{4} h$ . Folglich ist der Inhalt des letzten Körpers ebenfalls  $G \frac{h^4}{4}$  oder Grundfläche  $Gh^3$  mal Höhe  $h$  dividiert durch 4. Auch er ge-

Fig. 165 a.



nügt der Newton-Simpsonschen Formel, denn für ihn ist  $U = 0$ ,  
 $O = Gh^3$ ,  $M = Gy^3 = G\left(\frac{h}{2}\right)^3 = G\frac{h^3}{8}$ , also ist  $\frac{h}{6}[U + O + 4M]$   
 $= \frac{h}{6}\left[0 + Gh^3 + 4 \cdot \frac{Gh^3}{8}\right] = \frac{Gh^4}{4} = J$ , womit die Formel be-  
 stätigt wird.

Kombiniert man alle 4 Körper in der besprochenen Weise, so folgt:  
 Hat ein Körper in der Höhe  $y$  den Querschnitt

$$a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt bis zur Höhe  $h$

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M].$$

Probe durch Rechnung. Der Querschnitt in Höhe 0 ist

$$a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0^3 = a,$$

der Schnitt in Höhe  $h$  ist  $a + bh + ch^2 + dh^3$ ,

" " " "  $\frac{h}{2}$  "  $a + b\frac{h}{2} + c\frac{h^2}{4} + d\frac{h^3}{8}$ ,

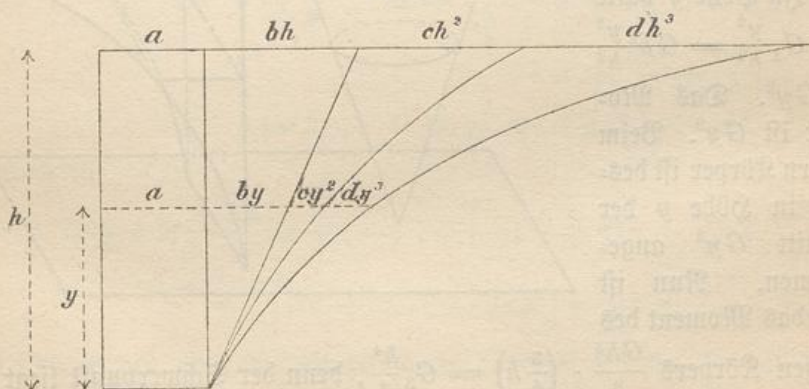
folglich ist

$$\begin{aligned} & \frac{h}{6}[U + O + 4M] \\ &= \frac{h}{6}\left[a + (a + bh + ch^2 + dh^3) + 4\left(a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}\right)\right] \\ &= \frac{h}{6}\left[6a + 3bh + 2ch^2 + \frac{3}{2}dh^3\right] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} = J, \end{aligned}$$

denn es handelt sich nach Obigem um die Inhalte der vier Einzelkörper.

In Fig. 165 b ist das Aneinandersetzen von Körpern solcher Art  
 veranschaulicht. Denkt man sich den so im Aufriß gezeichneten Ge-

Fig. 165 b.



samtkörper von der Dicke 1, so gilt die Formel zugleich von der  
 Vorderfläche. Die Regel lautet dann folgendermaßen:

Hat eine ebene Fläche in der Höhe  $q$  eine Querslinie, die sich nach der Formel

$$q_y = a + by + cy^2 + dy^3$$

berechnen läßt, so ist ihr Flächeninhalt

$$F = \frac{h}{6} [U + O + 4M] = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Wollte man eine Potenz höher gehen, so würde sich zeigen, daß der Körper vom Querschnitt  $Gy^4$  der Simpson-Regel nicht mehr gehorcht, sie gilt nur von den Simpsonschen Körpern bis zum dritten Grade und von ihren Combinationen.

**Beispiel.** Bei der Kugel ist der Radius  $x$  in Höhe  $y$  zu berechnen aus  $x^2 = r^2 - (r - y)^2 = 2ry - y^2$ . Dies ist vom 2<sup>ten</sup> Grade, folglich gilt die Simpson-Regel. Bei der Kugel ist  $U = 0$ ,  $O = 0$ ,  $M = r^2\pi$ . Demnach ist

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M] = \frac{h}{6} [0 + 0 + 4r^2\pi] \text{ oder, da } h = 2r \text{ ist, } J = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

Weitere Beispiele werden später gegeben.

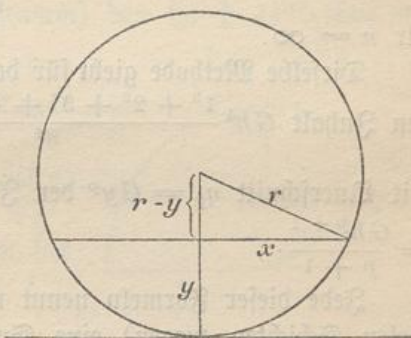
#### 64) Zweite Ableitung.

Man zerlege jeden der besprochenen Körper in  $n$  horizontale Schichten von gleicher Höhe  $\frac{h}{n}$ . Dann hat der erste Körper (Cylinder oder Prisma) Schichten vom Inhalte  $\frac{ah}{n}$ , zusammen also vom Inhalte  $ah$ , was selbstverständlich ist.

Beim zweiten Körper (Dreieckskörper) denke man sich die Schichten als senkrechte Prismen, wobei allerdings Treppenträume auftreten. Die letzteren werden aber unsichtbar, wenn man  $n$  unendlich groß annimmt, so daß der unendlich kleine Fehler vernachlässigt werden kann. Die Querschnitte sind der Reihe nach, wenn  $G_1 = Gh$  ist,  $G \frac{h}{n}$ ,  $G \frac{2h}{n}$ ,  $G \frac{3h}{n}$ , ...,  $G \frac{nh}{n}$ , also die Schichten zusammengenommen (Multiplikation jedes einzelnen mit  $\frac{h}{n}$ )

$$G \frac{h^2}{n^2} + G \frac{2h^2}{n^2} + G \frac{3h^2}{n^2} + \dots + G \frac{nh^2}{n^2} = Gh^2 \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}.$$

Fig. 166.



Für  $n = \infty$  ist der Bruch nach Arithm. Nr. 38 gleich  $\frac{1}{2}$ , also ist

$$J = \frac{Gh^2}{2}.$$

Beim dritten Körper ist  $G_2 = Gh^2$ , also sind nach Obigem die Querschnitte der Reihe nach  $G \frac{h^2}{n^2}$ ,  $G \frac{2^2 h^2}{n^2}$ ,  $G \frac{3^2 h^2}{n^2}$  ... ,  $G \frac{n^2 h^2}{n^2}$ , also die Schichten zusammengenommen

$$\begin{aligned} G \frac{h^2}{n^2} \frac{h}{n} + G \frac{2^2 h^2}{n^2} \frac{h}{n} + G \frac{3^2 h^2}{n^2} \frac{h}{n} + \dots + G \frac{n^2 h^2}{n^2} \frac{h}{n} \\ = Gh^3 \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2} = G \frac{h^3}{3} \end{aligned}$$

für  $n = \infty$ .

Dieselbe Methode giebt für den Körper mit Querschnitt  $q_y = Gy^3$  den Inhalt  $Gh^4 \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4} = G \frac{h^4}{4}$ , für den Körper mit Querschnitt  $q_y = Gy^p$  den Inhalt  $Gh^{p+1} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{Gh^{p+1}}{p+1}$ .

Jede dieser Formeln nennt man (der Summation der unendlich vielen Schichten wegen) eine Summenformel. Setzt man sämtliche Körper zu einem zusammen, so folgt:

Hat ein Körper in jeder Höhe  $y$  den Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^p,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe  $h$

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \dots + k \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Auch dieser Ausdruck wird aus dem obigen Grunde als Summenformel bezeichnet. Er ist weit allgemeiner, als die Simpsonsche Regel.

Geht der Querschnitt bloß bis zur 3<sup>ten</sup> Potenz, und bildet man  $U$ ,  $O$  und  $M$ , so findet man wie in Nr. 63, daß

$$\frac{h}{6} [U + O + 4M] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} = J$$

ist, womit die Simpson-Newton'sche Regel unabhängig von den früheren Betrachtungen gefunden ist.

**Bemerkung.** Bei diesen vom 0<sup>ten</sup> bis zum  $p$ <sup>ten</sup> Grade gehenden Einzelkörpern ist wiederum der Querschnitt jedes einzelnen bei entsprechender Annahme ( $a = b = c = \dots$ ) das statische Moment vom gleich hohen Querschnitt des vorangegangenen, sein Inhalt gleich dem statischen Momente des vorigen Körpers. Man drückt sich auch so aus:

Der Inhalt des 2<sup>ten</sup> Körpers ist das Moment 1<sup>ter</sup> Ordnung des ersten, der des dritten das Moment 2<sup>ter</sup> Ordnung des ersten Körpers, der Inhalt des vierten das Moment 3<sup>ter</sup> Ordnung des ersten Körpers u. s. w.; die Zählung kann man beginnen, wo man will. Die Momente 2<sup>ter</sup> Ordnung sind von Wichtigkeit als sogenannte Trägheitsmomente, bei denen also jedes Raumteilchen mit dem Quadrate des Abstandes von der Ebene multipliziert wird. Das Wesen und die Bedeutung der Trägheitsmomente werden in der Mechanik erörtert. Die Summenformel gilt auch von ebenen Flächen, wenn die Querschnittslinie für die Höhe  $y$  sich nach der obigen Formel (für  $q_y$ ) berechnen läßt. Bezeichnet man also die Kurve  $x = y^p$  als Parabel  $p^{\text{ter}}$  Ordnung, so schneidet sie vom zugehörigen Rechteck (bezw. Parallelogramm) den  $(p + 1)^{\text{ten}}$  Teil ab.

65) **Beispiel.** Anwendung der Summenformel auf die Halbkugel und einige ihrer Momente.

a) Inhalt. Der Schnitt in Höhe  $y$  ist  $q_y = x^2 \pi = (r^2 - y^2) \pi = r^2 \pi - \pi y^2$ .

Folglich der Inhalt der Schicht bis zur Höhe  $h$  nach der Summenformel

$$J = r^2 \pi h - \pi \frac{h^3}{3}.$$

Setzt man  $h = r$ , so wird

$$a) \quad J = r^2 \pi r - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi,$$

was wirklich der Inhalt der Halbkugel ist.

b) Statisches Moment im Bezug auf die Grundfläche. Der vorige Querschnitt  $q_y$  ist mit  $y$  zu multiplizieren (statisches Moment!), der neue wird

$$q_y = r^2 \pi y - \pi y^3.$$

Die Summenformel giebt von Höhe 0 bis Höhe  $h$  als statisches Moment der Schicht

$$M = r^2 \pi \frac{h^2}{2} - \frac{\pi y^4}{4}.$$

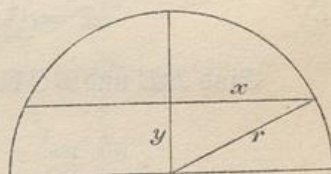
Setzt man  $h = r$ , so entsteht als Moment der Halbkugel

$$b) \quad M = r^2 \pi \frac{r^2}{2} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{r^4 \pi}{4}.$$

c) Die Schwerpunkthöhe der Halbkugel. Die Schwerpunkthöhe  $y_s$  multipliziert mit dem Inhalte giebt das statische Moment, also ist  $y_s \cdot \left(\frac{2}{3} r^3 \pi\right) = \frac{r^4 \pi}{4}$ , folglich

$$c) \quad y_s = \frac{3}{8} r.$$

Fig. 167.



d) Trägheitsmoment der Halbkugel in Bezug auf die Grundfläche. Der vorige Querschnitt ist mit  $y$  zu multiplizieren, also wird jetzt

$$q_y = r^2 \pi y^2 - \pi y^4.$$

Die Summenformel giebt als Trägheitsmoment der Schicht von Höhe 0 bis Höhe  $h$

$$T = r^2 \pi \frac{h^3}{3} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Setzt man  $h = r$ , so findet man als Trägheitsmoment der Halbkugel

$$d) \quad T = r^2 \pi \frac{r^3}{3} - \pi \frac{r^5}{5} = \frac{2}{15} r^5 \pi.$$

Für die ganze Kugel erhält man als Trägheitsmoment in Bezug auf einen Hauptschnitt

$$e) \quad T = \frac{4}{15} r^5 \pi = \left( \frac{4}{3} r^3 \pi \right) \frac{r^2}{5} = J \frac{r^2}{5}.$$

Sind  $DE$  und  $BC$  die Projektionen zweier Hauptschnitte der Kugel,

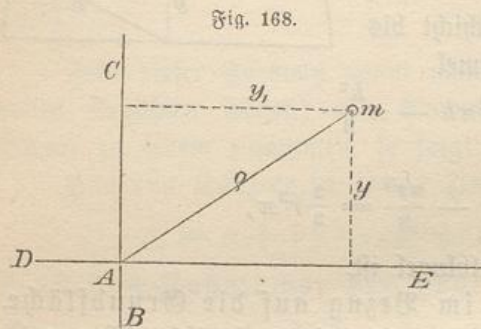


Fig. 168.

die auf einander senkrecht stehen, so daß  $A$  die Projektion ihres Schnittes ist, so ist  $y^2 + y_1^2 = r^2$ . Für ein Raumteilchen  $m$  ist also  $my^2 + my_1^2 = m r^2$ , für viele Raumteilchen also  $\Sigma my^2 + \Sigma my_1^2 = \Sigma m r^2$ , d. h. das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $A$  ist die Summe der Trägheitsmomente für die Hauptschnitte  $BC$  und

$DE$ . Also ist für die Kugel das Trägheitsmoment für einen Durchmesser als Achse

$$f) \quad T = \frac{4}{15} r^5 \pi + \frac{4}{15} r^5 \pi = \frac{8}{15} r^5 \pi = \left( \frac{4}{3} r^3 \pi \right) \frac{2 r^2}{5} = \frac{2 r^2}{5} J.$$

Die Mechanik setzt statt  $J$  die Masse  $m$  der Kugel, so daß

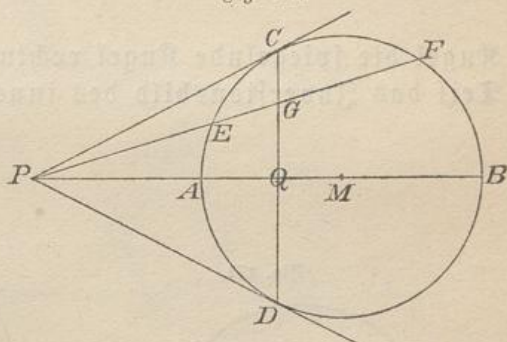
g)  $T = \frac{2}{5} m r^2$  wird und löst mit Hilfe dieses Ausdrucks zahlreiche Aufgaben über die Dynamik der Kugeln, z. B. des Erdballs.

Dieses eine Beispiel möge andeuten, von wie außerordentlicher Tragweite die Summenformel ist. Nur für a) b) und c) würde die Simpsonsche Regel ausgereicht haben, für die späteren Entwicklungen aber nicht, da die „Querschnitte“ über den dritten Grad hinausgingen.

## IX. Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen.

66) Fig. 169 stellt einen Kreis dar, an den von  $P$  aus Tangenten gezogen sind, so daß  $DC$  die Berührungsehne (Polare) ist. Jede Sekante  $PF$  enthält harmonische Punkte  $PGEF$ , zugleich ist  $PC^2 = PE \cdot PF$ , also, wenn man  $PC = 1$  setzt,  $PE = \frac{1}{PF}$  und  $PF = \frac{1}{PE}$ . (Inversion.) Ferner ist  $MQ \cdot MP = MA^2$ , also, wenn man  $r = 1$  setzt,  $MQ = \frac{1}{MP}$ . (Geometrie Nr. 74.)

Fig. 169.



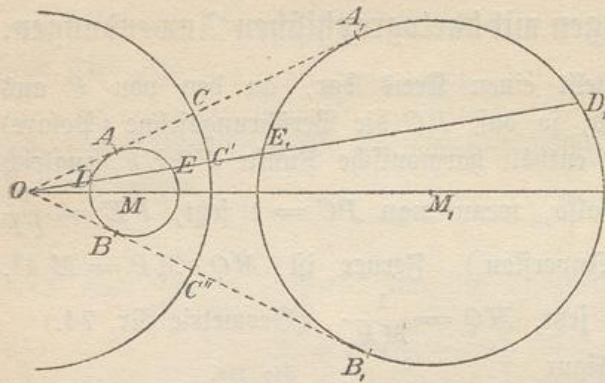
Dreht man die Figur um die Achse  $PB$ , so verwandelt sich der Kreis in eine Kugel, die Tangente  $PC$  giebt einen Tangentenkegel  $PCD$ , und alle Tangenten von  $P$  an die Kugel sind einander gleich. Die Gerade  $DC$  wird die Berührungsebene des Tangentenkegels, auch Polarebene des Punktes  $P$  genannt. Jede Kugelsekante ist harmonisch geteilt, denn  $PGEF$  bleibt bei der Drehung ein harmonisches Punktsystem. Setzt man  $PC = 1$ , so bleibt für die Kugel  $PE = \frac{1}{PF}$ , der Teil  $DAC$  der Kugeloberfläche ist also das Inversionsbild des Teils  $DBC$ . Auch bleibt allgemein  $PE \cdot PF = PC^2$ . Setzt man aber  $MA = 1$ , so ist wieder  $MQ = \frac{1}{MP}$ .

Beruche dieselben Betrachtungen für einen Punkt  $P$  innerhalb der Kugel und seine außerhalb liegende Polarebene.

67) In Fig. 170 ist der Kreis  $M_1$  das Inversionsbild des Kreises  $M$  gegen den spiegelnden Kreis  $O$ , also z. B.  $OA \cdot OA_1 = OC^2$ ,  $OD \cdot OD_1 = OC'^2$ ,  $OE \cdot OE_1 = OC''^2$ , oder, wenn  $OC = 1$  gesetzt wird,  $OA_1 = \frac{1}{OA}$ ,  $OD_1 = \frac{1}{OD}$ ,  $OE_1 = \frac{1}{OE}$  u. s. w.  $O$  ist äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $M$  und  $M_1$ .

Dreht man die Zeichnung um die Achse  $OMM_1$ , so entstehen Kugeln. Folglich: Das Inversionsbild einer Kugel gegen eine andere Kugel ist stets eine Kugel. Das Inversionscentrum ist Ähnlichkeitspunkt beider Kugeln.

Fig. 170.

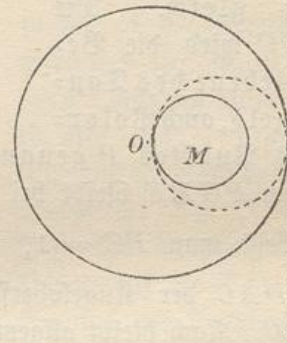
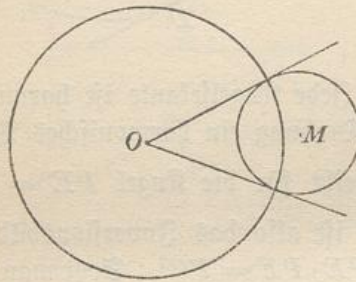


Schneidet der Kreis  $M$  den spiegelnden Kreis  $O$  rechtwinklig, so ist sein äußerer Teil das Inversionsbild des inneren (Fig. 171). Durch Drehung um  $OM$  entstehen zwei sich rechtwinklig schneidende Kugeln. Man erkennt:

Schneidet eine Kugel die spiegelnde Kugel rechtwinklig, so ist ihr äußerer Teil das Inversionsbild des inneren.

Fig. 172.

Fig. 171.



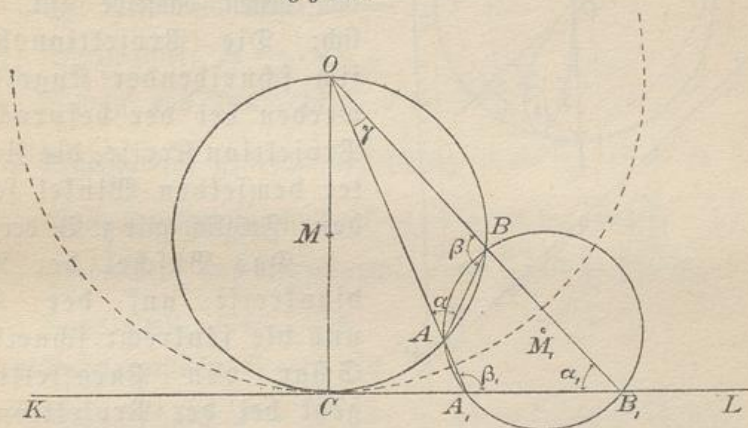
Ebenso folgt: Geht eine Kugel durch das Inversionscentrum  $O$ , so ist ihr Spiegelbild eine Ebene, denn aus  $\frac{1}{0} = \infty$  folgt, daß das Spiegelbild sich ins Unendliche erstreckt, so daß der Radius des Bildes unendlich groß ist. Berührt dabei die durch  $O$  gehende Kugel die spiegelnde Kugel, so ist ihr Bild eine Tangentialebene. (Fig. 172.)

68) Die stereographische Projektion von Hipparch-Ptolemäus.

In Fig. 173 sei  $O$  das Inversionscentrum,  $OC = 1$  der Radius des Inversionskreises, so daß  $KL$  das Spiegelbild des Kreises  $M$  ist. Aus  $OA \cdot OA_1 = OC^2 = 1$  und  $OB \cdot OB_1 = OC^2 = 1$  folgt  $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ , oder  $OA : OB = OB_1 : OA_1$ , und da  $\sphericalangle \gamma$

sich selbst gleich ist, so ist  $\triangle OAB \sim \triangle OB_1A_1$ , folglich  $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$  und  $\sphericalangle \beta = \beta_1$ . Folglich sind im Viereck  $ABB_1C_1$  je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen gleich  $180^\circ$ , um das Viereck läßt sich also ein Kreis beschreiben. Da nun die Punkte  $B$  und  $B_1$  bezw.  $A$  und  $A_1$  sich bei der Inversion gegenseitig entsprechen, so ist der Kreis  $ABB_1A_1$  ein solcher, der sein eignes Inversionsbild ist, d. h. er schneidet den Kreis  $O$  rechtwinklig.

Fig. 173.



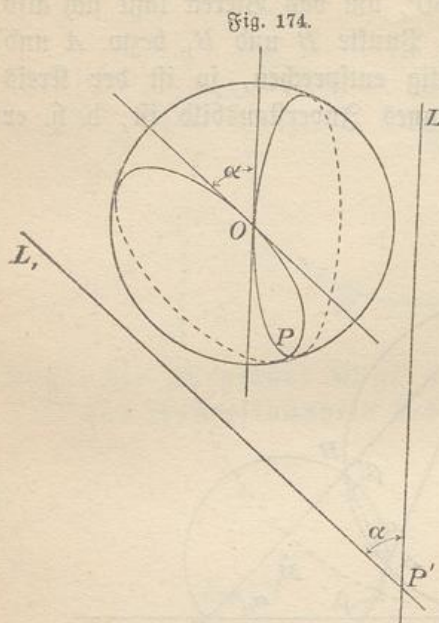
Jetzt stelle der Kreis um  $O$  eine Kugel dar, ebenso die Kreise um  $M$  und  $M_1$ , so daß die Tangentialebene  $KL$  das Bild der Kugel  $M$  ist, während die Kugel  $M_1$  ihr eignes Inversionsbild ist. Die letztere schneidet die Kugel  $M$  in einem Kreise  $AB$  und die Tangentialebene  $KL$  in einem Kreise  $A_1B_1$ , da aber die Kugel  $M_1$  ihr eignes Inversionsbild ist, so ist der Kreis  $A_1B_1$  das Inversionsbild des Kreises  $AB$ .

Mit anderen Worten: Projiziert man einen beliebigen Kreis einer Kugel von einem Punkte  $O$  der Kugeloberfläche aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene, so entsteht als Projektion stets ein Kreis. (Er wird zur Geraden, wenn der projizierte Kreis durch  $O$  geht.)

[Gleichzeitig erkennt man Folgendes: In dem schiefen Kreiskegel  $ABO$  ist nicht nur  $AB$  ein Kreischnitt, sondern auch  $A_1B_1$ . Jeder schiefe Kreiskegel hat also zwei Parallelscharen von Kreischnitten, Schnitt und Gegenchnitt.]

Fig. 174 ist eine Grundrißzeichnung,  $O$  ist als oberster Punkt der Kugel aufzufassen und hat dieselbe Bedeutung wie vorher. In  $O$  schneiden sich zwei Kreise unter dem  $\sphericalangle \alpha$ , der zugleich der ihrer Tangenten in  $O$  ist. Die Projektionsbilder der beiden Kreise durch

$O$  sind Gerade  $KL$  und  $K_1L_1$ , die zu den Tangenten in  $O$  parallel sind. Folglich ist ihr Schnittwinkel  $\alpha_1$  gleich dem Schnittwinkel der



Kreise in den Punkten  $O$  und  $P$ . Nun ist aber  $P'$  die Projektion von  $P$ , folglich: Gleichen Winkeln bei  $P$  entsprechen gleiche Winkel bei  $P'$ , denn es lassen sich andere Kreise durch  $O$  und  $P$  legen, von denen dasselbe gilt. Folglich: Die Projektionsbilder sich schneidender Kugelkreise werden bei der besprochenen Projektion Kreise, die sich unter demselben Winkel schneiden. Folglich gilt z. B. der Satz:

Das Büschel der Meridiankreise auf der Kugel und die senkrecht schneidende Schar von Parallelkreisen geht bei der Projektion von

einem beliebigen Kugelpunkte aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene über in ein Kreisbüschel durch zwei Punkte und die dasselbe rechtwinklig durchsetzende Kreischar. Ein sehr kleines Kreisdreieck auf der Kugel geht über in ein gleichwinkliges, also ähnliches auf der Tangentialebene, folglich wird die Projektion eine winkeltreue (isogonale) und in den kleinsten Teilen ähnliche.

Ist also z. B. die Kugeloberfläche durch Meridiane und Parallelkreise in kleine Quadrate eingeteilt, so erhält man in der Projektion die Einteilung der Ebene in kleine Quadrate durch Kreisbüschel und Kreischar, wie sie in den Figuren 79, 80, 81 und 82 der Planimetrie bereits dargestellt ist. Die dort dargestellte Polarkarte, die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel, die der größten oder kleinsten Wassermasse, entstehen also sämtlich durch Centralprojektion von einem Punkte der Kugeloberfläche aus auf die sogenannte Antipodenebene.

Man nennt diese Projektionsart die stereographische Projektion von Hipparch-Ptolemäus\*).

\*) Näheres siehe in der „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ und unten am Schlusse des Anhangs.

X. Zusammenstellung der wichtigsten Berechnungsformeln der Stereometrie.

- 1) Prisma und Cylinder, senkrecht und schräg,  $J = Gh$ .
- 2) Mantelfläche des senkrechten Cylinders und Prismas,  $M = uh$ .
- 3) Dachkörper,  $J = \frac{Gh}{2}$ .
- 4) Pyramide und Kegel,  $J = \frac{Gh}{3}$ .
- 5) Kegelmantel,  $M = r\pi s$ .
- 6) Stumpf des Dachkörpers,  $J = \frac{G + G_1}{2} h$ .
- 7) Kegeltumpf, senkrecht und schräg,  $J = \frac{\pi h}{3} [r^2 + r\varrho + \varrho^2]$ .
- 8) Mantel des Kegeltumpfs,  $M = (r + \varrho)\pi s$ , wo  $s = \sqrt{(r - \varrho)^2 + h^2}$ .
- 9) Pyramiden- und Kegeltumpf,  $J = \frac{h}{3} [G + \sqrt{GG_1} + G_1]$ .
- 10) Kugelinhalt,  $J = \frac{4}{3} r^3 \pi$ .
- 11) Kugeloberfläche  $O = 4 r^2 \pi$ .
- 12) Kugelabschnitt,  $J = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2)$ .
- 13) Kugelausschnitt,  $J = \frac{2}{3} r^2 \pi h$ .
- 14) Kalotte und Zone,  $O = 2 r \pi h$ .
- 15) Kugelschicht,  $J = \frac{\pi h}{6} [3a^2 + 3b^2 + h^2]$ .
- 16) Inhalt des Drehungskörpers,  $J = 2 \varrho \pi F$ .
- 17) Mantel des Drehungskörpers,  $M = 2 \varrho' \pi s$ .
- 18) Abgeschrägtes Prisma und Cylinder,  $J = G \cdot h_s$  (wo  $G$  der Normalschnitt und  $h_s$  die Höhe über seinem Schwerpunkte ist).
- 19) Abgeschrägtes Prisma und Cylinder,  $M = u \cdot h'_s$  ( $u =$  Peripherie des Normalschnitts).
- 20) Newton-Simpson'sche Formel für Körper mit Querschnitt bis zum 3<sup>ten</sup> Grade:

$$J = \frac{h}{6} [U + O + 4M].$$

- 21) Summenformel für Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^p:$$

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \dots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}.$$

## Fünfte Abteilung.

# Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

1) **Vorbemerkung.** Jeder ebene Schnitt durch einen senkrechten oder schiefen Kreiskegel heißt ein Kegelschnitt. Auch der senkrechte und schiefe Kreiszylinder kann als Kegel betrachtet werden, nur liegt bei ihm die Spitze in unendlicher Entfernung. Demnach gehören die Schnitte solcher Cylinder zu den Kegelschnitten. Über den Kegelschnitten lassen sich ebenfalls Cylinder und Kegel errichten. Es läßt sich zeigen, daß auch die ebenen Schnitte dieser Gebilde Kegelschnitte im gewöhnlichen Sinne geben. Ist dies der Fall, so bedeutet es nur eine Auffassung von einem anderen Gesichtspunkte aus, wenn man sagt, jede Parallel- oder Centralprojektion eines Kegelschnittes giebt wieder einen Kegelschnitt. Es läßt sich vermuten, daß, da der Kreis ein Kegelschnitt ist, zahlreiche seiner Eigenschaften sich auf die übrigen Kegelschnitte übertragen lassen oder auf besondere Eigenschaften der letzteren hinführen. Noch sei bemerkt, daß in der analytischen Geometrie jeder Kegelschnitt eine ebene Kurve ist, in deren Gleichung die Koordinaten in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommen, und daß umgekehrt jede ebene Kurve zweiten Grades einen Kegelschnitt bedeutet. Es handelt sich also hier um ein in sich vollkommen abgerundetes Gebiet der Elementarmathematik, in welches jedoch hier nur ein Einblick gegeben werden soll.

### I. Die Ellipse als Cylinderschnitt.

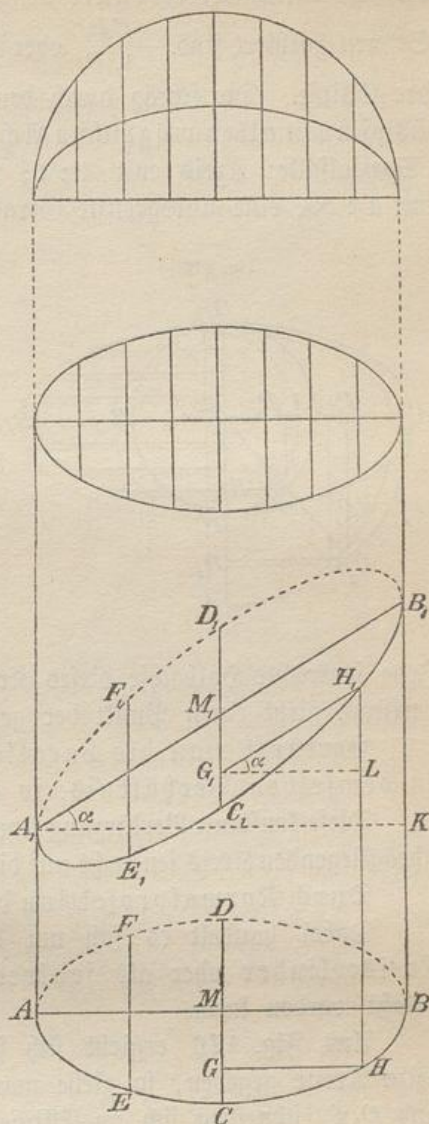
2) Figur 175 stellt einen senkrechten Kreiszylinder (in der Parallelperspektive 1 : 2 mit Neigung  $90^\circ$ ) dar. Durch den Punkt  $M_1$

seiner Achse ist eine nach hinten gehende Horizontale  $C_1D_1$  ( $\neq CD$ ) gezogen und durch diese eine Ebene  $A_1C_1B_1D_1$  gelegt, deren Neigungswinkel als  $\sphericalangle B_1A_1K = \alpha$  zu messen ist, so daß  $A_1B_1$  die Richtung ihrer steilsten Geraden anzeigt. Die Schnittkurve  $A_1C_1B_1D_1$  heißt Ellipse. Der Grundkreis ist eine senkrechte Projektion dieser Ellipse, die Ellipse die schräge Parallelprojektion des Kreises auf die Ebene  $A_1C_1B_1$ , bei der zunächst die Strahlen senkrecht zum Kreise stehen. Jede Horizontale  $E_1F_1$  der Ellipse ist gleich und parallel ihrer Projektion  $EF$ , jede steilste Gerade  $G_1H_1$  ( $\parallel A_1B_1$ ) steht zu ihrer Projektion  $GH$  in demselben Verhältnis, wie  $M_1B_1 : MB$  oder wie  $A_1B_1 : AB$ . Sämtliche Parallelen zu  $C_1D_1$  in der Ellipsenfläche sind durch  $A_1B_1$  halbiert, sämtliche zu  $A_1B_1$  parallelen Sehnen sind durch  $C_1D_1$  halbiert. (Warum?) Folglich:

Verlängert man bei einem Kreise die senkrecht gegen einen Halbmesser gezogene Parallelschar von Halbsehnen in demselben Verhältnis, so entsteht eine Ellipse. (In Fig. 176 ist 1:2 gewählt.)

Der verlängerte Durchmesser  $A_1B_1$  heißt die große Achse, der unverändert gebliebene  $CD$  heißt die kleine Achse der Ellipse.  $A_1B_1$  und  $CD$  sind die Mittellinien des der Ellipse zu umschreibenden Hauptrechtecks. Beide Geraden sind Symmetrieachsen\*) der Ellipse,

Fig. 175.



\*) Wenn in Fig. 175 die Gerade  $A_1B_1$  nicht wie eine Symmetrieachse aussieht, so hat dies nur perspektivische Gründe. Man muß zwischen wirklicher und scheinbarer Symmetrieachse unterscheiden.

## Fünfte Abteilung.

# Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

1) **Vorbemerkung.** Jeder ebene Schnitt durch einen senkrechten oder schiefen Kreisegel heißt ein Kegelschnitt. Auch der senkrechte und schiefe Kreiszylinder kann als Kegel betrachtet werden, nur liegt bei ihm die Spitze in unendlicher Entfernung. Demnach gehören die Schnitte solcher Cylinder zu den Kegelschnitten. Über den Kegelschnitten lassen sich ebenfalls Cylinder und Kegel errichten. Es läßt sich zeigen, daß auch die ebenen Schnitte dieser Gebilde Kegelschnitte im gewöhnlichen Sinne geben. Ist dies der Fall, so bedeutet es nur eine Auffassung von einem anderen Gesichtspunkte aus, wenn man sagt, jede Parallel- oder Centralprojektion eines Kegelschnittes giebt wieder einen Kegelschnitt. Es läßt sich vermuten, daß, da der Kreis ein Kegelschnitt ist, zahlreiche seiner Eigenschaften sich auf die übrigen Kegelschnitte übertragen lassen oder auf besondere Eigenschaften der letzteren hinführen. Noch sei bemerkt, daß in der analytischen Geometrie jeder Kegelschnitt eine ebene Kurve ist, in deren Gleichung die Koordinaten in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommen, und daß umgekehrt jede ebene Kurve zweiten Grades einen Kegelschnitt bedeutet. Es handelt sich also hier um ein in sich vollkommen abgerundetes Gebiet der Elementarmathematik, in welches jedoch hier nur ein Einblick gegeben werden soll.

### I. Die Ellipse als Cylinderschnitt.

2) Figur 175 stellt einen senkrechten Kreiszylinder (in der Parallelperspektive 1 : 2 mit Neigung  $90^\circ$ ) dar. Durch den Punkt  $M_1$

punkten desselben ( $AD$  und  $BC$ ) sind parallel zur Sehnen-  
schar. Die Tangenten in den Endpunkten des zur Sehnen-  
schar gehörigen Durchmessers  
 $GH$ , also  $AB$  und  $CD$ , sind  
parallel zu dem halbierenden  
Durchmesser  $EF$ . Die Sehnen  
der Parallelschar stehen bei  
der Ellipse unter einander  
in demselben Verhältnis, wie  
die entsprechenden Sehnen  
beim Kreise. So ergibt sich  
z. B. Folgendes:

Legt man die in demselben  
Verhältnis verlängerte oder  
verkürzte Parallelschar von  
Sehnen eines Kreises  
in beliebiger Richtung  
als Parallelschar an  
den Durchmesser an  
(wie es vorher unter  
 $90^\circ$  geschah), so ent-  
steht eine Ellipse.

Fig. 177.

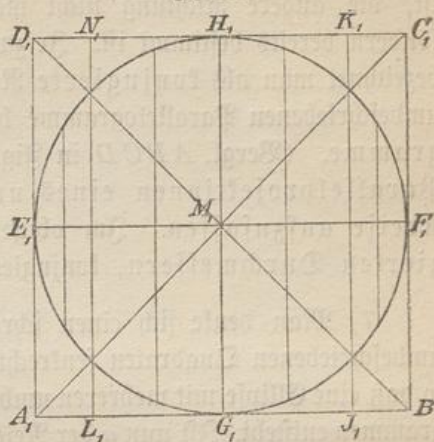
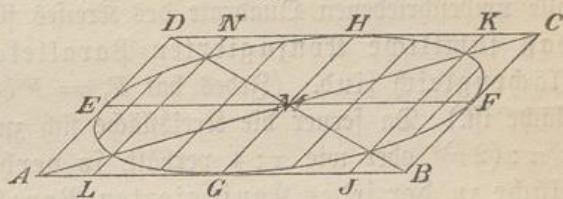


Fig. 178.



5) An dieser Ellipse kann man mit jeder Parallelschar dasselbe  
wiederholen, stets entsteht wieder eine Ellipse, die man auch direkt  
aus dem Kreise entstehen lassen könnte. Dasselbe erreicht man, indem  
man über einer Ellipse einen beliebigen schrägen Cylinder konstruiert  
und diesen durch eine ganz beliebige Ebene schneidet. Folglich:

Jeder ebene Schnitt durch jeden beliebigen (senkrechten  
oder schiefen) elliptischen Cylinder ist eine Ellipse, jede be-  
liebige Parallelprojektion der Ellipse ist eine Ellipse. Im  
speziellen Falle treten Kreise an die Stelle der Ellipse. An jedem  
elliptischen Cylinder lassen sich Kreischnitte auffinden.

Der Kreis und die Kugel erscheinen in schräger Parallel-  
perspektive stets als Ellipse, ihr von der Sonne auf eine  
Ebene geworfener Schatten ist stets eine Ellipse. (Tangenten-  
cylinder der Sonnenstrahlen an der Kugel.)

6) Halbirt man zwei parallele Sehnen der Ellipse, so erhält man  
durch Verbindung der Halbierungspunkte den halbierenden Durchmesser  
der Sehnen-schar, und die Figur läßt sich zu einem umbeschriebenen

Parallelogramm ergänzen, dessen Berührungspunkte den Mittellinien angehören. Diese besondere Art umbeschriebener Parallelogramme hat die Eigentümlichkeit, daß, wenn die eine Richtung gegeben ist, die andere Richtung nicht mehr beliebig gegeben werden kann, sondern bereits bestimmt ist. Je zwei so zusammengehörige Richtungen bezeichnet man als konjugierte Richtungen, die durch sie gegebenen umbeschriebenen Parallelogramme heißen Konjugierten-Parallelogramme. (Vergl.  $ABCD$  in Fig. 178.) Die letzteren sind stets als Parallelprojektionen eines umbeschriebenen Quadrates am Kreise aufzufassen. Im obigen Sinne spricht man von konjugierten Durchmesser, konjugierten Sehnen u. s. w.

7) Man denke sich einen schräg liegenden Kreis mit mehreren umbeschriebenen Quadraten senkrecht auf die Horizontalebene projiziert, so daß eine Ellipse mit mehreren umbeschriebenen Konjugierten-Parallelogrammen entsteht. Ist nun  $\alpha$  der Neigungswinkel der Kreisebene, so erhält jeder Flächenteil  $F$  in der Projektion den Inhalt  $F \cos \alpha$ . Da aber alle umbeschriebenen Quadrate des Kreises flächengleich sind, so folgt, daß sämtliche Konjugierten-Parallelogramme der Ellipse flächengleich sind. (Jedes hat  $F_1 = F \cos \alpha$ , wo  $F$  die Quadratfläche ist.) Da ferner die Kreisfläche sich zur Quadratfläche hier wie  $r^2 \pi : (2r)^2$  oder wie  $\pi : 4$  verhält, so verhält sich die Ellipsenfläche zu der jedes Konjugierten-Parallelogramms wie  $\pi : 4$ . So ist z. B. der Inhalt des Hauptrechtecks der Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  gleich  $4ab$ , folglich ist die Ellipsenfläche gleich  $(4ab) \frac{\pi}{4} = ab\pi$ , was sich auch aus der zuerst gegebenen Konstruktionsmethode (in Nr. 2) ohne weiteres ableiten läßt.

Sind ferner  $c$  und  $d$  die unter dem Winkel  $\alpha$  aneinander stoßenden Seiten des Konjugierten-Parallelogramms, so ist dessen Flächeninhalt  $F_1 = cd \sin \alpha$ , der der zugehörigen Ellipse also, die in den Schnittpunkten der Mittellinien berührt, ist

$$F = \frac{\pi}{4} cd \sin \alpha.$$

Da sich in das Parallelogramm noch andere Berührungsellipsen einzeichnen lassen, sei die besprochene als die Hauptellipse des Parallelogramms bezeichnet. [Den Umfang der Ellipse zu berechnen, ist mit elementaren Hilfsmitteln nicht möglich.]

#### 8) Einige Übungsaufgaben.

a) Zu einer gegebenen Ellipse den Mittelpunkt und die Achsen zu finden.

**Auflösung.** Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen bestimmen einen Durchmesser, dessen Halbierung den Mittelpunkt giebt. Ein Kreis um den letzteren, der die Ellipse in vier Punkten schneidet, giebt Sehnen, deren Richtungen mit den Achsenrichtungen übereinstimmen.

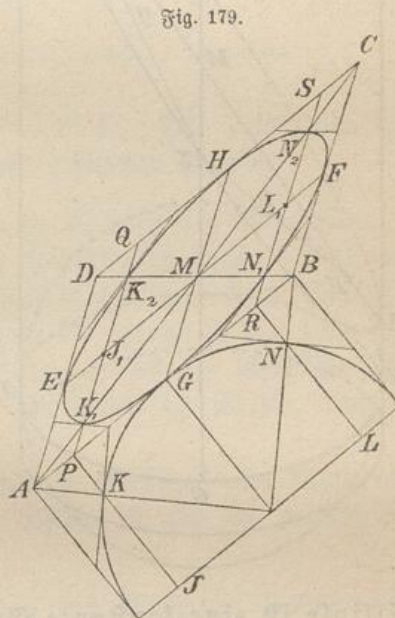
b) In einem Ellipsenpunkte die Tangente zu konstruieren.

**Auflösung.** Ziehe den zum Punkte gehörigen Durchmesser, halbiere ihn und ebenso eine parallele Sehne. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte giebt die Tangentenrichtung.

c) In ein gegebenes Parallelogramm die Hauptellipse einzuzeichnen.

**Auflösung.** Man zeichne über der Grundlinie ein Quadrat mit dem einbeschriebenen Kreise und stelle Fig. 177 und 178 her. (Vergl. auch Fig. 179.)

9) Wink für die Parallelperspektive. Soll in das Parallelogramm  $ABCD$  (Fig. 179) die Hauptellipse schnell skizziert werden, so ziehe man die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  und durch ihren Schnittpunkt  $M$  die Mittellinien  $EF$  und  $GH$ , welche die Berührungspunkte geben. Die Halbkreisloten  $JK$  und  $LN$  geben Parallele  $PQ$  und  $RS$  mit den Ellipsenpunkten  $K_1, K_2, N_1, N_2$ , durch welche Parallele zu den Diagonalen zu legen sind. So erhält man 8 Tangenten mit den Berührungspunkten, was zum Skizzieren der Ellipse ausreicht. Der Vergleich mit der Kreisfigur ergibt die Richtigkeit.

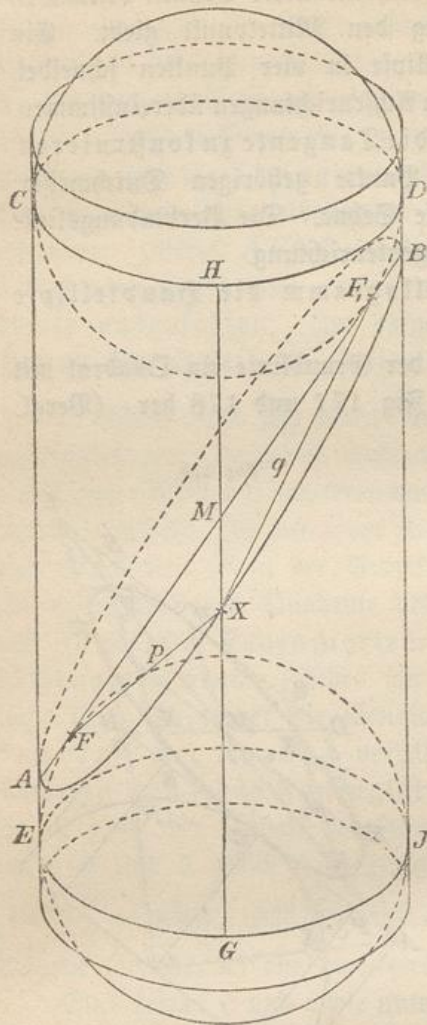


Anderer Übungen findet man in der „Einführung in das ster. Zeichnen“. Die Sätze über Pol und Polare, ebenso die Sätze von Pascal und Brianchon gelten auf Grund der Parallelprojektion von der Ellipse ebenso, wie vom Kreise.

10) Berührungskugeln und Brennpunkte der Ellipse.

Fig. 180 stellt einen Kreiszylinder mit schräger Schnittebene dar, in den Berührungskugeln soweit eingeschoben sind, daß sie die Schnittebene in  $F$  und  $F_1$  berühren. [Von diesen Kugeln sind in Fig. 180 nur die Hauptkreise gezeichnet, denn genau genommen

Fig. 180.



müßten die Kugeln als Ellipsen erscheinen.] Verbindet man einen beliebigen Punkt  $X$  der Schnittcurve mit  $F$  und  $F_1$  und legt man durch  $X$  die Gerade  $GH$  auf der Cylinderfläche, die von dem Berührungskreise  $CD$  bis zum Berührungskreise  $EJ$  reicht, so sind  $FX$  und  $XG$  als Tangenten an die untere Kugel einander gleich, ebenso  $F_1X$  und  $XH$  als Tangenten an die obere Kugel, folglich ist  $FX + XF_1 = GX + XH$ , oder  $p + q = GH$ . Nun ist aber der Abstand  $GH$  der parallelen Kreise  $CD$  und  $EJ$  überall derselbe, folglich muß auch die Liniensumme  $p + q$  für alle Punkte der Schnittcurve dieselbe Größe haben. Man nennt  $F$  und  $F_1$  aus einem später zu erörternden Grunde die Brennpunkte der Ellipse, ihre Verbindungslinien mit einem beliebigen Punkte der Peripherie bezeichnet man als zusammengehörige Brennstrahlen. Man hat also den Satz:

Die Summe zusammengehöriger Brennstrahlen der

Ellipse ist eine konstante Größe.

$AB$  ist die große Achse der Ellipse. Auf ihr liegen  $F$  und  $F_1$  in derselben Entfernung  $e$  von  $M$ . Man nennt  $e$  die Brennweite der Ellipse.

11) Aufgabe. Eine Ellipse von gegebener Brennweite  $e$  zu konstruieren, für welche die konstante Summe der Brennstrahlen gleich  $2a$  ist.

Auflösung. Man lege  $FF_1 = 2e$  (Fig. 181) beliebig hin. Auf  $KL = 2a$  wähle man einen beliebigen Teilpunkt  $Z$  und schlage mit  $KZ = p$  und  $ZL = q$  Kreisbogen um  $F$  und  $F_1$ , die sich in zwei Punkten  $P$  und  $P_1$  schneiden. Wechselt man für jede Zirkelöffnung den Brennpunkt, so findet man noch  $P_3$  und  $P_4$ , also im ganzen



und denkt man sich diese von der Ellipse (nach dem bekannten optischen Gesetze der Gleichwinkeligkeit) reflektiert, so vereinigen sich sämtliche zurückgeworfenen Strahlen im anderen Brennpunkte.

(Fallen hingegen von außen Lichtstrahlen in der Richtung nach dem einen Brennpunkte ein, so werden sie so zurückgeworfen, als ob sie aus dem anderen Brennpunkte kämen.)

Der Name Brennpunkt ist also optischen Ursprungs.

14) Alle möglichen Punkte  $F_2$  liegen auf einem Kreise mit Radius  $2a$  um den Mittelpunkt  $F$ , folglich die Halbierungspunkte  $Q$  aller möglichen Geraden  $F_1F_2$  auf einem Kreise mit dem halb so großen Radius  $a$  (gesetzmäßige Verkleinerung  $\frac{1}{2}$  mit äußerem Ähnlichkeitspunkte  $F_1$ ). Man merke also noch folgende beiden Konstruktionen:

a) Schlägt man einen Kreis um  $F$  mit dem Radius  $F_1F_2 = 2a$ , verbindet man jedes  $F_2$  mit  $F_1$ , und errichtet

man in dem Halbierungspunkte  $Q$  auf jedem  $F_1F_2$  ein Lot, so erhält man als Schnittpunkte mit dem entsprechenden  $FF_2$  lauter Ellipsenpunkte  $P$ .

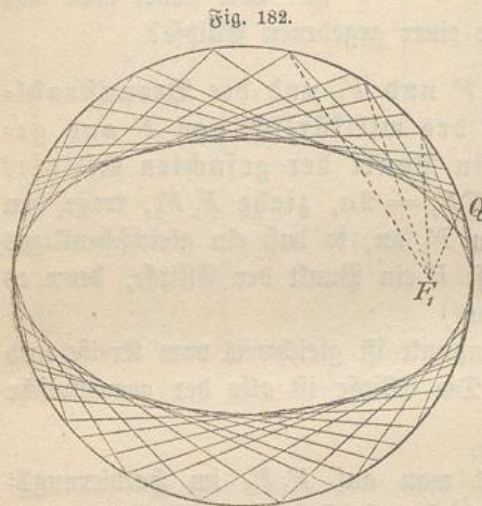


Fig. 182.

b) Hat man einen Kreis mit Radius  $a$  (Fig. 182) und in ihm einen beliebigen Punkt  $F_1$ , und errichtet man auf jedem Strahle  $F_1Q$  im Punkte  $Q$  der Peripherie ein Lot, so schattiert man die Ellipse durch lauter Tangenten aus. (Der Kreis wird der umbeschriebene Kreis der Ellipse.) Diese Konstruktion

ist mit Hilfe des Winkeldreiecks leicht auszuführen. Legt man die Lote dicht genug an einander, so ist ein Ausziehen der Kurve überflüssig.

## II. Die Ellipse als Kegelschnitt.

15) Fig. 183 stellt einen senkrechten Kreiskegel dar, der durch eine schräge Ebene geschnitten ist, die nur den einen Mantel, nicht seine Erweiterung nach oben trifft. In den Regel sind Berührungspunkte

kugeln eingelegt, die zugleich die Ebene in  $F$  und  $F_1$  berühren. Durch einen willkürlichen Punkt  $X$  der Schnittkurve ist wiederum eine Gerade  $GH$  auf der Regeloberfläche vom Berührungskreise  $EJ$  bis zum Berührungskreise  $CD$  gelegt, außerdem ist  $X$  mit  $F$  und  $F_1$  verbunden worden. Ebenso, wie im vorigen Abschnitt, ist  $FX = XG$ ,  $F_1X = XH$ , folglich  $FX + F_1X = GH$ . Da aber  $GH = DJ = CE$  für den auf der Regelfläche gemessenen Abstand der beiden Parallelkreise  $CD$  und  $EJ$  eine konstante Größe ist, so ist  $FX + F_1X$  für alle Punkte der Schnittkurve konstant, also, wie bei dem Kreiszylinder,  $p + q = 2a$ .

Der nur einen Mantel treffende Schnitt durch den senkrechten Kreiskegel giebt also Ellipsen derselben Art, wie der Schnitt durch den Kreiszylinder.

16) In Fig. 184 ist  $ABC$  die Zeichnung eines senkrechten Kreiskegels. Aus ihm ist ein schiefer Kreiskegel  $ABC_1$  dadurch abgeleitet, daß jeder Punkt nach rechts verschoben ist, und zwar um eine Strecke, die proportional der senkrechten Entfernung von der Grundebene ist. Der ebene Schnitt  $DE$  geht dabei in einen ebenen Schnitt  $D_1E_1$

Fig. 183.

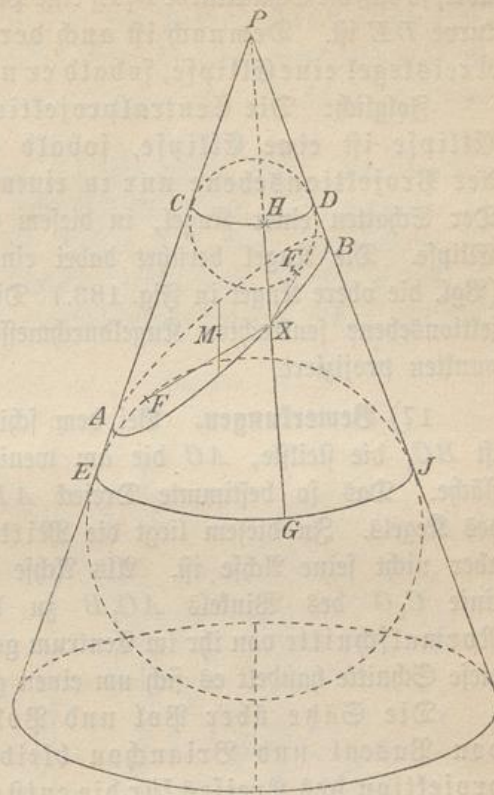
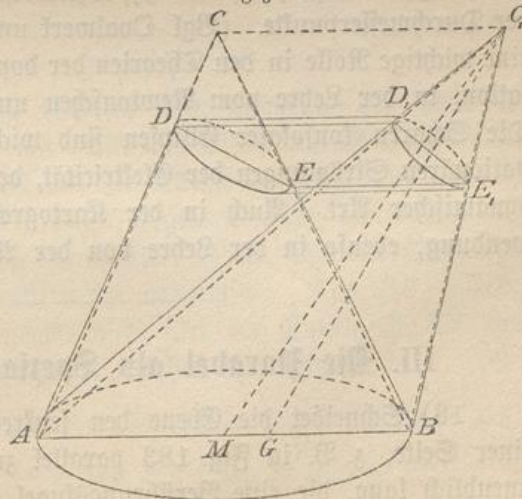


Fig. 184.



über, so daß die Schnittkurve  $D_1E_1$  eine Parallelprojektion von der Schnittkurve  $DE$  ist. Demnach ist auch der Schnitt durch den schiefen Kreiskegel eine Ellipse, sobald er nur den einen Mantel trifft.

Folglich: Die Centralprojektion jedes Kreises und jeder Ellipse ist eine Ellipse, sobald der Projektionskegel von der Projektionsebene nur in **einem** Mantel geschnitten wird. Der Schatten einer Kugel, in diesem Sinne geworfen, ist stets eine Ellipse. Die Kugel berührt dabei einen Brennpunkt dieser Ellipse. (Vgl. die obere Kugel in Fig. 183.) Die Endpunkte des auf der Projektionsebene senkrechten Kugeldurchmessers werden nach den Brennpunkten projiziert.

17) **Bemerkungen.** Bei dem schiefen Kreiskegel der Figur 184 ist  $BC_1$  die steilste,  $AC$  die am wenigsten steile Gerade der Oberfläche. Das so bestimmte Dreieck  $ABC_1$  heißt der Hauptschnitt des Kegels. In diesem liegt die Mittellinie  $C_1M$  des Kegels, die aber nicht seine Achse ist. Als Achse ist vielmehr die Halbierungslinie  $C_1G$  des Winkels  $AC_1B$  zu betrachten, deren elliptische Normalschnitte von ihr im Centrum getroffen werden. In Bezug auf diese Schnitte handelt es sich um einen geraden elliptischen Kegel.

Die Sätze über Pol und Polare am Kreise, die Sätze von Pascal und Brianchon bleiben auch bei der Centralprojektion des Kreises für die entstehenden Ellipsen erhalten.

Die Ellipse ist von großer Wichtigkeit für die darstellende Geometrie, die Schattenkonstruktion und die Perspektive. In der Mechanik tritt sie bei der Centralbewegung auf, z. B. in der Astronomie als Planetenbahn, in der Drehungstheorie und der Festigkeitslehre als Trägheitsellipse; bei der hypocycloidalen Geradföhrung als Weg der Durchmesserpunkte. (Vgl. Ovalwerk und Ellipsenlenker.) Sie spielt eine wichtige Rolle in den Theorien der doppelten Brechung und Polarisation, in der Lehre vom Newtonschen und logarithmischen Potential. Die Scharen konfokaler Ellipsen sind wichtig für die Lehre von den stationären Strömungen der Elektrizität, der Wärme und solchen hydrodynamischer Art. Auch in der Kartographie findet die Ellipse Anwendung, ebenso in der Lehre von der Abplattung der Erde.

### III. Die Parabel als Spezialfall der Ellipse.

18) Schneidet die Ebene den senkrechten Kreiskegel parallel zu einer Seite, z. B. in Fig. 183 parallel zu  $PE$ , so wird die Ellipse unendlich lang, die eine Berührungskugel giebt einen Brennpunkt  $F_1$ ,

der andere Brennpunkt und der Mittelpunkt fallen in unendliche Entfernung. (Vgl. Fig. 186.) Da der eine Brennstrahl unendlich groß ist, hat die Eigenschaft der konstanten Brennstrahlensumme keinen Sinn mehr. Die Konstruktion der Kurve erfolgt aber nach 14a) in nachstehender Weise (Fig. 185):

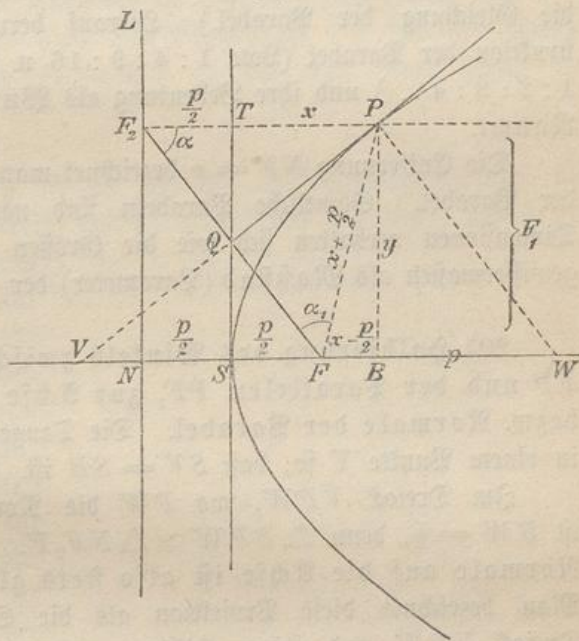
Ist  $F$  der Brennpunkt und  $NL$  die gerade Linie, die den unendlich groß gewordenen Kreis mit Radius  $2a$  in 14a) vertritt, so ziehe man beliebig  $FF_2$ , sodann  $F_2F_1 \parallel NF$ , denn der Schnitt  $F_1$  muß im Unendlichen liegen. Sodann trage man Winkel  $\alpha$  als  $\alpha_1$  bei  $F$  an  $FF_2$  an, so daß das gleichschenklige Dreieck  $FF_2P$  entsteht, dann ist  $P$  nach Ana-

logie von 14a) ein Punkt der Parabel und das Halbierungslot  $QP$  ist Tangente in  $P$ . So kann man beliebig viele Punkte und Tangenten der Kurve konstruieren. Das Halbierungslot  $ST$  für  $NF$  ist ebenfalls Tangente der Parabel, die also  $NF$  in  $S$  halbiert. Man nennt  $NL$  die Direktrix der Parabel,  $ST$  die Scheiteltangente. Errichtet man auf einem beliebigen von  $F$  ausgehenden Strahle im Schnittpunkte  $Q$  mit der

Geraden  $ST$  ein Lot, so ist dasselbe eine Tangente der Parabel. Man kann also die Parabel mit Hülfe des Winkeldreiecks ebenso ausschattieren, wie es in Fig. 182 mit der Ellipse geschah. Der Scheitel des rechten Winkels wird stets auf  $ST$  gelegt, einer seiner Schenkel durch  $F$ , der andere giebt die Tangente. (Zum schnellen Skizzieren der Parabel ist diese Konstruktion die bequemste.) Aus  $PF = PF_2$  folgt, daß die Parabel der geometrische Ort der Punkte ist, die von der Direktrix und dem Brennpunkte gleichen Abstand haben.

19) Fällt man von  $P$  aus ein Lot  $BP = y$  auf die Achse  $NF$ , und setzt man  $SB = x$ ,  $TP = x$  und  $NF = p$ , so ist  $F_2P = x + \frac{p}{2}$

Fig. 185.



und daher auch  $FP = x + \frac{p}{2}$ , dagegen  $FB = x - \frac{p}{2}$ , nach Pythagoras also  $(x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2 = y^2$ , woraus folgt:  $y^2 = 2px$ . An anderer Stelle  $P_1$  der Kurve erhält man ebenso  $y_1^2 = 2px_1$ . Durch Division ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1},$$

d. h. die Abstände der Parabelpunkte von der Scheiteltangente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände von der Achse.

(In der Sprache der analytischen Geometrie ist  $y^2 = 2px$  die Gleichung der Parabel.) Hierauf beruht eine einfache Konstruktion der Parabel (Vorte  $1:4:9:16$  u. s. w. in den Abständen  $1:2:3:4\dots$ ) und ihre Bedeutung als Wurfbahn im luftleeren Raume.

Die Entfernung  $NF = p$  bezeichnet man als den Parameter\*) der Parabel. Sämtliche Parabeln sind nämlich ähnlich und ihre Dimensionen verhalten sich wie die Größen  $NF$ , so daß man  $NF$  gewissermaßen als Maßstab (Parameter) der Parabel betrachten kann.

20) Halbierung des Winkels zwischen dem Brennstrahl  $FP$  und der Parallelen  $PF_1$  zur Achse giebt die Tangente bezw. Normale der Parabel. Die Tangente  $PQ$  trifft die Achse in einem Punkte  $V$  so, daß  $SV = SB$  ist. (Warum?)

Im Dreieck  $VPW$ , wo  $PW$  die Normale der Parabel ist, ist  $BW = p$ , denn  $\triangle BPW \cong \triangle NF_2F$ . Die Projektion der Normale auf die Achse ist also stets gleich dem Parameter. Man bezeichnet diese Projektion als die Subnormale. Auch am Dreieck  $VPW$  und seiner Höhe  $y$  erkennt man das Bestehen der Gleichung  $y^2 = 2px$ , da  $y$  mittlere Proportionale zwischen  $VB = 2x$  und  $BW$  ist.

21) Lichtstrahlen, die aus dem Brennpunkte der Parabel kommen, werden von der Parabel parallel zur Achse zurückgeworfen. Solche, die parallel zur Achse einfallen, werden nach dem Brennpunkte hin reflektiert. Fallen solche Strahlen von außen auf die Parabel, so werden sie so reflektiert, als ob sie aus dem Brennpunkte kämen. (Parabolischer Hohlspiegel und Reflektor; der gewölbte parabolische Spiegel.)

\*) Von Anderen wird  $p$  als halber Parameter bezeichnet.

22) Parallelscharen von Sehnen der Parabel haben ihre Halbierungspunkte, weil der Mittelpunkt  $M$  unendlich fern liegt, auf einer Parallelen zur Achse. (Vergl. Ellipse.)

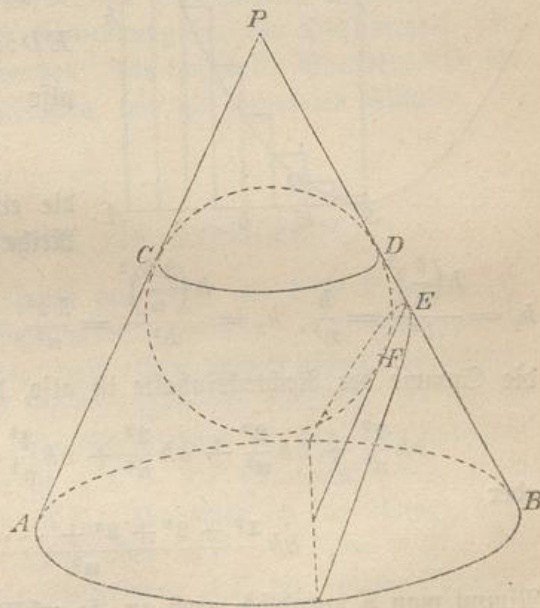
**Aufgabe.** Zu einer gegebenen Parabel die Achse, den Brennpunkt und die Direktrix zu konstruieren.

**Auflösung.** Man ziehe zwei parallele Sehnen beliebiger Richtung, verbinde ihre Halbierungspunkte, errichte auf der Verbindungslinie ein Lot von Peripherie bis zu Peripherie, und ziehe durch dessen Halbierungspunkt eine Parallele zur Verbindungslinie, so erhält man die Achse. Den Schnittpunkt  $P$  der ersten Verbindungslinie mit der Kurve projiziere man als  $B$  auf die Achse (Fig. 185), mache  $SV = SB$  und ziehe  $VP$ , was die Tangente in  $P$  giebt. Spiegelung von  $PF_1$  gegen die Normale  $PW$  giebt den Brennstrahl  $PF$  und den Brennpunkt  $F$ . Macht man  $NS = FS$ , so hat man einen Punkt der Direktrix.

23) In Fig. 186 ist die Parabel die Centralprojektion des Kreises  $CD$  und aller Kreis- und Ellipsenschnitte des Kegels von  $P$  aus auf die Schnittebene. (Auch die Projektion der Kugel von  $P$  aus auf die Schnittebene ist eine Parabel, wobei die Kugel den Brennpunkt der Parabelfläche berührt.) Jede Parallelprojektion der Ellipse war eine Ellipse. Dies gilt auch von der Ellipse mit unendlich großer Halbachse, d. h. von der Parabel. Also: Jede Parallelprojektion der Parabel ist eine Parabel.

Verwandelt man nun den senkrechten Kreiskegel durch Horizontalverschiebung der Spitze wie in Fig. 184 in einen schiefen, so wird jeder Parabelschnitt in die entsprechende Parallelprojektion, d. h. wieder in eine Parabel verwandelt. Folglich: Der Schnitt durch den schiefen Kreiskegel oder den geraden elliptischen Kegel ist eine

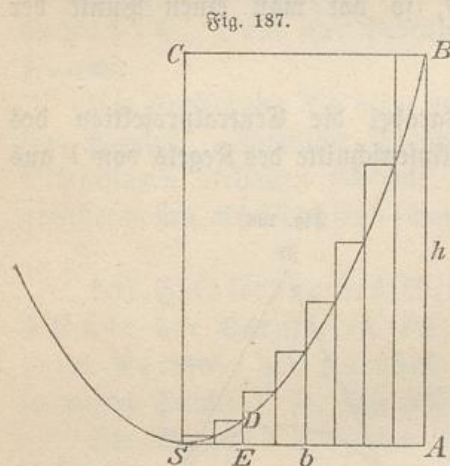
Fig. 186.



Parabel, sobald seine Ebene zu einer Kegelseite parallel ist. — Liegt die Spitze  $P$  des Kegels unendlich fern, z. B. auf der Verlängerung von  $ED$  in Fig. 186, so geht der Kegel in einen parabolischen Cylinder über.

24) Bei einigen der genannten Sätze bedurfte es keines Beweises, da dieser für die Ellipse bereits geführt war. Alle Sätze über Pol und Polare, auch die Sätze von Pascal und Brianchon, gelten durch Parallel- und Centralprojektion auch von der Parabel. (So ist z. B. die Direktrix die Polare des Brennpunktes, und alle Geraden durch den Brennpunkt haben auf ihr ihren Pol.)

25) In Figur 187 sei in das Rechteck  $SABC$  mit Grundlinie  $b$  und Höhe  $h$  eine Parabel so eingezeichnet, daß  $AS$  Tangente und  $S$  der Scheitelpunkt ist.



Die Basis ist in  $n$  gleiche Teile zerlegt, in den Teilpunkten sind Lote bis zur Parabel errichtet und die Streifen sind zu Rechtecken vervollständigt. Nun ist z. B. nach Nr. 19

$$ED:h = SE^2:SA^2 = SE^2:b^2,$$

also

$$ED = h \frac{SE^2}{b^2},$$

die einzelnen Lote sind also der Reihe nach

$$h_1 = \frac{h \left(\frac{b}{n}\right)^2}{b^2} = \frac{h}{n^2}, \quad h_2 = \frac{h \left(\frac{2b}{n}\right)^2}{b^2} = \frac{h 2^2}{n^2}, \quad h_3 = \frac{h 3^2}{n^2}, \quad \dots, \quad h_n = \frac{h n^2}{n^2},$$

die Summe der Rechtecksinhalte ist also, da jede Basis  $\frac{b}{n}$  ist,

$$bh \frac{1^2}{n^3} + bh \frac{2^2}{n^3} + bh \frac{3^2}{n^3} + bh \frac{4^2}{n^3} + \dots + bh \frac{n^2}{n^3}$$

oder

$$bh \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

Nimmt man  $n$  unendlich groß an, so erhält man nach Arithm. Nr. 38  $F = \frac{1}{3}bh$ , zugleich aber sind dabei die übergreifenden Treppenträume verschwunden. Folglich: Die gezeichnete Parabel schneidet vom Rechteck den dritten Teil ab.

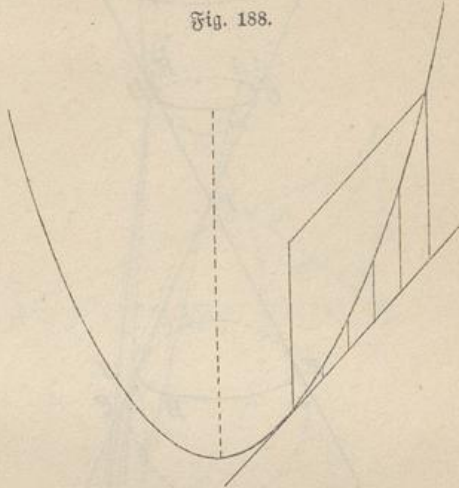
(Durch Parallelprojektion gilt dies auch von jedem Parallelo-

gramm aus der Tangente und der Parallelen zur Achse, wo die in gleichen Abständen gezogenen Parallelen ebenfalls nach dem Gesetze  $1^2 : 2^2 : 3^2 : \dots$  aufeinander folgen. Vergl. Fig. 188.)

So ist man auch imstande beliebige Segmente der Parabel als zwei Drittel eines gewissen Parallelogramms zu berechnen.

Die Parabel ist für die darstellende Geometrie, die Lehre von der Schattenkonstruktion\*) und für die Perspektive von Bedeutung. In der Mechanik tritt sie auf als Wurfbahn, in der Astronomie z. B. als Kometenbahn, in der Hydrodynamik als Grenzlinie bei rotierenden Flüssigkeiten innerhalb eines Gefäßes\*\*), in der Festigkeitslehre als Profil für gewisse Körper gleicher Festigkeit, als parabolische Kettenbrückenlinie u. s. w. Eine Hauptrolle aber spielt sie bei der geometrischen Darstellung der Trägheitsmomente. Auf ihre Anwendung bei den Hohlspiegeln war bereits aufmerksam gemacht worden. Die konfokalen Parabeln sind für die Physik von ähnlicher Wichtigkeit, wie die konfokalen Ellipsen.

Fig. 188.



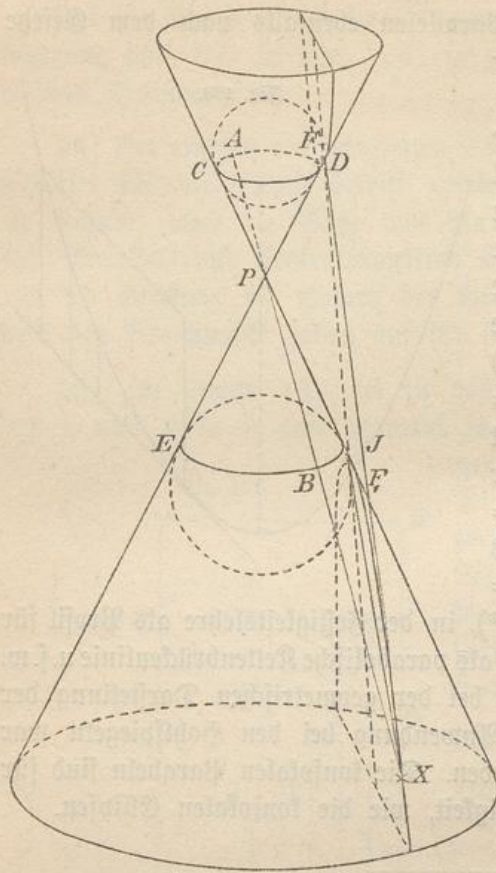
#### IV. Die Hyperbel als Kegelschnitt.

25) Der ebene Schnitt durch den Kegel, der beide Mäntel trifft, giebt als Schnittkurve die sogenannte Hyperbel. In Fig. 189 ist zunächst der senkrechte Kreiskegel mit einem Hyperbelschnitt dargestellt. Wiederum sind in den Kegel Berührungskugeln eingelegt, die ihn in den Kreisen  $CD$  und  $EJ$ , die Schnittebene in den Brennpunkten  $F_1$  und  $F$  berühren. Dabei ist  $XA = XF$  (Tangenten von  $X$  an die obere Kugel) und  $XB = XF_1$  (Tangenten an die untere), folglich  $XA - XB = XF - XF_1$ , oder  $XF - FF_1 = AB$ . Die auf der Kegelfläche gemessene Entfernung  $AB$  der beiden Parallelkreise ist aber überall dieselbe; bezeichnet man also die Brennstrahlen  $XF$  und  $XF_1$  mit  $p$  bzw.  $q$ , die Differenz mit  $2a$ , so ist die Brenn-

\*) Der Schatten der auf der Horizontalebene ruhenden Kugel ist eine Parabel, wenn das Kerzenlicht ebenso hoch steht, wie der oberste Punkt der Kugel.

\*\*) Darauf beruht die Theorie des parabolischen Regulators.

Fig. 189.

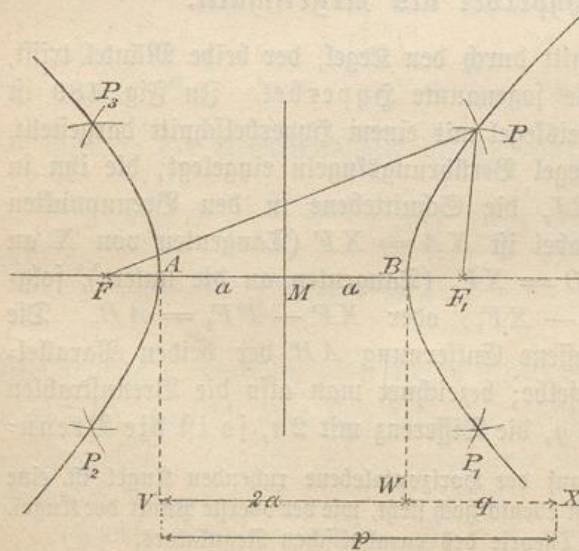


punkteigenschaft der Hyperbel:

$$p - q = 2a.$$

26) Ist die doppelte Brennweite  $FF_1 = 2e$  und die konstante Differenz  $2a$ , die nach bekanntem Dreiecks- satze kleiner als  $2e$  sein muß, gegeben, so geschieht die Kon- struktion der Hyperbel (Fig. 190) folgendermaßen. Man nimmt  $X$  auf der Ver- längerung von  $VW = 2a$  beliebig an, setzt  $VX = p$ ,  $WX = q$  und schlägt um  $F$  und  $F_1$  mit  $p$  und  $q$  auf alle möglichen Arten Bogen, die vier Hyperbelpunkte  $P, P_1, P_2, P_3$  geben, so daß Sym- metrie gegen  $FF_1$  und gegen das durch  $M$  gezogene Lot stattfindet. Dabei muß  $WX$  mindestens  $e - a$  sein,  $VX$  also mindestens  $e + a$ .

Fig. 190.



Im Grenzfalle entstehen die Kurvenpunkte  $A$  und  $B$  auf der Geraden  $AB$ . So kann man beliebig viele Hyperbelpunkte konstruieren.

27) Eine andere Konstruktion ist fol- gende: Man schlägt mit  $2a$  (Fig. 191) einen Kreis um  $F$ , zieht einen beliebigen Radius  $FF_2$  und seine Verlängerung und ver- bindet  $F_2$  mit  $F_1$ . Trägt

man nun den Winkel  $\alpha$  als  $\alpha_1$  bei  $F_1$  an  $F_1F_2$  an, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck  $F_1F_2P$ , dessen Spitze einer der gesuchten Hyperbelpunkte ist. Es ist nämlich  $FP - F_1P = FP - F_2P = FF_2 = 2a$ , also  $p - q = 2a$ . — Jeder Punkt der Hyperbel ist gleichweit vom Kreise und von  $F_1$  entfernt.

28) Auch das Lot auf  $F_1F_2$  im Halbierungspunkte  $Q$  giebt den Punkt  $P$  und zwar ist es zugleich Tangente der Hyperbel in  $P$ .

Die Hyperbel in Fig. 192 trennt nämlich den Raum, wo  $p - q > 2a$  ist, von dem Raume ab, wo  $p - q < 2a$  ist. Aus Projektionsgründen hat die Tangente (wie beim Kreise) nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein, sie liegt also ganz in dem Raume  $p - q < 2a$ ; nur für den Berührungspunkt ist  $p + q = 2a$ , also gleich der größten möglichen Differenz der Strahlen  $FP$  und  $F_1P$  für die Punkte  $P$  der Geraden.

Nach Geometrie Nr. 28 befindet sich  $P$  in Bezug auf  $KL$  in dieser Lage, wenn  $\gamma = \gamma_1$  ist. Folglich ist das Lot  $QP$  in der That die Tangente, und so folgt der Satz: Die Halbierungslinie des Winkels der Brennstrahlen giebt die Tangente der Hyperbel.

Folglich durchschneiden sich Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Brennpunkten rechtwinklig. Auch werden die von  $F$  aus an die Hyperbel gezogenen Strahlen von ihr so reflektiert, als ob sie aus  $F_1$  kämen.

Fig. 191.

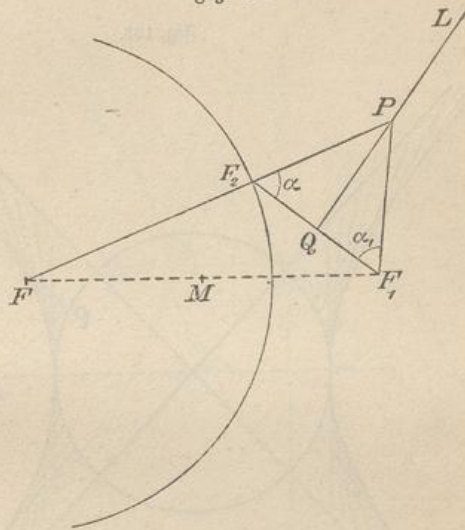
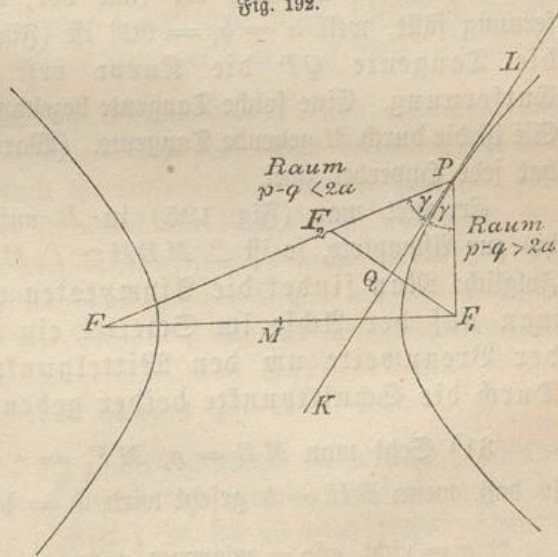
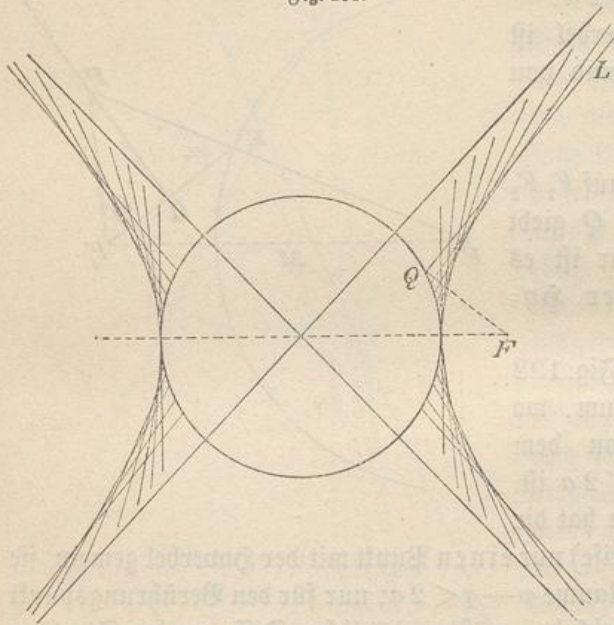


Fig. 192.



29) Zieht man in Fig. 191 von  $F_1$  aus alle möglichen Geraden  $F_1F_2$  nach dem Kreise  $F$ , so liegen alle Halbierungspunkte  $Q$  auf einem Kreise um  $M$  mit Radius  $a$ . Folglich gilt auch folgende Konstruktion

Fig. 193.



der Hyperbel: Zieht man von einem Punkte  $F$  außerhalb des Kreises an ihn zahlreiche Gerade  $FQ$  und errichtet man auf jeder in  $Q$  ein Lot, so schattieren die Lote eine Hyperbel aus. Fig. 193 zeigt, wie man so mit Hülfe des Winkeldreiecks ohne Kurvenlineal die Hyperbel ausschattieren kann.

30) Bei den Konstruktionen 28) und 29) kommt mehrfach der Fall vor, daß  $P$  in unendliche Entfernung fällt, weil  $\alpha = \alpha_1 = 90^\circ$  ist (Fig. 194). Dann berührt die Tangente  $QP$  die Kurve erst in unendlich großer Entfernung. Eine solche Tangente bezeichnet man als Asymptote\*). Sie ist die durch  $M$  gehende Tangente. (Warum?) Solcher Asymptoten hat jede Hyperbel zwei.

Errichtet man (Fig. 195) in  $B$  auf der Achse  $AB$  ein Lot bis zur Asymptote, so ist  $\triangle MBH \cong \triangle MQF_1$ , also  $MH = MF_1$ . Folglich: Man findet die Asymptoten einer Hyperbel, indem man auf der Achse im Scheitel ein Lot errichtet und mit der Brennweite um den Mittelpunkt einen Kreis schlägt. Durch die Schnittpunkte beider gehen die Asymptoten.

31) Setzt man  $MB = a$ ,  $MF_1 = e$ , so ist  $BH = \sqrt{e^2 - a^2}$ , so daß, wenn  $BH = b$  gesetzt wird,  $b = \sqrt{e^2 - a^2}$  ist, während bei

\*)  $\acute{\alpha}$  = nicht,  $\acute{\sigma}\acute{\nu}\nu$  = zusammen,  $\pi\acute{\lambda}\pi\tau\omega$  = fallen, also „nicht zusammen fallen“. Der Name soll Folgendes sagen: Die Tangente kommt der Kurve immer näher, sogar unendlich nahe, fällt aber doch im Endlichen nicht ganz mit ihr zusammen.

der Ellipse  $b = \sqrt{a^2 - e^2}$  war. [Man könnte hier schreiben  $b_1 = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{-1} \sqrt{a^2 - e^2} = i\sqrt{a^2 - e^2} = ib$ , und die Hyperbel

Fig. 194.

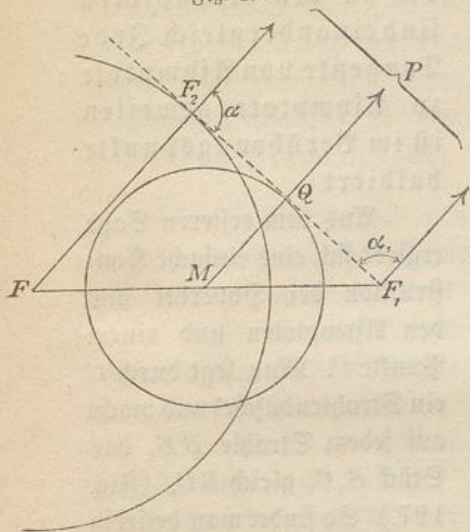
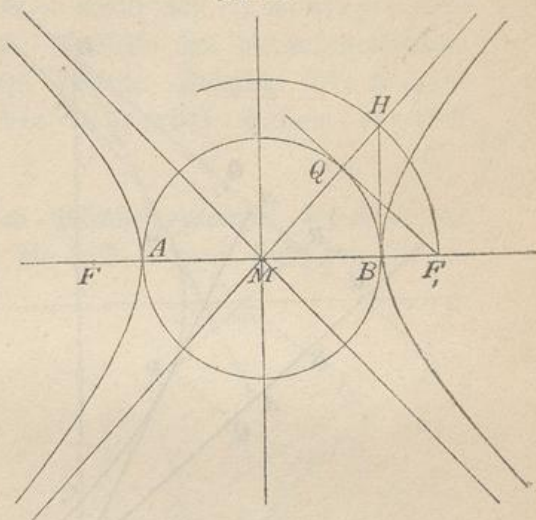


Fig. 195.



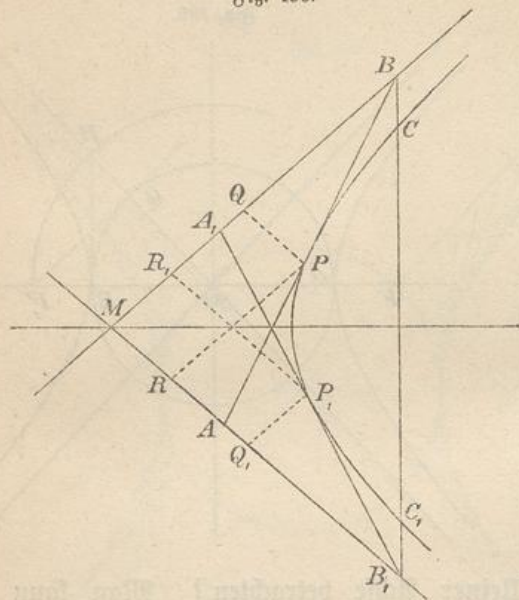
als Ellipse mit imaginärer kleiner Achse betrachten.] Man kann  $b = \sqrt{e^2 - a^2}$  als Länge der (nicht vorhandenen) Halbachse bezeichnen und  $\frac{b}{a}$  als das Achsenverhältnis betrachten. Ist  $a = b$ , so nennt man die Hyperbel eine gleichseitige, ähnlich wie man den Kreis als die „gleichachsige“ oder gleichseitige Ellipse betrachten könnte. Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel stehen auf einander senkrecht.

32) Durch verschiedene Lage der Schnittebenen kann man Hyperbeln von beliebigem Achsenverhältnis aus dem senkrechten Kreiskegel Fig. 189 herauserschneiden, die sämtlich Centralprojektionen von einander sind. Fällt der eine Brennpunkt in unendliche Entfernung, so erhält man wieder die Parabel. Liegt aber die Kegelspitze  $P$  unendlich fern, so steht über der Hyperbel statt eines hyperbolischen Kegels ein hyperbolischer Cylinder. Da nach der ersten Definition auch die durch diesen gelegten Schnitte Hyperbeln sind, so folgt: Jede Hyperbel geht durch Parallelprojektion in eine andere Hyperbel über.

33) Daraus ergeben sich zahlreiche andere Folgerungen, die zum Teil der Symmetrie jeder Hyperbel und ihrer Asymptoten gegen die beiden Achsen entspringen. Weil z. B. die zu jeder Achse parallelen Sehnen durch die andere Achse halbiert sind, so folgt: Parallele Sehnencharen haben ihre Halbierungspunkte auf einem Durchmesser. Schneidet dieser die Hyperbel, so sind die

Tangenten in den Schnittpunkten parallel zur Sehnenchar. Ebenso folgt aus den entsprechenden symmetrischen Figuren: Die Außenstücke jeder Sehne bis zu den Asymptoten sind einander gleich. Jede Tangente von Asymptote zu Asymptote gemessen ist im Berührungspunkte halbiert.

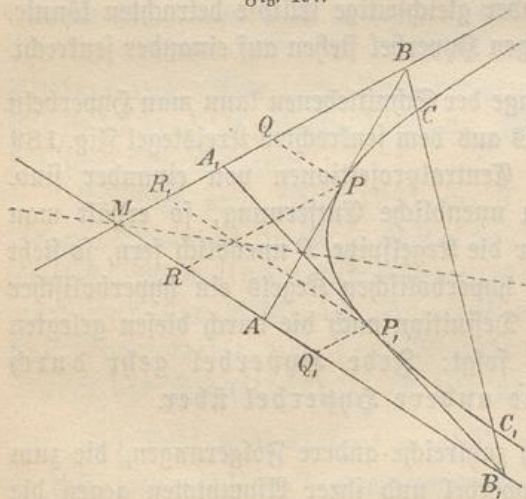
Fig. 196.



Aus dem ersteren Satze ergibt sich eine einfache Konstruktion der Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkte  $C$ . Man legt durch  $C$  ein Strahlenbüschel und macht auf jedem Strahle  $BB_1$  das Stück  $B_1C_1$  gleich  $BC$ . (Fig. 197.) So findet man beliebig viele Punkte der Hyperbel.

34) Die symmetrische Fig. 196 geht durch die schräge Parallelprojektion in die unsymmetrische Fig. 197 über. Dabei verwandeln sich aber gleiche Flächen in andere, unter sich ebenfalls gleiche Flächen. Da nun in Fig. 196 die Dreiecke  $ABM$  und  $A_1B_1M$  aus Symmetriegründen flächengleich sind, so sind in Fig. 197 auch die entsprechenden von den Tangenten und Asymptoten gebildeten Dreiecke  $ABM$  und  $A_1B_1M$  flächengleich. Nun darf aber  $BB_1$  in Fig. 197 als eine ganz beliebige Gerade angesehen werden, so daß also neben der beliebigen Tangente  $AB$  eine zweite ganz beliebige  $A_1B_1$  gezogen ist. Das Gesagte gilt also von dem Dreieck  $ABM$  und jedem beliebig hinzugefügten  $A_1B_1M$  derselben Art. Folglich:

Fig. 197.



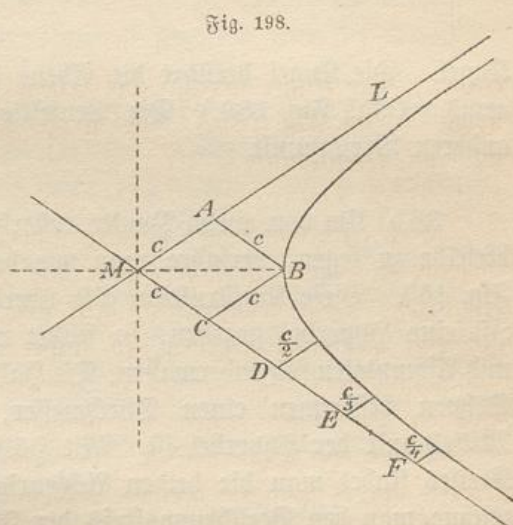
34) Die symmetrische Fig. 196 geht durch die schräge Parallelprojektion in die unsymmetrische Fig. 197 über. Dabei verwandeln sich aber gleiche Flächen in andere, unter sich ebenfalls gleiche Flächen. Da nun in Fig. 196 die Dreiecke  $ABM$  und  $A_1B_1M$  aus Symmetriegründen flächengleich sind, so sind in Fig. 197 auch die entsprechenden von den Tangenten und Asymptoten gebildeten Dreiecke  $ABM$  und  $A_1B_1M$  flächengleich. Nun darf aber  $BB_1$  in Fig. 197 als eine ganz beliebige Gerade angesehen werden, so daß also neben der beliebigen Tangente  $AB$  eine zweite ganz beliebige  $A_1B_1$  gezogen ist. Das Gesagte gilt also von dem Dreieck  $ABM$  und jedem beliebig hinzugefügten  $A_1B_1M$  derselben Art. Folglich:

Das Gesagte gilt also von dem Dreieck  $ABM$  und jedem beliebig hinzugefügten  $A_1B_1M$  derselben Art. Folglich:

Das von der Tangente und den Asymptoten der Hyperbel gebildete Dreieck hat konstanten Inhalt. — Verbindet man die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  der Tangente mit denen der zu ihr parallelen Tangente am anderen Hyperbelarme, so erhält man ein konjugiertes Parallelogramm der Hyperbel. Dasselbe hat vierfachen Flächeninhalt, wie jedes der besprochenen Dreiecke. Folglich: Die konjugierten Parallelogramme der Hyperbel haben sämtlich denselben Flächeninhalt.

35) Dasselbe gilt von den Parallelogrammen  $PQMR$  und  $P_1Q_1M_1R_1$  der beiden Figuren, die halb so groß sind, wie die zugehörigen Dreiecke  $ABM$  und  $A_1B_1M$ . Daraus ergibt sich folgende Hyperbelkonstruktion (Fig. 198):

Man ziehe, wenn die Asymptoten und ein Hyperbelpunkt  $B$  (z. B. der Scheitel) gegeben sind,  $BC \parallel ML$ , trage  $MC = c$  von  $C$  aus mehrfach hintereinander auf der Asymptote ab und lege durch die Teilpunkte Parallele zu  $CB$ , die der Reihe nach die Länge  $\frac{c}{2}$ ,  $\frac{c}{3}$ ,  $\frac{c}{4}$  u. s. w.



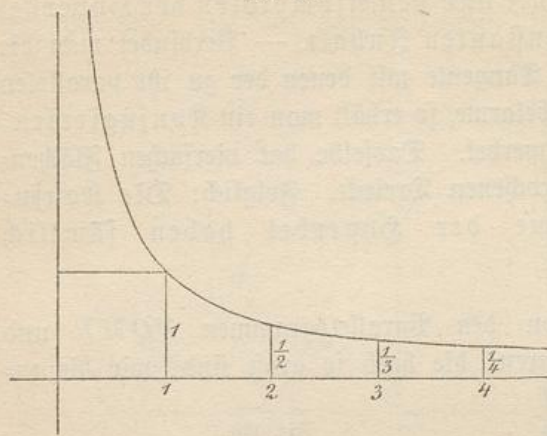
haben. So erhält man beliebig viele Punkte der Hyperbel.

Praktische Anwendung findet dies bei der gleichseitigen Hyperbel, die zur Veranschaulichung des Mariotteschen Gesetzes und zur Berechnung der Expansionsarbeit dient. Hier ist jedes Lot  $y = \frac{1}{x}$ , wenn  $x$  der Horizontalabstand von der senkrechten Asymptote ist. Vergl. Geom. Fig. 86 und die zugehörigen Erläuterungen und Fig. 199.

36a) Verwandelt man den senkrechten Kreiskegel (Fig. 189) durch Horizontalverschiebung der Spitze in einen schiefen Kreiskegel, d. h. in einen geraden elliptischen Kegel, so geht der Hyperbelschnitt in die entsprechende Parallelprojektion, d. h. wieder in einen Hyperbelschnitt über. Folglich:

Jede Centralprojektion des Kreises, bei der beide Mäntel des Projektionskegels von der Projektionsebene

Fig. 199.



geschnitten werden, giebt eine Hyperbel.

Folglich gelten die Sätze über Pol und Polare am Kreise, ebenso der Pascalsche und Brianchonsche Satz von jeder Hyperbel. Der Schatten einer Kugel, die auf der Horizontalebene liegt, ist ein Hyperbelarm, sobald das Licht tiefer steht, als der höchste Punkt der

Kugel. Die Kugel berührt die Ebene im Brennpunkte des Hyperbelarms. (Vgl. Fig. 189.) Die Projektion des Gegenpunktes giebt den anderen Brennpunkt.

36b) Um von einem Punkte außerhalb der Hyperbel Tangenten an dieselbe zu legen, verfähre man wie bei dem Kreise (Geom. Nr. 65, Fig. 46). Diese Konstruktion gilt überhaupt von allen Kegelschnitten. Ist eine Hyperbel gegeben, so findet man ihre Achsen, Brennpunkte und Asymptoten folgendermaßen: Die Halbierungspunkte zweier paralleler Sehnen bestimmen einen Durchmesser, dessen Halbierungspunkt der Mittelpunkt der Hyperbel ist. Mit Hülfe eines um diesen geschlagenen Kreises findet man die beiden Achsenrichtungen. (Symmetrie!) Jetzt zeichne man den Berührungskreis der Figur 193. Von einem Punkte  $Q$  dieses Kreises aus lege man eine Tangente an die Hyperbel. Das in  $Q$  auf der Tangente errichtete Lot schneidet die Hauptachse im Brennpunkte  $F$  (Fig. 193). Die Berührungspunkte der Tangenten, die sich von  $F$  aus an den Hülfskreis (Fig. 193) legen lassen, gehören ebenso, wie  $M$ , den Asymptoten an.

Die Hyperbel ist von Bedeutung für die Mechanik. Ist z. B. die Geschwindigkeit, mit der ein Komet die Sonnennähe passiert, größer, als ein gewisser Grenzwert, so ist seine Bahn eine Hyperbel. Gewisse graphische Darstellungen der Stoßtheorie führen auf die Hyperbel. Der Flächeninhalt der gleichseitigen Hyperbel veranschaulicht den Wert der natürlichen Logarithmen (denn  $\int \frac{1}{x} dx = \lg \frac{x_1}{x}$ ). Vgl. Teil III. Sie dient zur Berechnung der Kompressions- und Expansionsarbeit unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. Die Scharen konfokaler Hyperbeln sind von Wichtigkeit für die Theorie des logarithmischen

Potentials und gewisse Probleme über stationäre Strömung der Elektrizität, der Wärme und der Flüssigkeiten. Ihre Bedeutung für die Geometrie, Stereometrie, für die darstellende Geometrie, Schattenlehre und Perspektive ist eine ebenso große, wie die der anderen Kegelschnitte.

### V. Allgemeines über die Kegelschnitte.

37) Weil die Sätze von Pascal und Brianchon von allen Kegelschnitten gelten, so kann man folgende Konstruktionen ausführen:

a) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Punkten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder: aus 4 Punkten und der Tangente in einen von ihnen; aus 3 Punkten und der Tangente in zweien von ihnen.)

b) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Tangenten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder aus 4 Tangenten und dem Berührungspunkte auf einen von ihnen; aus 3 Tangenten und dem Berührungspunkte auf zweien von ihnen.)

Man kann nämlich die Fünfecke auf beliebig viele Arten zu Pascalschen oder Brianchonschen Sechsecken vervollständigen. Über diese und andere Konstruktionen vergleiche des Verfassers „Einführung“ oder Teil III.

Suche zu beweisen, daß der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Kreisen gleiche Entfernung haben, stets ein Kegelschnitt  $p \pm q = 2a$  (in einigen speziellen Fällen eine Parabel) ist.

38) **Aufgabe.** Die Hauptgleichungen der Kegelschnitte zu finden.

a) Für die Parabel ist bereits gefunden

$$y^2 = 2px.$$

b) Ellipse. Für jeden Punkt  $P_1$  des mit Radius  $a$  um den Nullpunkt geschlagenen Kreises (Fig. 200) ist  $x^2 + \eta^2 = a^2$ . Wird jedes  $\eta$  im Verhältnis  $\frac{b}{a}$  verkleinert, so

wird die neue Höhe  $y = \eta \frac{b}{a}$ , so daß  $\eta = y \frac{a}{b}$  ist.

Für jeden Punkt  $P$  der Ellipse ist also, wie die Einsetzung ergibt,

$$x^2 + \left(y \frac{a}{b}\right)^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Fig. 200.

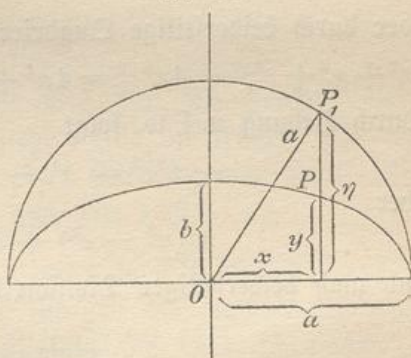
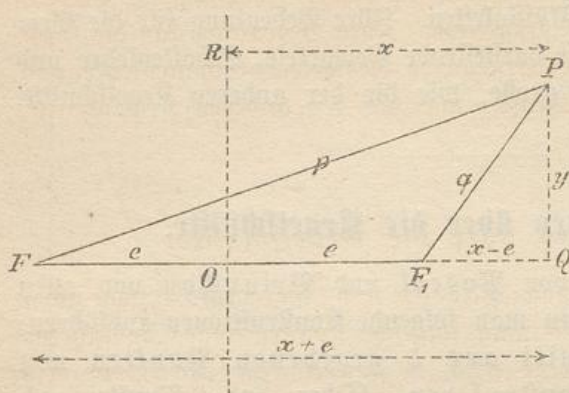


Fig. 201.



c) Ellipse und Hyperbel. Setzt man in Fig. 201  $FO = OF_1 = e$ , den Abstand  $RP$  jedes Kurvenpunktes  $P$  von der senkrechten Achse gleich  $x$ , den Abstand  $QP$  von der horizontalen gleich  $y$ , so daß

$$p = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}$$

und

$$q = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

ist, so gehen die Gleichungen für beide Kurven

$$p \pm q = 2a$$

über in

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a,$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$[(x + e)^2 + y^2] + [(x - e)^2 + y^2]$$

$$\pm 2\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) + 2xe} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) - 2xe} = 4a^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + e^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2,$$

also

$$\pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2),$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 + (x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + e^2).$$

Durch Hebung u. s. w. folgt

$$-x^2e^2 = a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2e^2$$

oder

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

und nach beiderseitiger Division durch die rechte Seite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Diese Gleichung gilt für beide Kurven.\*) Bei der Ellipse ist aber  $a^2 - e^2$  positiv und kann gleich  $b^2$  gesetzt werden, bei der Hyperbel

\*) Wiederhole die Rechnung mit Hilfe der Anfangsgleichungen  $(x + e)^2 + y^2 = p^2$  und  $(x - e)^2 + y^2 = (2a \mp p)^2$ , aus denen durch Subtraktion und Umformung folgt  $\pm ap = a^2 + ex$ , was in die erstere einzusetzen ist.

ist  $a^2 - c^2$  negativ und kann gleich  $-b^2$  gesetzt werden. Dann ist die Ellipsengleichung, wie vorher,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dagegen die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist  $b = a$ , also

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Dagegen ergibt sich für die gleichseitige Hyperbel in anderer Stellung (Mariottesche Kurve)  $xy = c$  oder  $y = \frac{c}{x}$  (z. B. wenn  $c = 1$  ist  $xy = 1$  und  $y = \frac{1}{x}$ ), wo  $c$  das konstante Rechteck bedeutet. (Vergl. Fig. 199.)

39) Mit diesen Gleichungen rechnet man ebenso, wie mit der Kreisgleichung. So ergibt sich z. B. durch einfache Betrachtungen, die als Übungsaufgaben dienen mögen, Folgendes:

Die Tangente im Punkte  $x_1 y_1$  der Parabel  $y^2 = 2px$  oder  $yy = p(x + x)$  hat die Gleichung

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

die Tangente im Punkte der Ellipse bzw. Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

oder  $\frac{xx}{a^2} \pm \frac{yy}{b^2} = 1$  hat die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Dieselben Gleichungen gelten für die Polaren des Punktes  $x_1 y_1$ , wenn derselbe nicht auf der Kurve liegt. Für die Ellipse läßt sich dies nach der bei Figur 200 angewandten Methode vom Kreise aus beweisen. Für die Parabel folgt es aus Fig. 185.

40) Bedeutung der Worte Parabel, Ellipse, Hyperbel.

Das griechische Wort *παράβολή* bedeutet Nebeneinanderstellung, Vergleichung und in mathematischer Hinsicht auch Gleichsetzung.

Das Verbum *ἐκλείπω* bedeutet im Infinitiv „weglassen“. Daraus ist das Wort Ellipse oder Ellipse, d. h. „Weglassung“ abgeleitet. (Man denke z. B. an die Eklipsen des Mondes und der Sonne, d. h. an die Verfinsterungen, die nur stattfinden können, wenn beide Körper in der scheinbaren Sonnenbahn zusammentreffen oder sich in ihr in Diametralstellung befinden. Die Sonnenbahn

wird daher Elliptik genannt, was als der geometrische Ort der Finsternisse aufgefaßt werden kann.)

Das Wort *ὑπερβολή* bedeutet ein Übertreffen, z. B. in der Mathematik „das Hinausgehen über einen gewissen Wert“.

Den Grund zu den entsprechenden Benennungen der Kegelschnitte erkennt man an ihren Scheitelfgleichungen.

Die der Parabel ist nämlich

$$a) \quad y^2 = 2px.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Verschiebt man hier den Nullpunkt des Koordinatensystems auf der X-Achse um  $(-a)$ , so tritt an Stelle jeder Abscisse  $\xi$  eine andere,  $x = \xi + a$ , so daß  $\xi = x - a$  ist. Dagegen ist die Ordinate  $y = \eta$  unverändert geblieben. Die Kurvengleichung geht also über in die Scheitelfgleichung

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

$$b) \quad y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

wo  $\frac{b^2}{a} = p$  gesetzt ist.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hier verschiebe man den Nullpunkt um  $+a$  (um an den Scheitel von entsprechender Krümmung zu kommen). Man erhält die Scheitelfgleichung

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$c) \quad y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Für die Parabel ist also  $y^2 = 2px$ , für die Ellipse  $y^2 < 2px$ , für die Hyperbel  $y^2 > 2px$ , so daß die Gleichsetzung, das Weglassen eines gewissen Wertes und das Hinausgehen über einen gewissen Wert leicht erkennbar sind.

41) Die neuen,  $p$  enthaltenden Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gehen in die der Parabel über, sobald  $a = \infty$  gesetzt wird. Die Größe  $p$  kann als eine Art von Parameter betrachtet werden. Für

die Parabel ist ihre Bedeutung bereits erklärt worden. Für die Ellipse und die Hyperbel kann  $p$  mit Hilfe der Proportion  $a : b = b : p$ , die mit der Gleichung  $p = \frac{b^2}{a}$  übereinstimmt, leicht konstruiert werden. Bei allen drei Kegelschnitten ist  $p$  die positive Ordinate im Brennpunkte (bezw. in beiden Brennpunkten) der Kurve. Man erkennt dies, wenn man in die Gleichungen  $y^2 = 2px$  und  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$  die Werte  $x = \frac{p}{2}$  bzw.  $x = \pm e$  einsetzt und  $y$  berechnet.

42) Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem gegebenen Punkte ( $F$ ) und einer gegebenen Geraden ( $LN$ ) ein konstantes Verhältnis  $\frac{m}{n}$  haben, ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem  $\frac{m}{n} \leq 1$  ist.

**Beweis.** In Fig. 185 sei  $SF : NS = m : n$ , ebenso  $FP : F_2P = m : n$ . Wird also  $NF = l$  gesetzt, so ist  $FP = \sqrt{(x - SF)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2}$  und  $F_2P = x + NS = x + \frac{n}{m+n}l$ . Die Gleichung  $FP^2 = \frac{m^2}{n^2} F_2P^2$  geht also über in

$$\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{n^2} \left(x + \frac{n}{m+n}l\right)^2,$$

was sich umformen läßt zu

$$y^2 = \frac{2lm}{n}x + x^2 \left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right).$$

Nach Obigem ist dies die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Faktor von  $x^2$  negativ, oder Null, oder positiv ist. Dabei wird  $p = \frac{lm}{n}$  und  $a = \frac{n^2}{m^2 - n^2}p = \frac{lmn}{m^2 - n^2}$ .

[43] Dreht sich ein Kegelschnitt um eine seiner Achsen, so entsteht ein Drehungs-Ellipsoid oder Drehungs-Paraboloid oder Drehungs-Hyperboloid, von denen das letztere einmantelig oder zweimantelig sein kann, je nach Wahl der Drehungsachse. Bei sämtlichen diesen Körpern ist die aus der Höhe  $y$  berechnete Querschnittsfläche  $q_y$  höchstens vom 2<sup>ten</sup> Grade, also läßt sich bei allen der Inhalt nach der Simpson-Regel oder der Summenformel berechnen.

Dasselbe gilt von ihren Cavalierischen Erweiterungen, bei denen die Kreisquerschnitte in ähnliche Ellipsen übergehen.

Auch über diese Körper bietet die „Einführung“ Übungsaufgaben, ebenso Teil III. Die einfachste Inhaltsformel hat das Drehungsparaboloid. Aus  $y : h = x^2 : r^2$  (in Fig. 202) folgt nämlich  $y : h = x^2 \pi : r^2 \pi$ , also Querschnitt  $q_y = x^2 \pi y = \frac{r^2 \pi y}{h} = \frac{G}{h} y$ . Da der Querschnitt ein solcher ersten Grades ist, so ergibt sich nach Nr. 64 als Inhalt  $J = \frac{G}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} Gh$ , d. h. die Hälfte des Cylinders. (Vgl. Fig. 202.)

Fig. 202.

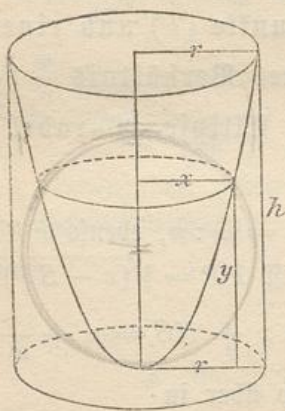
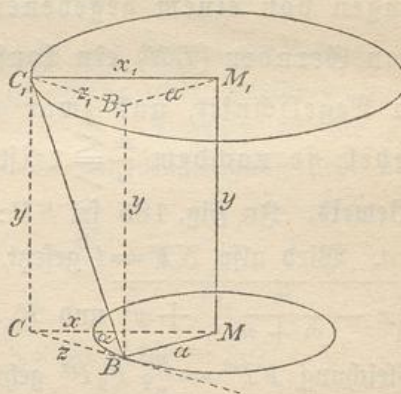


Fig. 203.



Daß der in Fig. 115 dargestellte Körper, der durch Drehung einer Geraden um eine sie schräg kreuzende Achse entsteht, ein Rotationshyperboloid ist, ergibt sich folgendermaßen:  $MM_1$  in Fig. 203 sei die Drehungsachse,  $BC_1$  die sie kreuzende Gerade,  $BC$  ihre Projektion auf die Grundfläche, in der  $MB = a$ , das gemeinschaftliche Lot der Geraden  $MM_1$  und  $BC_1$  liegt, so daß  $BC$  Tangente ist. Dann ist  $x^2 - z^2 = a^2$ , also, da  $z = \frac{y}{\tan \alpha}$  ist,  $x^2 - \frac{y^2}{\tan^2 \alpha} = a^2$ , oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a \tan \alpha)^2} = 1.$$

Dies stimmt überein mit der Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen  $a$  und  $b = a \tan \alpha$ , deren Asymptotenneigung also gleich  $\alpha$  ist. D. h. die Entfernung  $x$  der Geraden  $BC_1$  von der Achse wird für jede Höhe  $y$  ebenso berechnet, wie die Abscisse der genannten Hyperbel. Bei der Rotation gilt dies von jeder Lage der Geraden  $BC_1$ , so daß es sich hier nur um ein Drehungshyperboloid handeln kann.

Übungsmaterial über die Regelschnittsflächen bietet die „Einführung in das stereometrische Zeichnen“.]

## VI. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

## a) Ellipse.

1) Schräger Schnitt durch den geraden Kreiszylinder giebt eine Ellipse. Berührungskugeln geben ihre Brennpunkte. Die Brennstrahlgleichung ist  $p + q = 2a$ . Für die Brennweite ist  $e^2 = a^2 - b^2$ .

2) Senkrechte und schräge Parallelprojektion des Kreises giebt eine Ellipse. Senkrecht zu einander stehende Durchmesser geben konjugierte Durchmesser; umbeschriebene Quadrate geben konjugierten Parallelogramme. Die letzteren haben sämtlich denselben Inhalt  $F = 4a_1b_1 \sin \gamma = 4ab$ . Der Ellipseninhalte ist  $ab\pi = a_1b_1\pi \sin \gamma$ .

3) Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf dem konjugierten Durchmesser. Die im Endpunkte des letzteren berührenden Tangenten sind zu den Sehnen parallel.

4) Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt die Normale bezw. Tangente der Ellipse. Reflexionsgesetz der Brennstrahlen.

5) Schräger Schnitt durch den geraden Kreiskegel giebt eine Ellipse, wenn nur ein Mantel des Kegels geschnitten wird. Berührungskugeln geben die Brennpunkte. Das Gesetz  $p + q = 2a$  gilt auch jetzt.

6) Schnitt durch den schiefen Kreiskegel oder elliptischen Kreiskegel giebt unter gleicher Bedingung ebenfalls eine Ellipse. Folgerung für die Centralprojektion. Parallelprojektion der Ellipse giebt im allgemeinen eine Ellipse.

## b) Parabel.

7) Ist die Schnittebene parallel zu einer Seite des geraden oder schiefen Kreiskegels, so entsteht eine Ellipse mit unendlich langen Achsen, die Parabel. Nur einer ihrer Brennpunkte liegt im Endlichen. Direktrix, Scheiteltangente, Parameter, Reflexionsgesetz der Brennstrahlen. Die Achsenrichtung ist zu jeder Sehnenrichtung konjugiert. Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt Normale bezw. Tangente. Reflexionsgesetz.

8) Gleichung der Parabel:  $y^2 = 2px$ . Gesetz der Abstände:  $\frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2}$ . Fläche des Segmentes gleich  $\frac{2}{3}$  von der des zugehörigen Parallelogramms. Parallelprojektion der Parabel giebt eine Parabel.

## c) Hyperbel.

9) Schnitt durch beide Mäntel des geraden Kreiskegels giebt eine Hyperbel. Berührungskugeln geben die Brennpunkte. Brennstrahl-

gleichung  $p - q = 2a$ . Für die Brennweite ist  $e^2 = a^2 + b^2$ . Asymptoten. Gleichseitige Hyperbel. Halbierung des Brennstrahlwinkels gibt die Tangente. Reflexionsgesetz der Brennstrahlen.

10) Schnitt durch beide Mäntel des schiefen Kreiskegels gibt eine Hyperbel. Parallelprojektion der Hyperbel gibt eine Hyperbel.

11) Die Tangenten-Dreiecke einer Hyperbel haben denselben Inhalt, ebenso die Asymptoten-Parallelelogramme und die Konjugierten-Parallelelogramme. Die Gleichung  $y = \frac{1}{x}$  für die Parallelen zur Asymptote. Mariottesches Diagramm.

#### d) Allgemeines über die Kegelschnitte.

12) Die Hauptgleichungen.  $\alpha$ ) Ellipsengleichung:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$\beta$ ) Hyperbelgleichung:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  $\gamma$ ) Parabelgleichung:  $y^2 = 2px$ .

$\delta$ ) Wird  $\frac{b^2}{a} = p$  gesetzt (Parameter), so ist die Scheitelgleichung der Ellipse:  $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ , die der Hyperbel:  $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ . (Erklärung der drei Namen.)

13) Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Entfernungen von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden ein konstantes Verhältnis  $\frac{m}{n}$  haben, ist ein Kegelschnitt, und zwar Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem  $\frac{m}{n} \leq 1$  ist. Direktrix der drei Arten von Kegelschnitten.

14) Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Kreisen gleiche Entfernungen hat, ist ein Kegelschnitt. Einer der Kreise kann dabei auch ein Punkt oder eine Gerade sein.

## Anhang.

### I. Eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie.

Zunächst werde folgende Hilfsaufgabe gelöst: Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einer dreiseitigen Ecke die dritte Seite zu berechnen.

**Auflösung.**  $D(ABC)$  in Fig. 204 sei die Ecke, von der die Seiten  $\beta$  und  $\gamma$  und der in der Normalebene von  $h$  gemessene Winkel  $\varphi$  gegeben sein mag. Aus den Gleichungen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi$$

$$a^2 = i^2 + k^2 - 2ik \cos \alpha$$

folgt

$$i^2 + k^2 - 2ik \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi$$

oder

$$(i^2 - c^2) + (k^2 - b^2) - 2ik \cos \alpha = -2bc \cos \varphi$$

oder, da  $i^2 - c^2 = h^2$  und  $k^2 - b^2 = h^2$  ist,

$$h^2 - ik \cos \alpha = -bc \cos \varphi,$$

oder

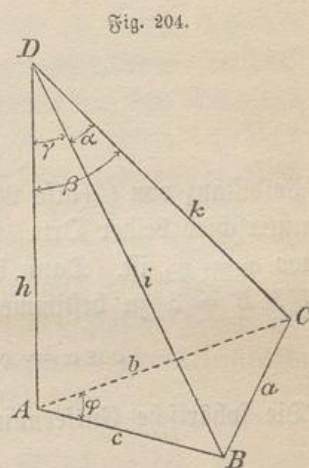
$$\frac{h}{k} \cdot \frac{h}{i} \cos \alpha = -\frac{b}{k} \cdot \frac{c}{i} \cos \varphi,$$

das heißt

$$\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha = -\sin \beta \sin \gamma \cos \varphi,$$

oder endlich

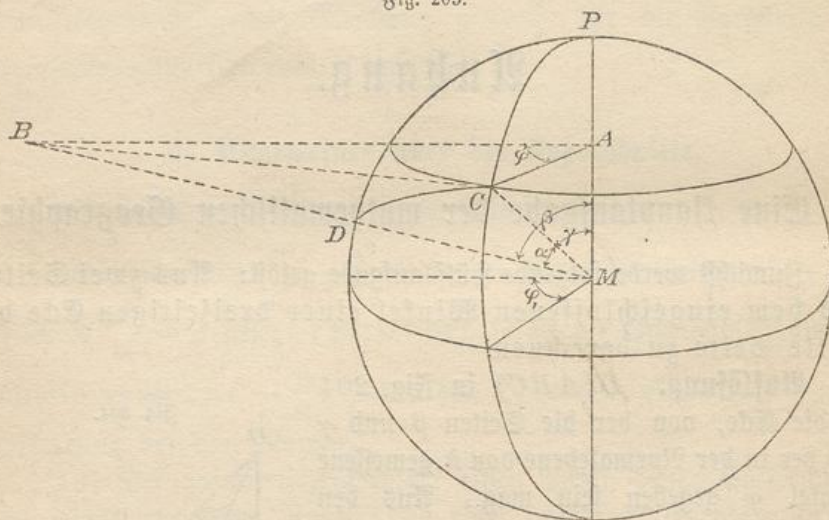
$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi.$$



Mit dieser Formel läßt sich die Aufgabe lösen, die sphärische Entfernung zweier Orte der Erdoberfläche (gemessen längs des größten Kreises) zu finden, wenn ihre Lage nach Länge und Breite gegeben ist.

**Auflösung.**  $C$  und  $D$  in Fig. 205 seien die beiden Orte,  $\beta^\circ$  die Poldistanz von  $D$  (also  $90^\circ - \beta^\circ$  die nördliche Breite),  $\gamma^\circ$  die

Fig. 205.



Polstanz von  $C$  (also  $90^\circ - \gamma^\circ$  die nördliche Breite),  $\varphi_1^\circ$  der Längenschied beider Orte. Durch  $C$  lege man die Horizontalebene  $CAB$ , wo  $\varphi = \varphi_1$  ist. Dann ist wie oben für die Ecke  $M$  ( $ABC$ ) der Winkel  $CMB = \alpha$  zu bestimmen aus

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi.$$

Die sphärische Entfernung ist  $\widehat{DC} = r \cdot \hat{\alpha} = r\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$ .

## II. Einige Bemerkungen über Maxima und Minima.

1) **Aufgabe.** In ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit Kathete  $a$  ein Rechteck von gegebener Fläche  $F$  einzuzichnen, dessen Seiten parallel zu den Katheten sind.

**Auflösung.** Ist  $x$  die gesuchte Grundlinie, so ist  $a - x$  die gesuchte Höhe. Der Inhalt soll sein

$$x(a - x) = F,$$

also ist

$$x^2 - ax = -F,$$

$$\text{d. h. } x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F}.$$

Die Lösung ist auf zweierlei Art möglich, sobald  $F < \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ist, dagegen nur auf eine Art, wenn  $F = \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ist; sie ist aber unmöglich (imaginär), sobald  $F > \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ist, denn dann steht unter der Wurzel Negatives.  $F$  darf also höchstens gleich  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  sein. In diesem Grenzfall ist  $x = \frac{a}{2} \pm 0 = \frac{a}{2}$ .  
Folglich:

Das Quadrat ist das größte Rechteck, welches sich in dieser Weise einzeichnen läßt, es ist zugleich das größte Rechteck, welches aus der in zwei Teile zu zerlegenden Geraden  $a$  erzielt werden kann.

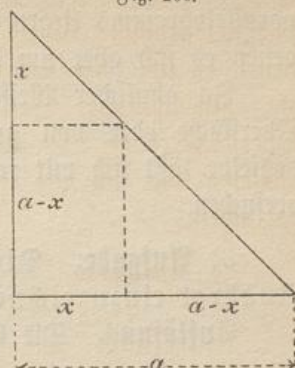
**Aufgaben.** Suche in entsprechender Weise zu zeigen, daß das größte einem gleichschenkligen Dreieck einzubeschreibende Rechteck, welches auf der Basis steht und die oberen Ecken auf den Schenkeln hat, dasjenige von halber Höhe ist; daß dasselbe bei einem beliebigen Dreieck von dem einbeschriebenen Parallelogramm von halber Höhe gilt, dessen eines Seitenpaar zur Mittellinie parallel ist; daß das größte einem Quadrat einzubeschreibende Rechteck, dessen Seiten den Diagonalen parallel sind, das Quadrat ist (welches die Eckpunkte in den Halbierungspunkten der Seiten hat); daß das Entsprechende von dem größten einem Parallelogramm einzubeschreibenden Parallelogramm (mit Seiten, die den Diagonalen parallel sind) gilt.

2) **Aufgabe.** Einem Kreise vom Durchmesser  $d$  das Rechteck vom größten Umfange einzuzeichnen.

**Auflösung.** Die eine Seite sei  $x$ , dann ist die andere  $\sqrt{d^2 - x^2}$ , der Umfang also  $2(x + \sqrt{d^2 - x^2}) = u$ . Hieraus ergibt sich  $x = \frac{u \pm \sqrt{8d^2 - u^2}}{4}$ , was bei dem Grenzwerte  $u = d\sqrt{8}$  noch reell bleibt. Dabei ist  $x = \frac{d\sqrt{8}}{4} = d\sqrt{\frac{1}{2}}$ , es handelt sich also um das Quadrat.

Suche die größte Rechtecksfläche im Kreise zu bestimmen. (Es ergibt sich ebenfalls das Quadrat.) Für die Ellipse ergibt sich durch Parallelprojektion als größtes einzuschreibendes Parallelogramm das-

Fig. 206.



jenige, dessen Ecken in den Berührungspunkten jedes Konjugiertenparallelogramms liegen, so daß unzählige Lösungen möglich sind, bei denen es sich aber um denselben Inhalt handelt.

In ähnlicher Weise lassen sich quadratische Säulen von größter Oberfläche oder von größtem Inhalt in die Kugel eintragen, und dasselbe läßt sich mit regelmäßigen 3-, 5-, 6-seitigen Säulen u. s. w. versuchen.

3) **Aufgabe.** Die größte mögliche Ellipsenfläche in ein Quadrat einzuzeichnen.

**Auflösung.** Die Ellipsentangente im Punkte  $x_1 y_1$  der Fig. 207 hat die Gleichung  $\frac{x x_1}{\xi^2} + \frac{y y_1}{\eta^2} = 1$ , woraus für  $y = 0$  und  $x = 0$  folgt  $\frac{x x_1}{\xi^2} = 1$  und  $\frac{y y_1}{\eta^2} = 1$ , d. h.  $d x_1 = \xi^2$ ,  $d y_1 = \eta^2$ , wenn  $d$  die Halbdiaagonale des Quadrats ist. ( $\xi$  und  $\eta$  sind also mittlere Proportionalen zu  $d$  und  $x_1$  bzw.  $d$  und  $y_1$ .) Daraus folgt  $(x_1 + y_1) d = \xi^2 + \eta^2 = d^2$ . Die Ellipsenfläche aber ist

$\xi \eta \pi = F$ , so daß  $\xi \eta = \frac{F}{\pi}$  ist. Aus

$$\xi^2 + \eta^2 + 2 \xi \eta = d^2 + \frac{2 F}{\pi}$$

und

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 \xi \eta = d^2 - \frac{2 F}{\pi}$$

folgt

$$\xi + \eta = \sqrt{d^2 + \frac{2 F}{\pi}}$$

und

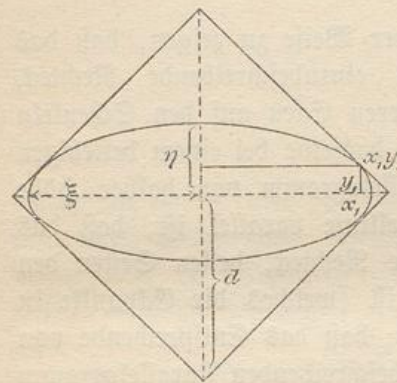
$$\xi - \eta = \sqrt{d^2 - \frac{2 F}{\pi}},$$

woraus die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  für jede geforderte Ellipsenfläche folgen. Die Grenzbedingung aber ist  $\frac{2 F}{\pi} < d^2$ , d. h.  $F < \frac{d^2 \pi}{2}$ , d. h.  $< \left(d \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$ , d. h. kleiner als die Fläche des einbeschriebenen Kreises, der demnach die größte mögliche Ellipsenfläche giebt.

Durch Parallelprojektion folgt, daß die größte in ein Parallelogramm einzubeschreibende Ellipse diejenige ist, die in den Halbierungspunkten der Seiten berührt, also die sogenannte Hauptellipse.

4) **Aufgabe.** Welches ist der kleinste Rhombus, dessen Seiten sich durch die Ecken eines gegebenen Quadrats legen lassen?

Fig. 207.



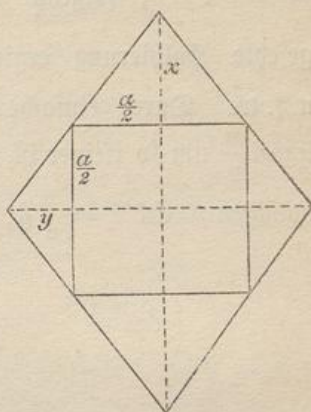
**Auflösung.** Nach Figur 208 ist  $x : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : y$ , also  $y = \frac{a^2}{4x}$ .  
Es handelt sich darum, den Dreiecksüberschuß  $ax + ay$  oder  $a\left(x + \frac{a^2}{4x}\right)$  möglichst groß zu machen. Man setze ihn gleich  $F$ , so daß  $x + \frac{a^2}{4x} = \frac{F}{a}$  oder

$$x^2 - \frac{F}{a}x = -\frac{a^2}{4}$$

ist, woraus folgt  $x = \frac{F \pm \sqrt{F^2 - a^4}}{2a}$ .

Der Grenzwert ist  $F = a^2$ , wobei  $x = \frac{a}{2}$  wird. Der kleinste umbeschriebene Rhombus ist demnach das Quadrat. Die Seiten des letzteren sind den Diagonalen parallel. Was folgt durch Parallelprojektion?

Fig. 208.



5) **Aufgabe.** Welches ist der Rhombus von kleinster Fläche, der sich einem Kreise umschreiben läßt?

**Auflösung.** Ist  $x$  die Seite eines umbeschriebenen Rhombus, so ist die Fläche  $F = 2xr$ , also  $x = \frac{F}{2r}$ ; sind ferner  $y$  und  $z$  die Halbdiaagonalen, so ist  $F = 2yz$  und zugleich  $z^2 + y^2 = x^2 = \frac{F^2}{4r^2}$ .

Es folgt  $y^2 + z^2 \pm 2yz = \frac{F^2}{4r^2} \pm F$ , d. h.  $y + z = \sqrt{\frac{F^2}{4r^2} + F}$ ,  
 $y - z = \sqrt{\frac{F^2}{4r^2} - F}$ , woraus sich  $y$  und  $z$  für jedes  $F$  ergeben, sobald nur nicht  $\frac{F^2}{4r^2} < F$ , d. h.  $F < (2r)^2$  ist. Der kleinste umbeschriebene Rhombus, der möglich ist, ist demnach das Quadrat. — Was folgt durch Parallelprojektion für die Ellipse?

In solcher Weise lassen sich mit Hülfe der quadratischen Gleichungen zahlreiche Aufgaben über Maxima und Minima zur Lösung bringen.

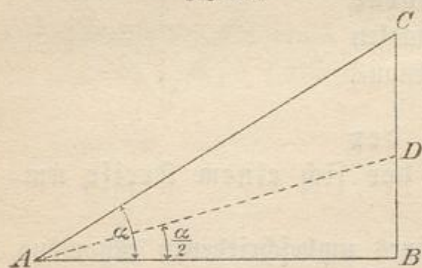
6) Von Wichtigkeit sind die sogenannten isoperimetrischen Probleme, bei denen es sich darum handelt, unter den Figuren gleichen Umfangs diejenige zu ermitteln, die den größten Inhalt hat. Ohne auf die langwierigere Behandlung näher einzugehen, kann sich die Schule auf folgende Andeutungen beschränken:

Unter den Dreiecken gleichen Umfangs über derselben Grundlinie ist das gleichschenklige das größte, folglich unter den Dreiecken

gleichen Umfangs überhaupt das gleichseitige. Ebenso ist das Quadrat unter den Vierecken gleichen Umfangs das größte.

Unter den regelmäßigen Flächen desselben Umfangs ist die größte der Kreis. In Fig. 209 ist nämlich, da  $\alpha$  halbiert ist,  $AB : AC = BD : DC$ , folglich  $BD < CD$ , d. h.  $2 \tan \frac{\alpha}{2} < \tan \alpha$ . Fortgesetzte Halbierung ergibt  $4 \tan \frac{\alpha}{4} < 2 \tan \frac{\alpha}{2}$ ,  $8 \tan \frac{\alpha}{8} < 4 \tan \frac{\alpha}{4}$  u. s. w. Durch einfache Betrachtungen ergibt sich überhaupt, daß  $n \tan \frac{\alpha}{n}$  um so kleiner ist, je größer man  $n$  nimmt. Nun ist beim regelmäßigen  $n$ -Eck  $F = \frac{u}{2} \varrho$ , und, da  $\frac{2\pi}{2n}$  oder  $\frac{\pi}{n}$  der halbe Centriwinkel ist,

Fig. 209.



$$\varrho = \frac{\frac{u}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}}$$

also

$$F = \frac{u^2}{4} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}}$$

Je größer  $n$  ist, um so kleiner ist nach Obigem der Nenner, um so größer die Fläche des Polygons von gegebenem Umfang  $u$ . Das größte also ist der Kreis. (Für diesen ist  $r^2 \pi = \frac{(2r\pi)^2}{4} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}} = r^2 \pi^2 \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}}$ , so daß  $n \tan \frac{\pi}{n}$  für  $n = \infty$  seinen kleinsten Wert  $\pi$  haben muß. In der That darf man bei großem  $n$  setzen:  $\tan \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ .)

Alle behandelten Aufgaben lassen noch andere, rein geometrische Behandlung zu. In dieser Beziehung sei jedoch auf die Originalarbeiten Steiners und anderer verwiesen.

7) In der analytischen Geometrie handelt es sich bei der Untersuchung der Maxima und Minima um das Auffinden der Stellen, wo die Tangente der Kurve horizontal ist.

Will man zum Beispiel durch Rechnung untersuchen, wo sich solche Stellen bei dem durch die allgemeine Gleichung 2<sup>ten</sup> Grades

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

gegebenen Kegelschnitte befinden, so berechne man aus dieser Gleichung  $x$ , was einen Ausdruck giebt, der im allgemeinen eine Quadratwurzel enthält, unter der  $y$  vorkommt. Mit dieser Wurzel

wird dann wie früher verfahren, d. h. der unter ihr stehende Ausdruck wird gleich Null gesetzt und aus ihm  $y$  als Grenzwert berechnet.

8) Bei Ausdrücken höheren Grades, die nur  $x$  enthalten, empfiehlt sich folgende, an einem Beispiele 3<sup>ten</sup> Grades erläuterte Methode.

$$\text{Ist 1) } y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

so ist  $y$  ein Maximum, wenn für jeden Nachbarwert  $x_1$  das entsprechende  $y_1 < y$  ist, also wenn

$$a + bx + cx^2 + dx^3 > a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3$$

oder

$$b(x - x_1) + c(x^2 - x_1^2) + d(x^3 - x_1^3) > 0,$$

oder

$$(x - x_1)[b + c(x + x_1) + d(x^2 + xx_1 + x_1^2)] > 0$$

d. h. positiv ist. Demnach müssen die Hauptfaktoren beide zugleich (d. h. für denselben Wert von  $x$ ) positiv, oder beide zugleich negativ, oder beide zugleich Null sein. Der erste wird Null für  $x = x_1$ , folglich wird auch der zweite Null für  $x = x_1$ , so daß für  $x = x_1$

$$2) \quad b + 2cx + 3dx^2 = 0$$

ist. Hieraus läßt sich  $x$  berechnen und der Wert in die Gleichung für  $y$  einsetzen.

Handelt es sich z. B. um  $y = bx - x^3$ , so wird Gleichung 2) die folgende Form annehmen:

$$b - 3x^2 = 0,$$

folglich findet das Maximum statt für  $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Die Gleichung 2) läßt sich aus der Gleichung 1) sofort dadurch ableiten, daß an Stelle jedes Ausdrucks  $kx^p$  der Ausdruck  $pkx^{p-1}$  tritt. Ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, kann bisweilen zweifelhaft bleiben, wird aber dann durch probeweises Einsetzen nach Nachbarwerten von  $x$  in die Gleichung für  $y$  bestimmt, wobei sich zeigt, ob diese größere oder kleinere Werte geben.

Eingehendere Untersuchungen würden das Gebiet der Schule überschreiten, denn hier kann nicht erörtert werden, ob die entsprechende Kurve an der besprochenen Stelle eine Spitze, einen Wendepunkt, oder eine sonstige Unregelmäßigkeit hat.

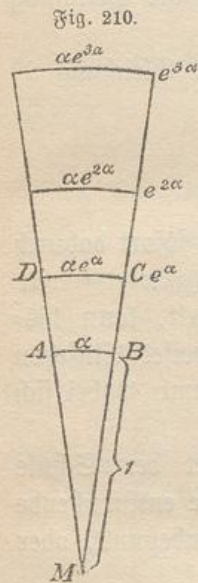
9) Der größte Wert, den der sinus oder der cosinus eines Winkels erreichen kann, ist 1. Demnach eignen sich diese Funktionen gut für gewisse Maximalaufgaben.

Ein bekanntes mechanisches Beispiel ist die Aufgabe, das

Maximum der Wurfweite für eine bestimmte Abschlußgeschwindigkeit  $c$  zu finden. Die Mechanik lehrt, daß ein Geschöß, welches unter dem aufsteigenden Winkel  $\alpha$  abgeschossen wird, im luftleeren Raume eine konstante Horizontalverschiebung  $c \cos \alpha$  hat, während die Wurfdauer  $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$  ist. Demnach ist die Wurfweite  $w = (c \cos \alpha) \cdot \frac{2c \sin \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ . Das Maximum wird erreicht bei  $\sin 2\alpha = 1$ , dies geschieht bei  $2\alpha = 90^\circ$  oder  $\alpha = 45^\circ$ . Demnach ist das Maximum der theoretischen Wurfweite gleich  $\frac{c^2}{g}$ , und es wird erreicht beim Abschlußwinkel  $45^\circ$ .

### III. Die Quadrateinteilung der Ebene mittels der Polarkoordinaten.

Bei den kartographischen Betrachtungen in Abschnitt XII der Geometrie und Abschnitt IX der Stereometrie spielte die Einteilung der Ebene in unendlich kleine „Quadrate“ eine bedeutende Rolle. Dabei war behauptet worden, daß diese Teilung durch Polarkoordinaten erzielt werden kann, wenn man die Längen der Radien im Verhältnis  $e^0 = 1, e^\alpha, e^{2\alpha}, e^{3\alpha}, \dots$  auf einander folgen läßt, ihre Neigungen aber, am Einheitskreise gemessen, nach der Reihe  $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha$  u. s. w. Dabei brauchte nur ein einziges Quadrat mit Hilfe der Rechnung konstruiert zu werden, denn die übrigen fand man leicht mit Hilfe paralleler Diagonalen. Der Beweis ergibt sich folgendermaßen:



In Fig. 210 sei  $MA = 1, \widehat{AB} = \alpha, MD = e^\alpha$ , wobei  $\alpha$  sehr klein im Verhältnis zu 1 zu denken ist. Dann ist nach Nr. 42 der Arithmetik

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

folglich

$$AD = e^\alpha - 1 = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

was bei kleinem  $\alpha$  eine sehr schnell konvergierende Reihe ist (bei  $\alpha = \frac{1}{1000}$  ist das zweite Glied bereits  $\frac{1}{2000000}$ ), so daß bei ver-

schwindend kleinem  $\alpha$  nur das erste Glied nötig und dann für die Grenze  $AD = \alpha$  ist.

Ebenso ist  $\widehat{DC} = \alpha \cdot \frac{e^\alpha}{1} = \alpha + \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ ,  
 so daß für die Grenze ebenfalls  $\widehat{DC} = \alpha$  ist. Für unendlich kleines  $\alpha$  ist also  $\widehat{AB} = AD = \widehat{DC} = BC$ , d. h.  $ABCD$  ein „Quadrat“.

Je vier um einen Punkt herum liegende „Quadrate“ dieser Art stellen wieder einen Flächenraum dar, der einem wirklichen Quadrate zu entsprechen hat. Dann handelt es sich z. B. um  $MA = 1$ ,  $\widehat{AB} = 2\alpha$ ,  $MD = e^{2\alpha}$ . Ebenso ist es bei  $MA = 1$ ,  $\widehat{AB} = n\alpha$ ,  $MD = e^{n\alpha}$ . Also auch  $n \cdot n$  in geeigneter Weise zusammengelegte „Quadrate“ entsprechen einem quadratischen Flächenraume, und die Beziehung zwischen  $\widehat{A_1B_1}$  und  $M_1D_1$  bleibt dabei erhalten, d. h. ist  $\widehat{A_1B_1} = \alpha$ , so ist  $M_1D_1 = e^\alpha$ , folglich  $\widehat{A_1B_1} = \lg M_1D_1$ .

Bei den früheren Betrachtungen war  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  gesetzt, die Längen der Radien waren also

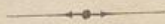
$$\dots, e^{-\frac{6\pi}{n}}, e^{-\frac{4\pi}{n}}, e^{-\frac{2\pi}{n}}, 1, e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, e^{\frac{6\pi}{n}}, \dots,$$

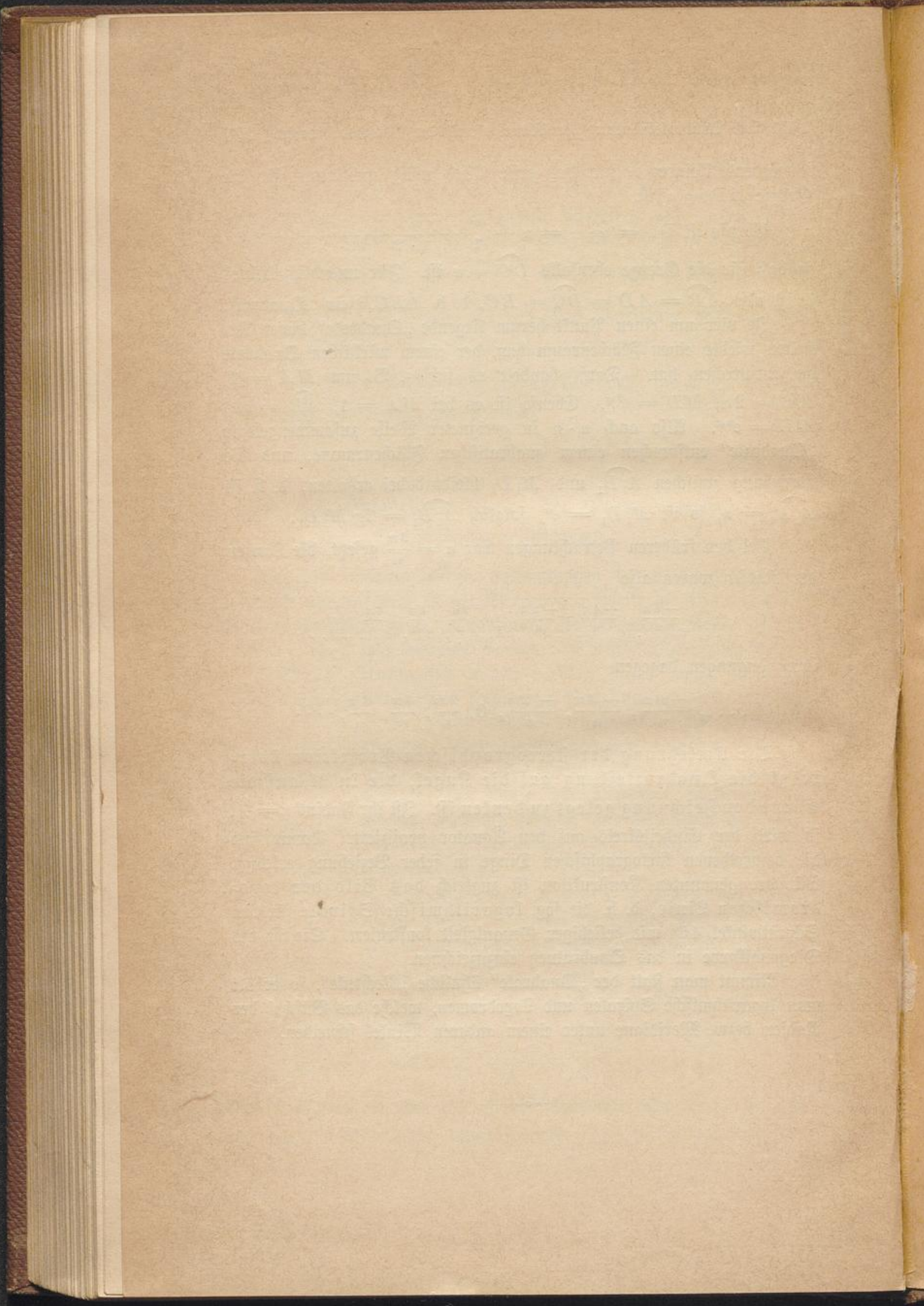
ihre Neigungen dagegen

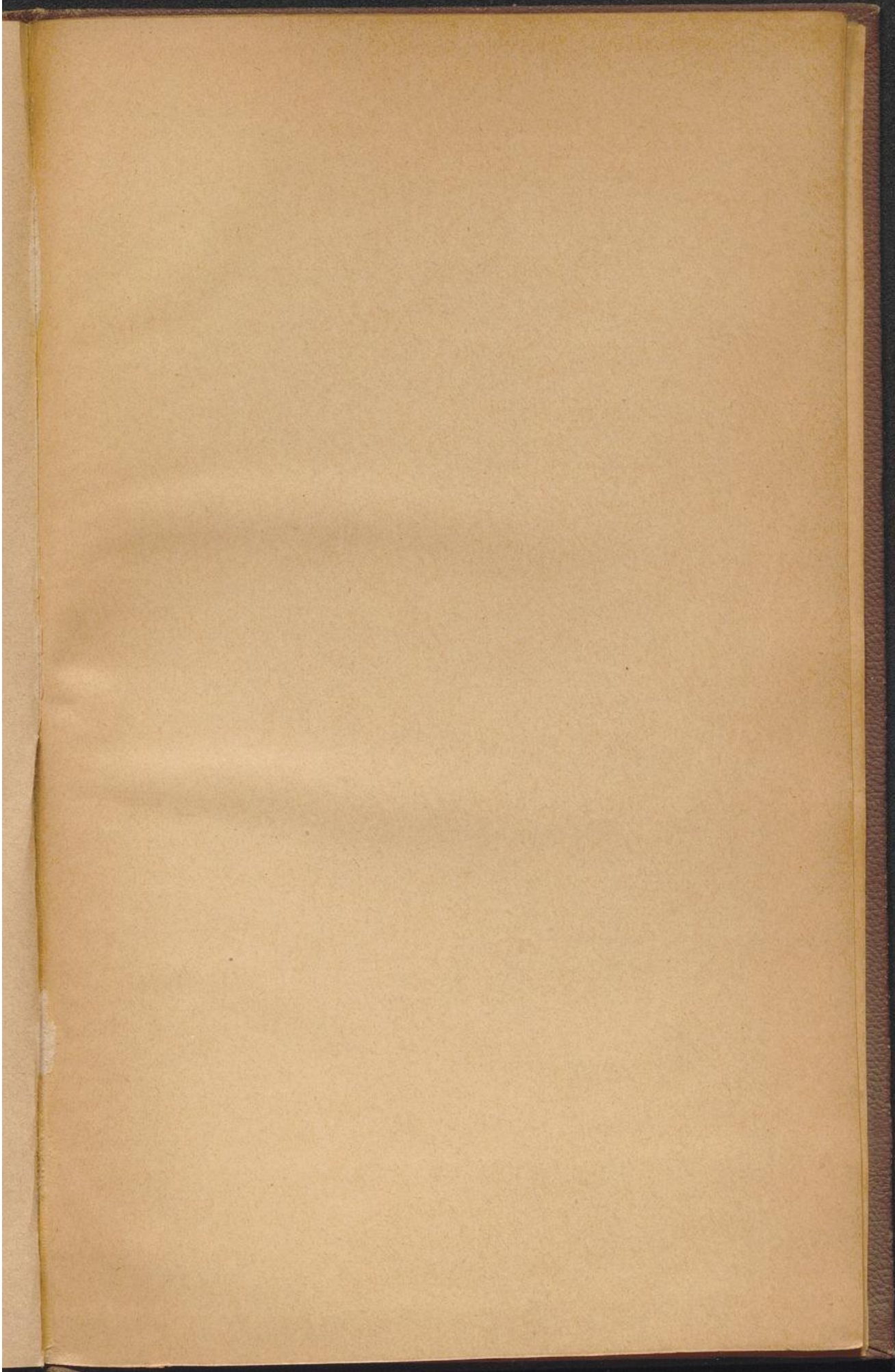
$$\dots, \frac{-6\pi}{n}, \frac{-4\pi}{n}, \frac{-2\pi}{n}, 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \dots$$

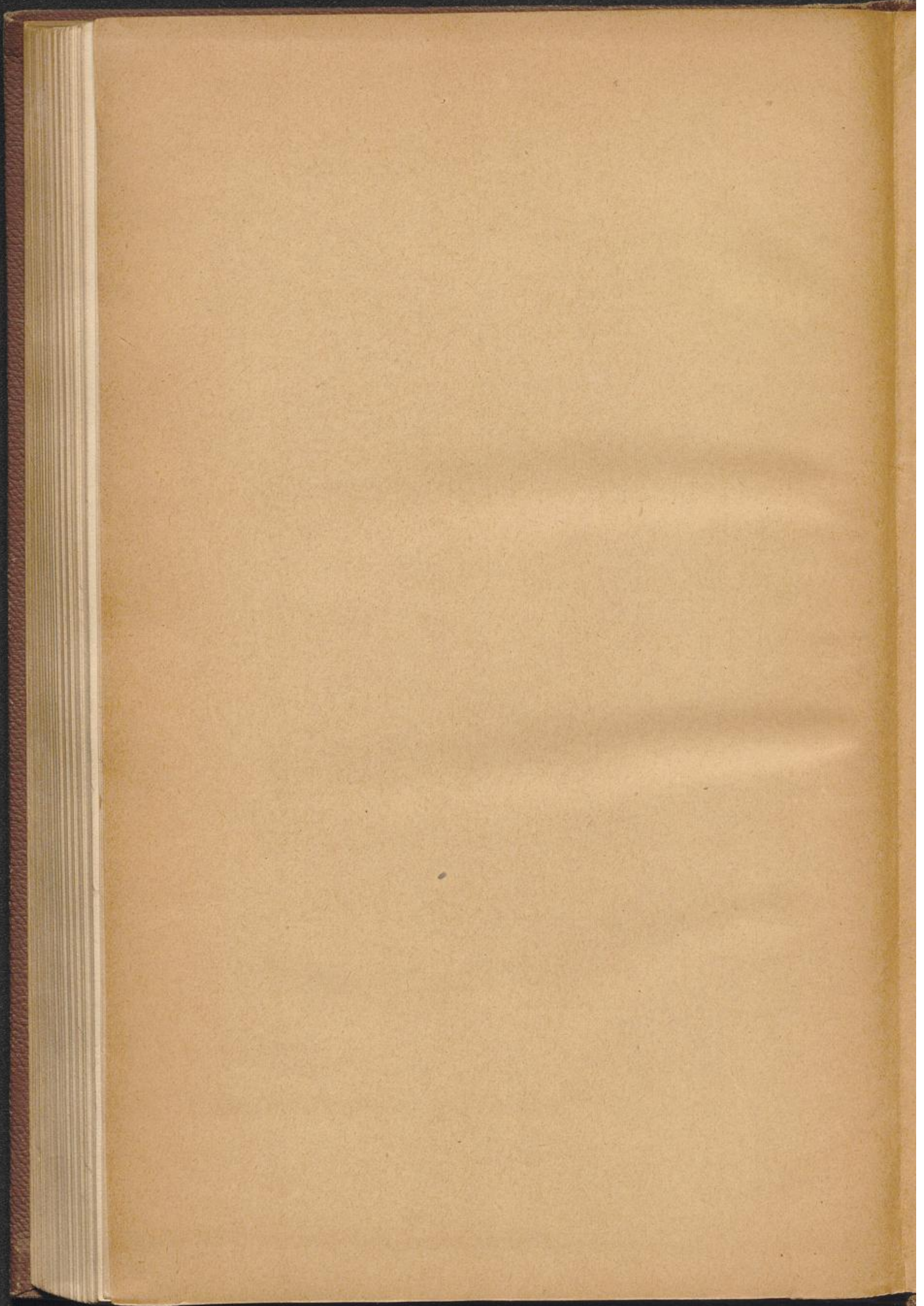
Die Umkehrung der stereographischen Projektion überträgt die Quadratteilung auf die Kugel, die in  $M$  auf die Ebene der Zeichnung gelegt zu denken ist. Ist ihr Radius  $r = \frac{1}{2}$ , so wird der Einheitskreis auf den Äquator projiziert. Damit sind die besprochenen kartographischen Dinge in jeder Beziehung erledigt. Mit der genannten Konstruktion ist zugleich das Bild der Logodromischen Linie, d. h. die sog. Logarithmische Spirale für den Schnittwinkel  $45^\circ$  mit beliebiger Genauigkeit konstruiert. Sie ist als Diagonalkurve in das Quadratnetz einzuzeichnen.

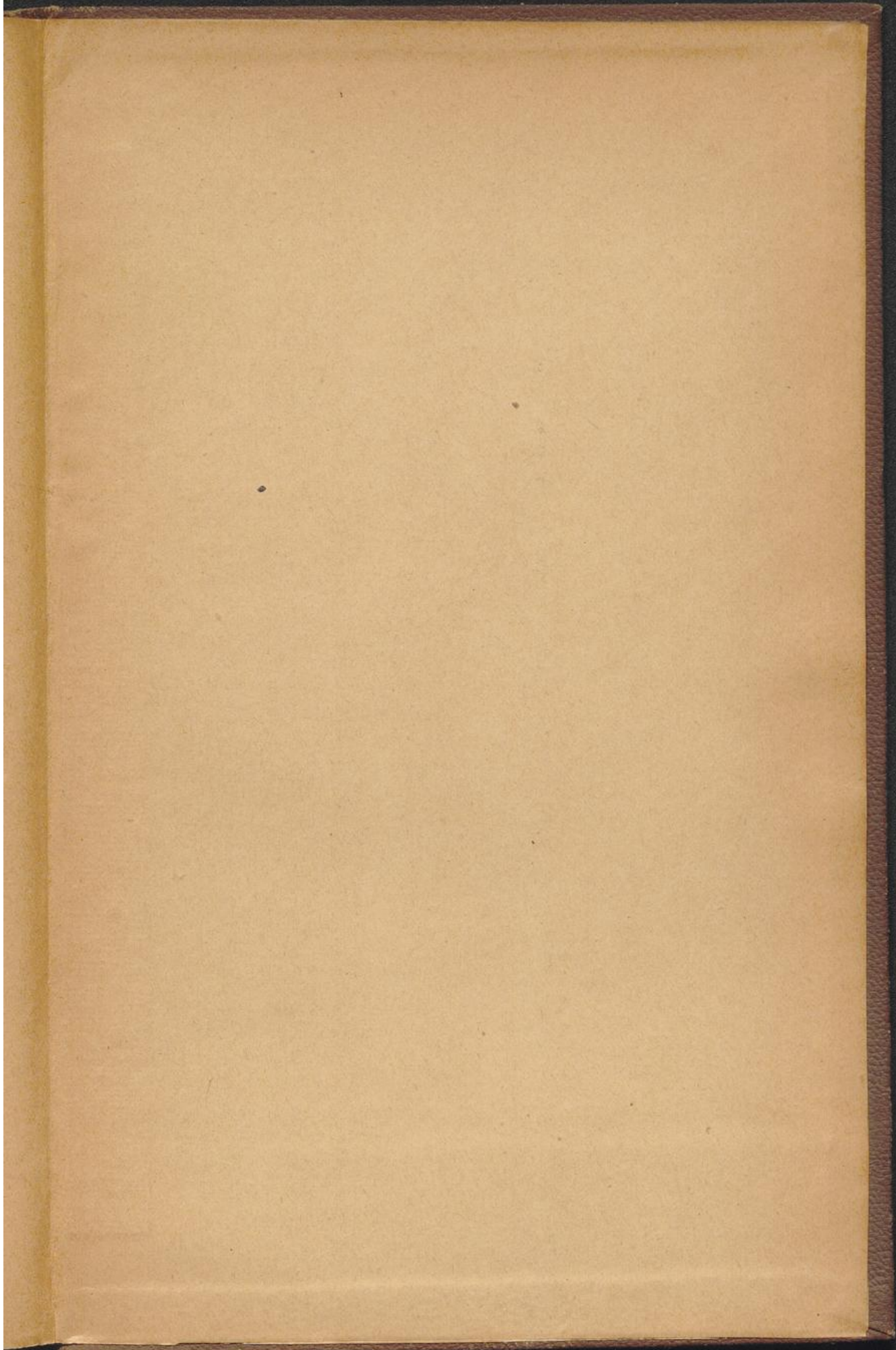
Nimmt man statt der „Quadrate“ ähnliche „Rechtecke“, so erhält man logarithmische Spiralen und Logodromen, welche das Büschel der Radien bezw. Meridiane unter einem anderen Winkel schneiden.













03M36388



P  
03



Solamiller, Elementar - 2te

917

M  
36388