



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Vergleich mit den Spannungen in einem deformierten festen Körper

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

bildung des schon im vorigen Paragraphen gewählten. — Mit den für die Schubspannungscomponenten in elastischen Körpern aufgestellten Werthen, Band III, Gl. (288), stimmen übrigens die aus den Gl. (275) eng überein. Man braucht nur an Stelle der Geschwindigkeitscomponenten $v_1 v_2 v_3$ die Verschiebungscomponenten $\xi \eta \zeta$ zu nehmen, und den Zähigkeitscoefficienten k durch den Schubelastizitätsmodul G zu ersetzen, um zu den früheren Formeln zu gelangen. Man kann dies zu einer anschaulichen Darstellung des in den Gl. (275) enthaltenen Ansatzes benützen. Man betrachte nämlich die Wassermasse zu einer gegebenen Zeit und stelle hierauf die Verschiebungen fest, die jeder materielle Punkt während eines passend gewählten kleinen Zeittheilchens erfährt. Wenn ein fester Körper ursprünglich dieselbe Gestalt hatte, wie die Wassermasse und wenn er hierauf deformirt wird, so dass sich jeder materielle Punkt in gleicher Richtung und um ebensoviel verschiebt, wie der ihm in der Wassermasse entsprechende Punkt, so entstehen in diesem Körper Spannungen und die Schubspannungen stimmen für jede Stelle und für jede Schnittrichtung genau überein mit den Reibungen in der Wassermasse. Durch diese Ueberlegung wird die innere Reibung mit einem Deformationszustande in der Wassermasse in Zusammenhang gebracht.

Die gleiche Ueberlegung führt auch zur Aufstellung der Ausdrücke für die Normalspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$. Diese können im Allgemeinen nicht mehr genau gleich unter einander sein; wir denken uns jede von ihnen aus einem gewöhnlichen Flüssigkeitsdrucke p , der nach allen Seiten hin gleich ist, und aus einem Zusatzgliede zusammengesetzt, dessen Werth von der Zähigkeit abhängt. Dieses Zusatzglied bestimmen wir im Uebrigen ebenso aus dem Deformationszustande wie vorher die Schubspannungscomponenten. Wir haben dann in Anlehnung an die Gl. (292) von Band III unter Berücksichtigung der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, die e gleich Null macht, zu setzen

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + 2k \frac{\partial v_1}{\partial x}; & \sigma_y &= -p + 2k \frac{\partial v_2}{\partial y}; \\ \sigma_z &= -p + 2k \frac{\partial v_3}{\partial z}.\end{aligned}\tag{276}$$

Die Bedeutung von p folgt übrigens leicht aus diesen Gleichungen, wenn man sie addirt. Der Continuitätsbedingung wegen heben sich dabei die mit k behafteten Glieder fort und man behält

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -p,$$

d. h. p ist der arithmetische Mittelwerth des normalen Flüssigkeitsdruckes auf irgend drei zu einander senkrechte Schnittflächen.

Zur Begründung des durch die Gl. (276) ausgesprochenen Ansatzes ist noch darauf hinzuweisen, dass die Ausdrücke für die Schubspannungskomponenten oder Reibungen in den Gl. (275) für jede Orientirung des Coordinatensystems gültig bleiben. Nachdem aber die Componenten τ für alle Schnittrichtungen bereits festgelegt waren, durften die Normalcomponenten σ nicht mehr willkürlich angenommen werden, sondern sie sind damit gleichfalls schon implicite gegeben: durch die Bedingung nämlich, dass alle Spannungen an einem beliebig herausgegriffenen Volumenelemente im Gleichgewichte mit einander stehen müssen. Der Uebergang von den Gl. (275) zu den durch sie mit bedingten Gl. (276) konnte hier am einfachsten durch den Vergleich mit den entsprechenden Untersuchungen der Elasticitätstheorie bewirkt werden. Man weiss nämlich schon von früher her, dass Schubspannungen, die dem Ansatz (275) und Normalspannungen, die dem Ansatz (276) entsprechen, zu einem Gleichgewichtssysteme von Spannungen gehören.

Auch die Arbeiten, die von den Spannungskomponenten an der Oberfläche eines Raumelementes bei der Verschiebung um $v_1 dt$, $v_2 dt$, $v_3 dt$ geleistet werden, sind ebensogross wie bei der durch die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ ausgedrückten Formänderung eines elastischen Körpers. An Stelle der umkehrbar aufgespeicherten Formänderungsarbeit tritt hier freilich ein

Verlust an mechanischer Energie, die während der Zeit dt in Wärme verwandelt wird. Dieser Verlust kann aber im Wesentlichen genau nach denselben Formeln berechnet werden wie die ihm entsprechende elastische Formänderungsarbeit. Gegenüber dem Ansätze in Gl. (296b), Bd. III, der etwa hierzu übernommen werden kann, ist nur zu beachten, dass die Arbeit hier doppelt so gross ist, als dort, weil dort die Formänderung und die Kräfte von Null an bis zu ihrem Endwerthe wuchsen, während hier die Kräfte während der ganzen Formänderung denselben Werth behalten.

Wenn $k = 0$ ist, wird die Arbeit der Spannungen an jedem Raumelemente zu Null, d. h. in der vollkommenen Flüssigkeit kann keine mechanische Energie verloren gehen. Man kann daher eine vollkommene Flüssigkeit auch dahin definiren, dass bei ihr (abgesehen von Stossvorgängen, bei denen Flüssigkeitstheile mit endlich verschiedenen Geschwindigkeiten unmittelbar aufeinanderprallen) keine mechanische Energie in Wärme verwandelt werden kann.

Setzt man die Werthe für die Spannungscomponenten in die erste der Gl. (274) ein, so geht diese über in

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + k \left\{ 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} \right\}$$

Nach der Continuitätsgleichung ist aber

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

und daher auch

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} = 0.$$

Hiernach heben sich drei Glieder in der Klammer gegeneinander fort und man erhält mit Einführung des Zeichens ∇^2 für die Laplace'sche Operation

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + k \nabla^2 v_1.$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Axenrichtungen. Setzt man noch an Stelle der Beschleunigungs-

componenten ihre Werthe aus den Gl. (211), S. 372, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + k \nabla^2 v_1 \\ \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + k \nabla^2 v_2 \\ \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + k \nabla^2 v_3 \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

Mit $k = 0$ gehen diese wieder in die Euler'schen Gleichungen über. Man kann auch alle drei Gleichungen in eine einzige Vektorgleichung zusammenfassen, wie es früher mit den Euler'schen Gleichungen in Gl. (214) geschehen war. Diese Gleichung lautet hier

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + k \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (278)$$

Wegen der verwickelten Gestalt dieser Bewegungsgleichungen macht die Lösung von Aufgaben über die Bewegung zäher Flüssigkeiten weit mehr Schwierigkeiten, als die Lösung der entsprechenden Aufgaben für reibungsfreie Flüssigkeiten. Um diese Schwierigkeiten zu vermindern, begnügt man sich meist damit, den Bewegungsvorgang unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die Geschwindigkeiten nur sehr klein seien. Dann kann in Gl. (278) auf der linken Seite $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ gegen $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ vernachlässigt, d. h.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{d \mathbf{v}}{dt}$$

gesetzt werden. Für eine stationäre Bewegung fällt dann die linke Seite überhaupt ganz fort und man erhält

$$k \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad (279)$$

wozu noch die Continuitätsgleichung kommt. Durch Zerlegen in Componenten wird übrigens aus (279)

$$k \nabla^2 v_1 = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad k \nabla^2 v_2 = \frac{\partial p}{\partial y}; \quad k \nabla^2 v_3 = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (280)$$