Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Strömung um einen Cylinder

Bisher betrachtete ich w immer nur als eine Function von $x + yi$. Man überzeugt sich aber leicht, dass die vorausgehenden Betrachtungen auch dann noch gültig bleiben, wenn $x - yi$ an Stelle von $x + yi$ tritt. Es wird nicht nöthig sein, die Betrachtung für diesen Fall von Neuem zu wiederholen.

Man kann nun eine Reihe von Beispielen für ebene Flüssigkeitsströmungen erhalten, wenn man für w eine beliebige Function von z setzt oder umgekehrt. Ich behandle hier zunächst ein Beispiel, das von besonderem Interesse ist. Man setze

$$w = a\left(z + \frac{\varrho^2}{z}\right), \tag{240}$$

wobei unter a und ϱ reelle Constanten zu verstehen sind. Man hat dann

$$\frac{dw}{dz} = a\left(1 - \frac{\varrho^2}{z^2}\right) \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{1}{a} \cdot \frac{z^2}{z^2 - \varrho^2}.$$

Bezeichnet man ferner den Modul der complexen Variabeln z mit r, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so erhält man für w auch

$$w = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2}{x + yi}\right) = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2(x - yi)}{r^2}\right).$$

Durch Zerlegen von w in den reellen und den imaginären Bestandtheil finden wir daher für das Geschwindigkeitspotential und für die Stromfunction der durch w gekennzeichneten Flüssigkeitsbewegung die Ausdrücke

$$\Phi = ax\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right)$$

$$\Psi = ay\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Für $z = 0$ würde $\zeta = 0$ und die Geschwindigkeit daher unendlich gross. In der Nachbarschaft des Coordinatenursprungs lässt sich daher die durch Gl. (240) gegebene Lösung jedenfalls nicht benutzen. Schlagen wir dagegen einen Kreis mit dem Halbmesser ϱ um den Ursprung, so kann die durch Gl. (240) angegebene Flüssigkeitsströmung ausserhalb dieses Kreises bei geeigneten Grenzbedingungen erfolgen. Für $z = \infty$ wird $\zeta = \frac{1}{a}$, also reell, d. h. in grosser Entfernung vom Coordinatenursprunge erfolgt die Strömung parallel zur X-Axe mit der constanten Geschwindigkeit a.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Geschwindigkeit in den Punkten des Umfangs des Kreises vom Halbmesser ϱ gerichtet ist. Zu diesem Zwecke denke ich mir einen Radius dieses Kreises gezogen und bezeichne den Winkel, den er mit der positiven X-Axe bildet, mit ϑ. Für den auf dem Kreisumfange liegenden Endpunkt dieses Radius ist

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

und wenn man dies einsetzt, geht ζ über in

$$\zeta = \frac{1}{a}\,\frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2}{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 - 1} = \frac{1}{a}\,\frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2}{2\sin\vartheta\,(i\cos\vartheta - \sin\vartheta)}$$

oder nach zwei weiteren einfachen Umformungen

$$\zeta = -\frac{1}{a}\,\frac{(\sin\vartheta - i\cos\vartheta)^2}{2\sin\vartheta\,(i\cos\vartheta - \sin\vartheta)} = \frac{1}{2a\sin\vartheta}(\sin\vartheta - i\cos\vartheta).$$

Hiermit ist auch die Zerlegung von ζ in den reellen und den imaginären Antheil bereits ausgeführt. Die X-Componente von ζ ist überall positiv, die Y-Componente hat dagegen das Vorzeichen von $-\operatorname{cotg}\vartheta$, d. h. sie ist im ersten und dritten Quadranten negativ und im zweiten und vierten Quadranten positiv. Dasselbe gilt auch von den Vorzeichen der Componenten von $\mathfrak{v}$. Das Verhältniss beider Componenten, von dem die Richtung von $\mathfrak{v}$ abhängt, ist gleich $1 : -\operatorname{cotg}\vartheta$. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ überall senkrecht zum Radius steht oder in die Richtung des Kreisumfangs fällt. Dies folgt auch noch einfacher aus dem Ausdrucke von Ψ. Für $r = \varrho$ geht nämlich der Werth von Ψ über in $\Psi = 0$, d. h. der Kreisumfang bildet eine Stromlinie, nämlich jene specielle Stromlinie, die dem Werthe Null der Stromfunction entspricht. Die ausserhalb des Kreises auf jener Seite der X-Axe, die zu positiven Werthen von y gehört, verlaufenden Stromlinien sind durch positive Werthe, die innerhalb liegenden durch negative Werthe von Ψ gekennzeichnet.

Längs einer Stromlinie kann man stets auch eine feste Wand anbringen und die Flüssigkeit auf der einen Seite dieser

Wand beseitigen, ohne die Bewegung auf der anderen Seite der Wand dadurch zu stören. Wir denken uns die Flüssigkeit nur ausserhalb des Kreises vom Halbmesser ϱ, während dieser Kreis selbst für die Flüssigkeit undurchdringlich sein soll. Dann kann man die betrachtete Lösung immer noch benutzen. Dem Kreise entspricht ein in die Flüssigkeit versenkter cylindrischer Körper, um den die Strömung herumgehen muss. Man denke sich etwa einen cylindrischen Pfahl, der in ein Flussbett in aufrechter Stellung eingerammt ist und der über den Wasserspiegel hinausragt. Das Wasser muss um den Pfahl herumfliessen. Nimmt man dabei näherungsweise an, dass die Strömung eben und wirbelfrei sei, so hat man den durch unsere Lösung dargestellten Fall. Den kleinsten Absolutwerth $\frac{1}{2a}$ nimmt ξ am Umfange an für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. an jenen Stellen des Kreisumfangs, die auf die Y-Axe fallen. Die Geschwindigkeit wird also dort am grössten, nämlich gleich $2a$, d. h. doppelt so gross als die Geschwindigkeit in der ungestörten Strömung. Eine Anzahl Stromlinien kann man auf Grund des für Ψ aufgestellten Ausdruckes leicht verzeichnen; man erhält so die Abbildung 61 (s. S. 410), die ich dem Buche von Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895 entnehme.

Professor Hele-Shaw in Liverpool hat bei einer Reihe schöner Versuche, über die er in den letzten Jahrgängen des Engineering berichtete,*) auch eine Prüfung dieser Theorie vorgenommen. Zwei parallele Glasplatten schlossen eine dünne Wasserschicht zwischen sich ein und das Hinderniss, um das die Strömung herumfliessen musste, war zwischen die Glasplatten gebracht. Auf der einen Rechteckseite erfolgte der Wasserzufluss, auf der gegenüberliegenden der Wasserabfluss und die beiden anderen waren verschlossen. Auf der Zuflussseite wurde durch feine Oeffnungen, die in gleichen Abständen vertheilt waren, eine Farblösung in den Flüssigkeitsstrom eingeführt. Dadurch zeichneten sich die zugehörigen Stromlinien

*) Einen Auszug davon findet man in der Zeitschrift d. Ver. D. Ing. 1898, S. 1387.