Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Kugelförmiger Hohlraum im Eisen

§ 42. Zusammenhang des vorhergehenden Problems mit einem Probleme aus der Lehre vom Magnetismus.

Sehr häufig lässt sich eine Erkenntniss, die auf einem Gebiete der theoretischen Physik gewonnen wurde, mit grossem Vortheile und ohne grosse Mühe auch in anderen Gebieten nutzbar machen. Da der Ingenieur neuerdings auch in der Lehre vom Magnetismus bewandert sein muss, möchte ich, ohne desshalb freilich ausführlicher auf den Gegenstand einzugehen, darauf hinweisen, welcher Gebrauch von den vorausgehenden Untersuchungen auf diesem Gebiete gemacht werden kann.

Ich schicke voraus, dass ein magnetisches Feld durch eine gerichtete Grösse $\mathfrak{B}$, die magnetische Induction, an jeder Stelle gekennzeichnet werden kann. Zieht man Linien, die der Richtung von $\mathfrak{B}$ überall folgen, so heissen diese Inductionslinien (öfters, obschon mit Unrecht, „Kraftlinien" genannt). Das magnetische Feld kann unter dem Bilde einer strömenden Flüssigkeit dargestellt werden, so dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ überall ein Maass für die Grösse von $\mathfrak{B}$ bildet und in der Richtung damit übereinstimmt. Man weiss ferner, dass der Inductionsfluss, der in ein Raumelement eintritt, stets ebensogross ist, als der davon austretende, dass also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der die Induction abbildenden Strömung der Continuitätsbedingung genügt und dass ferner in „magnetisch weichen" Körpern, die von elektrischen Strömen frei sind, das Feld wirbelfrei ist. Das Problem, den Inductionsfluss in einem solchen Falle zu ermitteln, fällt daher in den wesentlichen geometrischen Bedingungen mit einem hydrodynamischen Probleme zusammen.

Man stelle sich nun ein homogenes magnetisches Feld ($\mathfrak{B}$ bezw. $\mathfrak{v}$ der Grösse und Richtung nach constant) in einer weichen Eisenmasse vor und nehme an, dass in dieser ein kleiner kugelförmiger Hohlraum angebracht sei. Einige Inductionslinien gehen zwar immer noch durch den mit Luft gefüllten Hohlraum. Wegen der viel grösseren magnetischen

„Permeabilität" des Eisens ist dies aber nur ein ganz geringer Bruchtheil und der Inductionsfluss erfolgt daher fast genau so, als wenn der Luftraum für ihn undurchdringlich wäre. Damit haben wir aber im Wesentlichen denselben Fall, wie den der Strömung der Flüssigkeit um eine Kugel im vorhergehenden Paragraphen und wir können daher das, was wir dort fanden, ohne Weiteres benutzen. Es zeigt sich also z. B., dass $\mathfrak{B}$ seinen grössten Werth in dem durch die Kugel gestörten Felde am Aequator der Kugel annimmt und dass $\mathfrak{B}$ dort $1^1/_2$mal so gross ist, als im ungestörten Felde.

Man kann übrigens durch eine kleine Aenderung der früheren Lösung sofort auch dem Umstande Rechnung tragen, dass ein kleiner Theil des Inductionsflusses doch noch durch den kugelförmigen Hohlraum geht. Dazu ist nur nöthig, dem früheren Geschwindigkeitspotentiale

$$\Phi = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right)$$

noch ein Glied bz beizufügen, womit es übergeht in

$$\Phi' = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right) + bz,$$

zunächst gültig für den Aussenraum.

Von den Geschwindigkeitscomponenten wird damit nur v_3 um den constanten Summanden b vermehrt. Die Erfüllung der Continuitätsbedingung wird dadurch nicht gestört; im ungestörten Felde ist die Stromgeschwindigkeit jetzt gleich $a + b$, im Luftraume der Kugel ist sie überall gleich b zu setzen und parallel zur Z-Axe. Wie gross man b zu wählen hat, wenn die magnetische Permeabilität des Eisens $= \mu$ und die der Luft $= 1$ gesetzt wird, geht ebenfalls aus einer einfachen Betrachtung hervor. Am Aequator der Kugel muss sich nämlich der Inductionsfluss im Eisenraume zum Inductionsflusse im angrenzenden Luftraume verhalten wie $\mu : 1$. Ausserhalb der Kugel wird aber, wie aus den Untersuchungen des vorausgehenden Paragraphen folgt, die Geschwindigkeit am Aequator jetzt gleich $\frac{3a}{2} + b$; man hat daher

$$\frac{3a}{2} + b = \mu b \quad \text{und hieraus} \quad b = \frac{3a}{2(\mu - 1)} = \frac{3(a+b)}{2\mu + 1}.$$

Eng verwandt hiermit ist auch die folgende Aufgabe. Eine Kugel aus weichem Eisen von der Permeabilität μ ist in einem von Luft erfüllten homogenen magnetischen Felde (etwa im magnetischen Felde der Erde) aufgestellt. Man soll ermitteln, wie sich der Inductionsfluss in der Kugel zu dem ungestörten Felde im Luftraume verhält. Wir bilden zu diesem Zwecke das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi'' = bz - az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right),$$

das bei passender Wahl von a und b allen Anforderungen der Aufgabe entspricht. Im ungestörten Felde ($r = \infty$) wird der Vektor des Feldes gleich $b - a$; in der Eisenkugel ist er gleich b und am Aequator der Kugel wird er im Luftraume gleich $b - \frac{3a}{2}$. Dieselbe Ueberlegung wie vorher liefert die Bedingung

$$b = \mu\left(b - \frac{3a}{2}\right) \quad \text{oder} \quad b = \frac{3\mu(b-a)}{\mu + 2}.$$

Setzt man die Permeabilität des Eisens gleich unendlich, so erhält man

$$b = 3(b - a),$$

d. h. der Inductionsfluss wird in diesem Falle in der Eisenkugel dreimal so gross als im ungestörten Felde des Luftraums — ein sehr bekanntes und oft benutztes Resultat der Theorie des Magnetismus. Natürlich lassen sich in ähnlicher Weise auch andere Lösungen hydrodynamischer Probleme für die Lehre vom Magnetismus verwerthen, namentlich jene, auf die schon am Schlusse des vorigen Paragraphen hingewiesen wurde.

§ 43. Die zweidimensionalen Probleme.

Eine erhebliche Vereinfachung wird herbeigeführt, wenn man voraussetzen kann, dass die Strömung der Flüssigkeit eine ebene ist, d. h. so, dass überhaupt keine Geschwindigkeits-