Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Wasserwirbel in der Umgangssprache

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

schwindigkeit an der betreffenden Stelle mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ soll das innere Produkt genommen und dann soll die Summe dieser Produkte für alle Linienelemente der geschlossenen Linie gebildet werden. Diese Summe heisst das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs des durch die beliebig gewählte geschlossene Linie dargestellten Integrationsweges. Wenn das Linienintegral stets gleich Null wird, wie man auch den Integrationsweg innerhalb des Bezirks, den wir zu diesem Zwecke willkürlich abgegrenzt hatten, wählen möge, wird die Bewegung innerhalb des Bezirks als wirbelfrei bezeichnet. Trifft dasselbe Kennzeichen auch noch zu für jeden Bezirk, den man abgrenzen mag und auch für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum, so ist die Bewegung überall wirbelfrei. In Form der Gleichung

$$\int_0^0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0, \tag{215}$$

die sich auf einen beliebigen, vom Anfangspunkte O ausgehenden und nach diesem wieder zurückführenden Integrationsweg bezieht, lässt sich demnach die Bedingung, der die wirbelfreie Bewegung genügen muss, in einfachster Weise aussprechen.

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als eine „wirbelfreie“ bezeichnet, ergiebt sich aus einer einfachen Betrachtung. In der Umgangssprache bezeichnet man als „Wasserwirbel“ eine Bewegungsform, bei der die einzelnen Wassertheilchen in sich zurücklaufende Bahnen beschreiben. Allgemein bekannt ist die Erscheinung aus der Beobachtung der Strömung in Flussläufen, bei der sich namentlich in der Nähe von Bewegungshindernissen, etwa von Brückenpfeilern, leicht Wirbel ausbilden, die sich an den Bewegungen kleiner Körper, die von dem Wasser mitgeführt werden, leicht erkennen lassen. Es macht dabei auch nichts aus, wenn zu dieser wirbelnden Bewegung noch andere Bewegungscomponenten hinzutreten, die etwa den Wirbel flussabwärts führen. Beschränkt sich die Wasserbewegung auf die Bewegung längs geschlossener Bahnen und wählt man eine dieser Bahnen als den Integrationsweg für die Bildung des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$, so ist dieses jedenfalls positiv, da $\mathfrak{v}$ mit $d\mathfrak{s}$ überall gleichgerichtet ist. Die in Gl. (215) als Kennzeichen für die wirbelfreie Bewegung aufgestellte Bedingung ist daher im vorliegenden einfachsten Falle schon in bester Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche. Wir bemerkten aber schon, dass zu der wirbelnden Bewegung auch noch andere Bewegungscomponenten hinzutreten können, die zu den Wirbeln selbst nichts beitragen. Diesem Umstande trägt die vorher aufgestellte Definition Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermaassen als wirbelverdächtig zu betrachten. Zu einer in sich längs einer solchen Bahn zurücklaufenden Bewegung tragen nur jene Geschwindigkeitscomponenten etwas bei, die überall in die Bahnrichtung fallen und nur diese sind es auch in der That, die in dem inneren Produkte $\mathfrak{v}d\mathfrak{s}$ zur Geltung kommen. Hat also das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ einen von Null verschiedenen Werth, so zeigt dies wenigstens einen Ueberschuss der tangentialen Bewegungscomponenten in einem Umlaufssinne über die im entgegengesetzten Sinne an und man kann sagen, dass im Ganzen genommen die Wasserbewegung mit einem bestimmten Umlaufsinne längs des Integrationswegs übereinstimmt. — Freilich ist das durch Gl. (215) angegebene Kennzeichen mit dem Begriffe der Wirbelbewegung in der Umgangssprache, der keine strenge Abgrenzung besitzt, nicht geradezu identisch; es widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder als eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden. Bei der wissenschaftlichen Untersuchung einer allgemein bekannten und vom Volksmunde nach seiner Art schon beschriebenen Erscheinung ist man nur selten in der glücklichen Lage, wie hier, ohne Weiteres an den gewöhnlichen Sprachgebrauch anknüpfen zu können, nämlich ohne zuvor entweder eine vollständige Umwerthung der Worte oder eine Neubildung von Worten, die man dann meist fremden Sprachen entnimmt, vornehmen zu müssen.

Zur Vermeidung von Missverständnissen betrachte ich noch die Bewegung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig in sich geschlossenen Rohres. Die Bewegung kann in diesem Falle so erfolgen, dass etwa für jeden kugelförmigen Bezirk, den man im Innern der Flüssigkeit abgrenzen mag, Gl. (215) erfüllt ist. Für einen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise schliesst, ist sie aber natürlich nicht erfüllt. Der Grund für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, dass der Sitz des Wirbels in diesem Falle an den Flüssigkeitsgrenzen liegt. Im Ganzen genommen ist die Bewegung jedenfalls nicht wirbelfrei, wenn sie auch für jeden einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbelfrei sein kann.

Die allgemeinste Bewegung einer Flüssigkeit ist natürlich eine solche, mit der Wirbel verbunden sind; die wirbelfreie Bewegung stellt nur einen besonders einfachen Ausnahmefall dar. Ganz streng ist die Bedingung der Wirbelfreiheit bei einer wirklichen Wasserbewegung überhaupt niemals erfüllt. Die Bewegung kann sich aber der wirbelfreien unter gewissen Umständen sehr nähern und es ist daher von Interesse, die Gesetze dieser einfachsten Bewegungsart kennen zu lernen. In der That beziehen sich auch ihrem Umfange nach die meisten Untersuchungen der heutigen Hydrodynamik auf die wirbelfreie Bewegung. Dass eine solche Abgrenzung des Untersuchungsgebiets möglich und in sich einwandfrei ist, beruht übrigens auf einem von Lagrange aufgestellten Satze, zu dessen Beweis ich bald übergehen werde.

Vorher erinnere ich noch an die den vorausgehenden ganz ähnlichen Betrachtungen des ersten Abschnittes über die Kraftfelder. An die Stelle des Linienintegrals der Kraft ist hier nur das Linienintegral der Geschwindigkeit getreten, während sich sonst nichts geändert hat. Es ist daher nicht nöthig, die in § 3 durchgeführten Betrachtungen über das Potential hier nochmals zu wiederholen; wir können vielmehr die Schlüsse, zu denen wir damals gelangten, auf den jetzt vorliegenden Fall ohne Weiteres übertragen. Von diesen ist für uns namentlich von Wichtigkeit, dass sich im wirbelfreien Felde der Vektor des Feldes durch Differentiation aus einer richtungslosen Grösse ableiten lässt, die früher als das Potential des Kraftfeldes bezeichnet wurde. Auch bei der wirbelfreien Wasserbewegung muss sich aus denselben Gründen wie damals zu jedem Punkte des Raumes in einem gegebenen Augenblicke eine Grösse ohne Richtung angeben lassen, aus der die Geschwindigkeitscomponente nach irgend einer Richtung durch Differentiation nach dieser Richtung abgeleitet werden kann. Man bezeichnet diese Grösse, um die enge Verwandtschaft mit den früheren Betrachtungen über die Kraftfelder ausdrücklich hervorzuheben, als das Geschwindigkeitspotential, obschon die sprachliche Herkunft des Wortes Potential mit der Verwendung, die das Wort hier findet, kaum noch etwas zu thun hat. Das Geschwindigkeitspotential sei in der Folge stets mit Φ bezeichnet; ich setze dann

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{216}$$

Hier findet freilich eine Abweichung im Vorzeichen von den früheren Festsetzungen über das Potential der Kraftfelder (vgl. Gl. (12), S. 22) statt. Damals war es mir von Wichtigkeit, an dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten des Potentials festzuhalten, weil das Potential des Kraftfeldes nur bei dieser Vorzeichenfestsetzung mit der potentiellen Energie des Feldes gleichbedeutend werden kann. Beim Geschwindigkeitspotential fällt aber ein solcher bestimmender Grund weg und wir können uns daher das Vorzeichen von Φ von vornherein so gewählt denken, dass die Differentialquotienten, ohne dass ein Vorzeichenwechsel vorauszugehen brauchte, unmittelbar die Geschwindigkeitscomponenten angeben. In der That ist es allgemeiner Brauch, das Geschwindigkeitspotential mit der durch die Gl. (216) bereits zum Ausdrucke gebrachten Vorzeichenfestsetzung zu benutzen. Vielleicht wäre es ja besser, an der bei den Kraftfeldern getroffenen Wahl der Gleichmässigkeit wegen auch hier festzuhalten und ich war auch zuerst im Zweifel, ob ich dies nicht thun sollte. Da aber auf diese Wahl schliesslich ohnehin nicht