Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Aufgabe über ein Brückenmodell

Gleichungen (200) mit den anderen Bedingungen, auf die hier das Hauptgewicht zu legen ist, nicht vereinigen lassen.

Durch Verbindung der Gleichungen (199) und (201) erhält man

$$\pi = \mu = \lambda^3 = \tau^6.$$

Macht man etwa $\lambda = 9$ (das Modell in $\frac{1}{9}$ der Schiffsgrösse), so wird $\tau = 3$. Die Geschwindigkeit des Modells muss, um den Vorgang mechanisch ähnlich zu gestalten, demnach so bemessen werden, dass es entsprechende Wege im dritten Theile der Zeit zurücklegt, als das Schiff. Das Geschwindigkeitsverhältniss sei v; dann folgt aus den Dimensionen der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda},$$

also hier $v = 3$. Soll also das Schiff etwa 12 m in der Secunde zurücklegen, so muss die Geschwindigkeit des Modells 4 m sec^{-1} betragen. Misst man nun die Kraft, die man aufwenden muss, um das Modell mit der constanten Geschwindigkeit von 4 m sec^{-1} vorwärts zu bewegen oder, wie man auch sagen kann, den Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Modells, und bezeichnet sie oder ihn mit R, so ist der Schiffswiderstand bei der entsprechenden Geschwindigkeit gleich πR, also gleich $R\lambda^3$ oder in unserem Falle gleich 729 R. — Diese Methode, den Schiffswiderstand unter den Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit am Modell zu untersuchen, rührt von Froude her.

Schliesslich wähle ich noch ein Beispiel zur näheren Besprechung aus, das ich dem schon mehrfach erwähnten Werke von Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von Schepp, Bd. I, S. 330 entnehme. Dort heisst es:

„Man soll die Durchbiegung einer Brücke von 15 m Länge und 100 t Gewicht, wenn eine Maschine, die 20 t wiegt, mit der Geschwindigkeit von 64 km in der Stunde über sie fährt, durch Experimente feststellen, die an einem Modell der Brücke gemacht werden, das 1,5 m lang ist und 2,8 kg wiegt. Man finde das Gewicht des Modells der Maschine und nehme an, das Modell der Brücke sei so steif, dass die statische Durchbiegung in der Mitte

unter dem Modell der Maschine ein Zehntel derjenigen der Brücke unter der Maschine selbst beträgt und zeige, dass dann die Geschwindigkeit des Modells der Maschine etwa 5,6 m in der Secunde betragen muss.“

Das Beispiel ist insofern bemerkenswerth, als die Fassung der Aufgabe leicht zu einem Zweifel darüber Veranlassung geben kann, ob die Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit hier überhaupt noch genügend gewahrt sind. Strenge mechanische Aehnlichkeit besteht offenbar nicht und überdies gehen auch die Abweichungen davon weiter, als es die praktischen Rücksichten erfordern. Weder die speciellen Bedingungen (200) noch die damit nicht vereinbare Bedingung (201) sind hier erfüllt. Wäre das Modell der Brücke geometrisch ähnlich und aus dem gleichen Material hergestellt, so müsste das Modell ein Gewicht von 100 kg haben, da λ hier gleich 10 ist. Um dagegen genaue Uebereinstimmung hinsichtlich des elastischen Verhaltens und der Beanspruchung des Materials herzustellen, müsste die Bedingung (200) erfüllt sein, d. h. das specifische Gewicht des Materials müsste am Modell das 10-fache von dem an der Brücke betragen oder es müsste wenigstens in der früher besprochenen Weise durch eine Zusatzlast das Eigengewicht des Modells entsprechend erhöht werden, während es in dem Beispiele umgekehrt niedriger angenommen ist, als es bei blosser geometrischer Nachbildung in dem gleichen Materiale ausfiele. Auf eine Uebereinstimmung des Verhaltens in jeder Hinsicht ist daher in der Aufgabe stillschweigend von vornherein verzichtet

Das hindert jedoch nicht, dass man auch bei dieser unvollkommenen Annäherung an die strengen Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit aus dem Versuche am Modell erfahren kann, was man zu wissen wünscht, falls nur vorausgesetzt werden darf, dass das Material weder an der Brücke noch am Modell über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht wird, was von vornherein freilich keineswegs feststeht.

Da das Eigengewicht hier eine wesentliche Rolle spielt, muss auf jeden Fall die Bedingung (199) erfüllt sein. Mit

Rücksicht auf die Zahlenangaben der Aufgabe hat man daher

$$\pi = \mu = \frac{100\,000}{2{,}8}, \quad \lambda = 10, \quad \tau = \sqrt{10}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass das Gewicht des Modells der Maschine gleich

$$20000 \cdot \frac{2{,}8}{100\,000} = 0{,}56 \text{ kg}$$

sein muss. Für das Geschwindigkeitsverhältniss v hat man wie im vorigen Beispiele

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3{,}16.$$

Das Modell muss daher mit der Geschwindigkeit

$$\frac{64\,000 \text{ m}}{3{,}16 \cdot 3600 \text{ sec}} \quad \text{oder rund} \quad 5{,}6 \text{ m sec}^{-1}$$

über das Brückenmodell geführt werden, wie in der Aufgabe schon angegeben ist. — Bei Erfüllung der angegebenen Bedingungen hat man aber in der That für jede Stellung der Maschine und des Modells geometrisch ähnliche Durchbiegungslinien zu erwarten. Man thut gut, sich davon besonders zu überzeugen, indem man auf die Differentialgleichung (126) zurückgeht, die von einem schwingenden Stabe erfüllt sein muss. Diese Gleichung lautete

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

wobei zu beachten ist, dass μ darin eine andere Bedeutung hatte, als die ihm vorhin zugeschriebene. In dieser Form möge sich die Gleichung auf die Brücke beziehen; für das Modell gilt eine von der gleichen Form, nämlich

$$E_1 \Theta_1 \frac{\partial^4 y_1}{d x_1{}^4} = -\mu_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1{}^2}.$$

Zum Vergleiche zwischen $E\Theta$ und $E_1\Theta_1$ dient die Bemerkung der Aufgabe, dass der statische Biegungspfeil bei der Stellung der Last in der Brückenmitte oder Modellmitte im Längenverhältnisse λ gefunden wird. Nach Gl. (80) von Band III ist der Biegungspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48\,E\,\Theta} \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{P_1 l_1{}^3}{48\,E_1\,\Theta_1}$$

und hiernach

$$\frac{f}{f_1} = \lambda = \frac{\pi \lambda^3}{E\Theta : E_1 \Theta_1} \quad \text{oder} \quad \frac{E\Theta}{E_1 \Theta_1} = \pi \lambda^2.$$

Ferner ist das Verhältniss der auf die Längeneinheit entfallenden Massen

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \pi \frac{1 : l}{1 : l_1} = \frac{\pi}{\lambda},$$

wobei μ wieder in derselben Bedeutung wie in der Differentialgleichung gebraucht ist. Ausserdem ist $y = \lambda y_1$, $x = \lambda x_1$ und $t = \tau t_1$ zu setzen. Multiplicirt man die für das Modell geltende Differentialgleichung auf beiden Seiten mit der Constanten

$$\pi \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda^4} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau^2},$$

was wegen der hier erfüllten Beziehung $\tau^2 = \lambda$ auf dasselbe hinauskommt, so geht die Differentialgleichung in die für die Brücke geltende über. Durch die Differentialgleichung wird aber im Zusammenhange mit den Grenz- und Anfangsbedingungen der zeitliche und örtliche Verlauf der Stabschwingung vollständig beschrieben und da auch diese Bedingungen im Modell, so weit als erforderlich, genau nachgebildet sind, hat man in beiden Fällen, abgesehen von den verschiedenen Maassstäben, in denen die Zeit- und Längengrössen auszumessen sind, genau den gleichen Schwingungsvorgang zu erwarten.

Auch in anderen Fällen, bei denen Abweichungen von den strengen Bedingungen der geometrischen Aehnlichkeit unvermeidlich oder durch die Festsetzungen der Aufgabe vorgeschrieben sind, wird man stets am besten thun, sich durch unmittelbares Zurückgehen auf die Differentialgleichung des ganzen Vorgangs am einzelnen Objekt oder überhaupt auf die specielle mechanische Theorie dieses Vorgangs davon zu überzeugen, ob und inwiefern jene Abweichungen zulässig sind, ohne den Vergleich unmöglich zu machen. Auf diese Art kann man aus Differentialgleichungen eines mechanischen Problems auch dann noch leicht Nutzen ziehen, wenn die unmittelbare Lösung der durch die Differentialgleichung umschriebenen Aufgabe nicht möglich ist.