Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Gleichwerthigkeit mit den Gleichungen von Lagrange

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

ist. Die Integration des ersten Gliedes in diesem Ausdrucke nach der Zeit lässt sich ausführen. Sie liefert Null, weil δq_i an den Grenzen verschwindet. Daher geht die Gleichung über in

$$\int\limits_0^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) \right) \delta q_1 + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \right) \delta \dot{q}_n \right\} dt = 0.$$

Nun sind aber die δq ganz willkürlich und die Gleichung gilt für jede Wahl, die wir dafür treffen mögen. Wir können also z. B. alle δq mit Ausnahme von δq_i gleich Null setzen. Dann muss auch sein

$$\int\limits_0^{t_1} \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \cdot dt = 0.$$

und da auch δq_i selbst noch eine willkürliche Function der Zeit ist, kann die Gleichung nur dann für jede beliebige Wahl dieser Function gültig sein, wenn zu jeder Zeit der andere Faktor gleich Null ist. Damit kommen wir wieder auf die Lagrange'sche Gleichung (195). Wir haben uns hiermit überzeugt, dass das Hamilton'sche Princip und die Lagrange'schen Gleichungen im Grunde genommen dasselbe aussagen. Selbstverständlich müssen für die Gültigkeit des einen Satzes auch dieselben Bedingungen erfüllt sein, wie für die des anderen.

In der That macht es auch für die Behandlung einer Aufgabe kaum einen Unterschied, ob man von dem einen oder dem anderen Satze ausgeht. Auch wenn man vom Hamilton-schen Princip ausgehen will, muss man zunächst den Ausdruck für die lebendige Kraft und zugleich den für die potentielle Energie V aufstellen, worauf man durch die Ausführung der Variation an dem Integrale der Gl. (196) zu den Bewegungsgleichungen gelangt. Der Mathematiker schätzt an dem Hamilton'sche Princip die einfache und sich dem Gedächtnisse leicht einprägende Form der Gl. (196). Wer es als Hauptaufgabe der Mechanik betrachtet, Aufschluss über die in der Wirklichkeit vorkommenden Bewegungsvorgänge zu geben, wird auf diese Eleganz der Form freilich weniger Werth legen. Aehnlich ist es auch mit dem Princip der kleinsten Wirkung und mit dem Gauss'schen Princip des kleinsten Zwanges; es hätte keinen Zweck, wenn ich auf diese auch noch eingehen wollte.

Dagegen darf nicht verschwiegen werden, dass diese allgemeinen Sätze (von denen es jedoch eigentlich genügt, einen einzigen zu kennen) auf einem Gebiete in der That wichtige Dienste geleistet haben, die durch die anderen Methoden nicht oder wenigstens nicht gleich gut geleistet werden konnten. Maxwell hat nämlich die Induktion zwischen mehreren elektrischen Stromkreisen auf Sätze der Mechanik zurückgeführt und sie dadurch dem Verständnisse näher gebracht, indem er die elektrischen Leiter als mechanische Systeme von mehreren Freiheitsgraden und die magnetische Energie als die lebendige Kraft dieser Systeme auffasste. Die Gesetze der elektrodynamischen Induktion, das Faraday'sche Induktionsgesetz u. s. f. zeigen sich dann in der That in genauer Uebereinstimmung mit dem Verhalten, das man von einem in der angegebenen Art zusammengesetzten mechanischen Systeme zu erwarten hätte. Auch die Reibungen finden in dem elektrischen Systeme ihr Analogon in den Ohm'schen Widerständen u. s. f. Der Elektrotechniker wird sich für diese Betrachtungen interessiren und schon desshalb glaubte ich in diesem Buche über die Sätze von Lagrange und Hamilton nicht ohne Erwähnung hinweggehen zu dürfen, obschon natürlich wegen der genannten Anwendungen auf andere Bücher verwiesen werden muss. In meiner „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität" (Leipzig 1894) kann der Leser im ersten Capitel des 6. Abschnitts eine gedrängte und leicht verständliche Darstellung dieser Seite der Maxwell'schen Elektricitätslehre finden.

Natürlich lässt sich übrigens das Hamilton'sche Princip auch unmittelbar ohne Benutzung der Lagrange'schen Glei-