# Vorlesungen über technische Mechanik

**Föppl, August**

**Leipzig, 1901**

Schwingungen mit kleinem Ausschlage

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

graphen untersuchten einfacheren mit in sich fasst. Setzen wir $F(\varphi) = F(\varphi_0)$, so sprechen wir damit aus, dass der Regulator überhaupt nicht auf die Steuerung der Maschine einwirkt.

Aus der ersten Gleichung folgt dann das selbstverständliche Resultat, dass die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ constant bleiben muss und die zweite geht über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = n^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Diese Gleichung fällt aber in der That vollständig mit Gl. (178) zusammen, falls man sich in diese ebenfalls den Ausschlag $\varphi_0$ mit Hülfe von Gl. (182) eingeführt denkt. Wir finden hiermit bestätigt, dass die Hinzufügung des Hülsengewichtes $G$ (falls dessen Trägheit vernachlässigt wird) an dem Verlaufe der Schwingungen des von der Maschinensteuerung losgelösten Regulators nichts Wesentliches ändert; nur der Ausschlag $\varphi_0$ selbst wird dadurch geändert.

Allgemein lassen sich die Gl. (190) nicht integriren. Wir wollen uns daher weiterhin wieder auf die Untersuchung der Schwingungen mit kleinem Ausschlage beschränken. Wir setzen also wie früher

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon$$

u. s. f. und zugleich

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 + \eta,$$

worin auch $\eta$ als kleine Grösse aufgefasst werden soll. Dann gehen die Gl. (190) bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung über in

$$\varepsilon\left(\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right)_0 = \Theta\frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 2\eta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 n^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - \varepsilon\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 n^2 \sin^2\varphi_0.$$

Die mit dem Zeiger 0 versehenen Glieder sind Constanten, die als gegeben zu betrachten sind. Um die Gleichungen übersichtlicher anschreiben zu können, führen wir dafür drei neue Constanten $a$, $b$, $c$ ein, so dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} &= a\varepsilon \\ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= b\eta - c\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{191}$$

wird. Was jetzt unter $a\,b\,c$ zu verstehen ist, ergiebt sich aus dem Vergleiche mit den vorhergehenden Gleichungen. Setzt man $\varepsilon$ aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so geht diese über in

$$\frac{d^3\eta}{dt^3} = ab\eta - c\frac{d\eta}{dt}, \tag{192}$$

in der nur noch die eine Variable $\eta$ vorkommt und genau dieselbe Differentialgleichung muss auch von $\varepsilon$ erfüllt werden, wie man erkennt, wenn man $\eta$ aus den Gl. (191) eliminirt.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (192) kann aber sofort angegeben werden; sie ist von der Form

$$\eta = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + Ce^{\alpha_3 t} \tag{193}$$

in der die $ABC$ die von den Anfangsbedingungen abhängigen Integrationsconstanten sind, während die Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ so zu ermitteln sind, dass die Differentialgleichung erfüllt wird. Setzt man nämlich zunächst

$$\eta = Ae^{\alpha t}$$

in die Differentialgleichung ein, so erhält man nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren

$$\alpha^3 = ab - c\alpha \tag{194}$$

und die drei in Gl. (193) vorkommenden Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ müssen daher die drei Wurzeln dieser cubischen Gleichung sein.

Das Verhalten unseres Systems wird nun ganz von den Werthen dieser drei Wurzeln abhängen. Eine davon ist jedenfalls reell. Wenn sie zugleich positiv ist, enthält $\eta$ ein Glied, das mit der Zeit unbegrenzt wächst. Wir schliessen daraus, dass auch Schwingungen, die ursprünglich sehr klein waren, mit der Zeit gross werden und dass daher ein stabiler Gang der Maschine nicht möglich ist. Ueberhaupt erkennen wir als Bedingung für den stabilen Gang, dass Gl. (194) keine positive reelle Wurzel haben darf. Complexe

Wurzeln der Gleichung führen zu Produkten aus Exponential- und trigonometrischen Functionen und die Exponentialfaktoren dürfen ebenfalls nicht unbegrenzt wachsen.

Sehen wir nun zu, was für Wurzeln wir zu erwarten haben. Die Constante $a$ diente als Abkürzung für den Ausdruck

$$a = \frac{1}{\Theta} \cdot \left(\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right)_0.$$

Der Regulator wird mit dem Motor in der Art verbunden sein, dass das treibende Moment $M$ oder $F(\varphi)$ abnimmt, wenn der Ausschlag $\varphi$ wächst. Daher ist $a$ negativ; die beiden anderen Constanten $b$ und $c$ sind dagegen nach der Bedeutung, die ihnen zukommt, als positiv zu betrachten. Gl. (194) ist daher von der Form

$$x^3 + px + q = 0$$

in der $p$ und $q$ positiv sind. Eine solche Gleichung hat nur eine reelle Wurzel und diese ist negativ. Da das quadratische Glied in der Gleichung fehlt, ist die Summe der drei Wurzeln gleich Null und daraus folgt, dass die reellen Antheile der beiden complexen Wurzeln positiv sein müssen. Gl. (193) enthält daher periodische Glieder, die mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Wir finden also, dass die Bewegung instabil ist. Wenn keine Reibungen oder sonstige Bewegungswiderstände hinzukämen, könnte die mit dem Regulator versehene Maschine überhaupt nicht oder wenigstens nur mit ganz unzulässigen Schwankungen arbeiten.

Durch die Bewegungswiderstände, namentlich durch die Oelbremse, wird diesem Uebelstande abgeholfen. Die vollständige dynamische Theorie des Regulators muss daher nothwendig auf diese Umstände Rücksicht nehmen. Der durch die Oelbremse hervorgerufene Bewegungswiderstand ist der Geschwindigkeit der Hülse proportional; wenn $\varphi$ wächst, geht er in dem gleichen Sinne wie das Gewicht $G$ und man berücksichtigt ihn daher, indem man in der zweiten der Gl. (189) $G$ ersetzt durch