Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Pendelschwingungen relativ zu einem rotirenden Raume

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

d. h. dadurch mit einander gekuppelt, dass die von ihnen angetriebenen Dynamomaschinen in Parallelschaltung zu demselben Stromkreise gehören, wodurch der ganze Vorgang noch eine weitere Verwickelung erfährt. Man hat es dann mit Systemen von drei, vier oder noch mehr Freiheitsgraden zu thun. Die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung macht zwar auch in solchen Fällen keine erheblichen Schwierigkeiten. Um so schwieriger, wenn nicht unmöglich, ist aber deren Integration.

In den letzten Jahren hat man sich mit Schwingungserscheinungen der bezeichneten Art wieder mehrfach beschäftigt. Ich erwähne zunächst eine Abhandlung von Stodola in der Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1899, S. 506, die sich auf Maschinen bezieht, die mit sogenannten Flachreglern ausgerüstet sind. Ferner verweise ich auf eine Abhandlung von G. Kapp in der Elektrotechn. Zeitschr. 1899, S. 134 über „Das Pendeln parallel geschalteter Maschinen", in der die Schwingungen elektromagnetisch gekuppelter Maschinen behandelt werden.

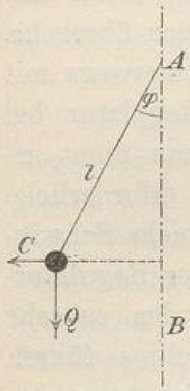

Abb. 58.

Näher auf diese Dinge einzugehen, verbietet hier der Raum; ich beschränke mich vielmehr auf einige allgemeine Erörterungen, aus denen hervorgeht, welche Hülfsmittel die Mechanik zur Lösung solcher Aufgaben unmittelbar zur Verfügung stellt.

Ich beginne mit einem ganz einfachen Falle. In Abb. 58 sei AB die Axe einer senkrechten Welle, an der mit Hülfe eines drehbaren Armes eine Kugel vom Gewichte Q aufgehängt ist. Die Kugel soll als materieller Punkt aufgefasst und die Stange als gewichtslos angesehen werden. Ausserdem soll die Masse der Kugel so gering sein, dass ihre lebendige Kraft ganz unbedeutend gegenüber der lebendigen Kraft eines Schwungrads ist, das in zwangläufiger Verbindung mit der Welle AB stehen möge. Wir brauchen dann auf die Aenderungen der Umlaufsgeschwindigkeit nicht zu achten, die nach dem Flächensatze eintreten müssen, wenn sich die Kugel von der Umdrehungsaxe entfernt oder sich ihr nähert, können vielmehr die Winkelgeschwindigkeit u der Welle AB als constant ansehen. Der Winkelgeschwindigkeit u entspricht ein Ausschlag φ_0 der Stange, bei dem die Kugel in relativem Gleichgewichte gegen die Welle ist. Der Zusammenhang zwischen u und φ_0 ist schon im ersten Bande untersucht. Jetzt wollen wir zusehen, was für Schwingungen der Arm um die Gleichgewichtslage φ_0 ausführt, wenn er von Anfang an nicht in die Richtung φ_0 fiel. Von Reibungen soll dabei abgesehen werden.

Man behandelt diese Aufgabe am einfachsten auf Grund der Sätze über die Relativbewegung. Relativ zu einem Raume, der sich mit der Welle umdreht, haben wir es nur mit einer pendelnden Bewegung um die Gleichgewichtslage φ_0 zu thun. Dabei müssen die beiden Ergänzungskräfte der Relativbewegung an der Kugelmasse angebracht werden. Die erste Ergänzungskraft ist hier einfach die Centrifugalkraft C. Die zweite steht senkrecht zu der durch die Wellenaxe und die Stange gelegten Ebene oder senkrecht zur Schwingungsebene. Sie bringt eine Verbiegung der Stange hervor, die aber erst bei hohen Umlaufszahlen merklich wird und dann zu den in § 28 behandelten Schwingungserscheinungen der „Hängespindeln" führt. Hier wollen wir dagegen voraussetzen, dass die Stangenverbiegung unmerklich sei. Die zweite Ergänzungskraft wird freilich mindestens zu Druckkräften im Gelenke der Stange und damit zu Reibungen im Gelenke führen, die schon von erheblicher Grösse werden können, lange bevor die Verbiegung der Stange in Betracht kommt. Diese Reibungen dämpfen die Schwingungen, die wir hier untersuchen wollen. Da wir aber alle Bewegungswiderstände an der Stange ausser Berücksichtigung lassen wollten, ist auch auf diese Reibung nicht zu achten. Dann kommt die zweite Ergänzungskraft für die Schwingungen überhaupt nicht in Betracht, sondern nur das Gewicht Q und die Centrifugalkraft C. Für C haben wir übrigens

$$C = \frac{Q}{g} u^2 l \sin \varphi.$$

Die Bewegungsgrösse der Kugel relativ zum rotirenden Raume ist gleich

$$\frac{Q}{g} l \frac{d\varphi}{dt}$$

und senkrecht zum Arme l gerichtet. Das Moment dieser Bewegungsgrösse in Bezug auf die Gelenkaxe hat den Werth

$$\frac{Q}{g} l^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

und nach dem Flächensatze ist die zeitliche Aenderung davon gleich dem statischen Momente der Kräfte Q und C. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{Q}{g} l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Cl \cos\varphi - Ql \sin\varphi$$

oder nach Einsetzen des Werthes von C und Division mit $\frac{Ql^2}{g}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u^2 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{g}{l} \sin\varphi. \qquad (178)$$

Das ist die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung. Ein erstes Integral davon kann sofort gefunden werden. Man multiplicire beiderseits mit $\frac{d\varphi}{dt}$ und beachte, dass dann alle Glieder vollständige Differentialquotienten nach t vorstellen. Die Integration liefert dann

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = K - \frac{u^2}{4} \cos 2\varphi + \frac{g}{l} \cos\varphi. \qquad (179)$$

Diese Gleichung hätte übrigens auch nach dem Satze von der lebendigen Kraft leicht gefunden werden können. Die Integrationsconstante K hängt natürlich von den Anfangsbedingungen ab und bedingt andererseits die Amplitude der Schwingungen. Auch der nochmaligen Integration von Gl. (179) steht an und für sich nichts im Wege. Durch Trennung der Variabeln erhält man

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2K - \frac{u^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} = dt.$$

Die Gleichung

$$t = K_1 + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2K - \frac{u^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} \tag{180}$$

giebt demnach den verlangten Zusammenhang zwischen φ und t an, wobei auch die neue Integrationsconstante K_1 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden kann. Das in Gl. (180) vorkommende Integral ist ein elliptisches und kann ohne Schwierigkeit auf die Normalformen reducirt werden. Immerhin erfordert dies aber umständliche Rechnungen, die man lieber umgeht. Wir wollen daher sehen, was wir auf andere Art über die Schwingungen herausbringen können.

Wir wollen zunächst nach den Grenzen fragen, zwischen denen sich die Schwingung abspielt. An den Grenzen des Ausschlags ist $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null und daher nach Gl. (179), wenn man den Cosinus des doppelten Winkels in dem des einfachen ausdrückt,

$$K - \frac{u^2}{4}(2\cos^2\varphi - 1) + \frac{g}{l}\cos\varphi = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade in Bezug auf $\cos\varphi$ und durch Auflösen erhält man

$$\cos\varphi = \frac{g}{u^2 l} \pm \sqrt{\frac{g^2}{u^4 l^2} + K_2}, \tag{181}$$

wobei zur Abkürzung die neue Constante K_2 an Stelle von K, nämlich

$$K_2 = \frac{2K}{u^2} + \frac{1}{2}$$

eingeführt ist. Die beiden Wurzeln geben die Cosinus der Ausschläge φ_1 und φ_2 an, zwischen denen die Schwingungen erfolgen. Wenn K_2 positiv ist, wird $\cos\varphi_1$ positiv und $\cos\varphi_2$ negativ, d. h. die Schwingung würde dann die Kugel über die durch das Gelenk A gelegte Horizontale hinaufführen. Ferner könnte auch φ_1 einen negativen Winkel bedeuten und zwar würde dieser Fall, wie man aus Gl. (179) erkennt, wenn man darin $\varphi = 0$ setzt, dann eintreten, wenn

$$K - \frac{u^2}{4} + \frac{g}{l} > 0$$

oder

$$K_2 > 1 - \frac{2g}{u^2 l}$$

wäre. Dies kann auch nicht überraschen, denn in der That ist ja die gewöhnliche Pendelbewegung in der hier untersuchten als specieller Fall mit enthalten; man braucht in den Gl. (178) bis (180) nur $u = 0$ zu setzen, um sie in die Gleichungen für die einfache Pendelbewegung übergehen zu lassen. Um diese Fälle wollen wir uns aber jetzt nicht kümmern, da uns nur jene Schwingungen von Interesse sind, bei denen φ stets positiv und ein spitzer Winkel bleibt. Die Constante K_2 muss dann jedenfalls einen negativen Werth haben.

Auch $\varphi = \varphi_0$ bildet eine Lösung der Differentialgleichung (178), nämlich jene Lösung, die dem Gleichgewichte der Stange in der Lage φ_0 entspricht. Für diese (übrigens schon früher auf anderem Wege gefundene) Lage erhalten wir nach Gl. (178)

$$\cos \varphi_0 = \frac{g}{u^2 l}. \tag{182}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in Gl. (181) finden wir für die beiden Grenzlagen, zwischen denen die Schwingung erfolgt,

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \cos \varphi_0 + \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + K_2} \\ \cos \varphi_2 &= \cos \varphi_0 - \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + K_2} \end{aligned}\right\}. \tag{183}$$

Aus beiden folgt zugleich

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \varphi_0. \tag{184}$$

Multipliciren wir hier beiderseits mit l, so erkennen wir, dass die Kugel sich während der Schwingung um dieselbe Höhe gegen die Gleichgewichtslage senkt, als sie sich bei dem Ausschlage nach der anderen Seite hin über sie erhebt. Wenn die eine Grenzlage bekannt ist, kann hiernach die andere sofort angegeben werden. Ausserdem kann auch der Werth der Constanten K_2 nach den Gl. (183) sofort gefunden werden, wenn die Grenzlagen, zwischen denen die Schwingung erfolgt, gegeben sind.

Schon bei der einfachen Pendelbewegung gestaltete sich die Rechnung erheblich einfacher, wenn man sich auf die Untersuchung der Schwingungen mit kleinen Ausschlägen beschränkte. Das soll jetzt auch hier geschehen. Ich setze also

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon,$$

wobei nun ε ein kleiner veränderlicher Winkel ist, der zwischen dem negativen Werthe ε_1 und dem positiven Werthe ε_2 hin und herschwankt. Wegen dieser Kleinheit der Ausschläge lassen sich $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ in sehr schnell convergirende Reihen entwickeln, von denen es genügt, die Glieder erster Ordnung beizubehalten, obschon es freisteht, die Entwickelung auch noch auf Glieder höherer Ordnung zu erstrecken. Ich setze also in Gl. (178)

$$\sin\varepsilon = \varepsilon \quad \text{und} \quad \cos\varepsilon = 1$$

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + \varepsilon) = \sin\varphi_0 + \varepsilon\cos\varphi_0$$

und

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_0 + \varepsilon) = \cos\varphi_0 - \varepsilon\sin\varphi_0.$$

Hierdurch geht Gl. (178) über in

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{u^2}{2}(\sin 2\varphi_0 + 2\varepsilon\cos 2\varphi_0) - \frac{g}{l}(\sin\varphi_0 + \varepsilon\cos\varphi_0).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (182) vereinfacht sich dies zu

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(u^2\cos 2\varphi_0 - \frac{g}{l}\cos\varphi_0\right) = -\varepsilon u^2\sin^2\varphi_0. \quad (185)$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung. Der einzige Unterschied gegenüber Gl. (16) besteht nur darin, dass dort die Veränderliche x eine Wegstrecke, hier aber die Veränderliche ε einen Winkelweg bedeutet. An der Lösung der Differentialgleichung kann dies aber nichts ändern und wir können daher die in § 4 gefundenen Resultate ohne Weiteres auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Wir erkennen namentlich, dass die kleinen Schwingungen auch hier isochron sind und erhalten die Dauer T einer vollen Schwingung aus Gl. (20), wenn wir darin

$$\text{an Stelle von } \frac{m}{c} \text{ hier } \frac{1}{u^2 \sin^2 \varphi_0}$$

schreiben, womit diese Gleichung in

$$T = \frac{2\pi}{u \sin \varphi_0} \tag{186}$$

übergeht. Dabei kann noch φ_0 aus Gl. (182) eingesetzt werden, so dass man auch

$$T = \frac{2\pi u l}{\sqrt{u^4 l^2 - g^2}} \tag{187}$$

erhält. Wenn u sehr gross wird, wird die Schwingungsdauer sehr klein. Dabei ist wohl zu beachten, dass u mindestens so gross sein muss, dass der Wurzelwerth reell ist, denn im anderen Falle wäre Gl. (182) nicht anwendbar und auch sonst wäre die vorausgehende Entwickelung zu ändern, da schon Gl. (185) auf der Anwendbarkeit der Gl. (182) beruhte.

Hiermit ist der einfache Fall, den wir zunächst untersuchen wollten, so weit erledigt, dass gegen die unmittelbare praktische Verwendung der erhaltenen Resultate keinerlei Bedenken mehr vorliegt. Auch den Einfluss von Bewegungswiderständen, die bisher vernachlässigt wurden, kann man nachträglich leicht berücksichtigen, indem man sich der früher für die gedämpften harmonischen Schwingungen abgeleiteten Resultate erinnert, die ebenfalls ohne Weiteres auf die hier untersuchten Schwingungen übertragen werden können.

Bei den Schwingungen des Centrifugalregulators ist aber der Sachverhalt erheblich verwickelter. Dass dort zwei Schwungkugeln vorkommen, während wir hier nur eine betrachteten und dass beide noch durch ein Gegengewicht oder durch das Gewicht der „Regulatorhülse“ nach abwärts gezogen werden, macht freilich nicht viel aus. Man könnte, wenn sich sonst nichts änderte, die vorige Betrachtung mit geringer Mühe auf diesen Fall übertragen und würde dabei zu ganz ähnlichen