Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Bedingung für das Nichtanschlagen des Klöppels

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

dass die Masse des Klöppels gegenüber der Glockenmasse zu vernachlässigen ist, so wird dies in den Gleichungen dadurch ausgedrückt, dass man Q_1 und Θ_1 gleich Null setzt. Die zweite Gleichung hebt sich dann vollständig weg und die erste geht über in

$$-\sin\varphi \cdot Qs = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

d. h. in die Gleichung des gewöhnlichen Pendels, was ja auch von vornherein zu erwarten war. Betrachtet man die Lösung dieser Gleichung als genau genug auch dann, wenn Q_1 und Θ_1 zwar klein, aber nicht gleich Null sind, so lässt sich die zweite der Gl. (176) benutzen, um nachher auch noch ψ zu bestimmen, wenn man φ als bekannte Function der Zeit einsetzt.

Vor allen anderen aber ist die Frage von Interesse, unter welchen Umständen es kommen kann, dass der Klöppel gar nicht an die Glocke anschlägt. Diese Frage ist nicht willkürlich aufgeworfen worden, sondern man ist auf die Möglichkeit, dass die Glocke nicht läutet, obschon sie in Pendelschwingungen versetzt wird, erst durch die Erfahrung gekommen, die man mit der Kölner Kaiserglocke gemacht hat. Hierdurch ist das Problem von „Glocke und Klöppel" zu einer gewissen Berühmtheit gelangt und ein Lehrbuch der Mechanik, das sich überhaupt mit solchen Fragen beschäftigt, kann nicht gut über dieses Beispiel hinweggehen.

Das Anschlagen des Klöppels an die Glocke hängt von der Relativbewegung zwischen beiden Körpern ab; der Klöppel schlägt an, wenn der Winkel $\psi - \varphi$ einen gewissen positiven oder negativen Werth erlangt hat. Es kann aber sein, dass $\psi - \varphi$ diesen Werth nach den Gl. (176) mit Rücksicht auf die gegebenen Anfangsbedingungen überhaupt nicht erreicht. So könnte $\psi - \varphi$ stets einen constanten Werth γ behalten, der kleiner ist, als jener, bei dem sich Glocke und Klöppel berühren. Wir wollen untersuchen, ob und wann dies eintrifft. Mit

$$\psi = \gamma + \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

gehen die Gl. (176) über in

$$
\begin{aligned}
-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right) \\
&\quad - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma \\
-\sin(\gamma+\varphi)\,Q_1 s_1 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right) \\
&\quad + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma .
\end{aligned}
$$

Nur dann, wenn diese beiden Gleichungen durch passende Wahl der Constanten identisch mit einander werden, kann sich das System wie ein starrer Körper bewegen. Wir sehen, dass dazu jedenfalls $\gamma = 0$ sein muss; also nur wenn der Klöppel in die Glockenaxe fällt, können beide miteinander schwingen, ohne sich gegeneinander zu drehen. Von den anderen Fällen, dass etwa s_1 oder l oder Q_1 verschwinden, sehen wir nämlich ab, weil dadurch das Problem thatsächlich in ein anderes übergeführt würde. — Mit $\gamma = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$
\begin{aligned}
-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right) \\
-\sin\varphi \cdot Q_1 s_1 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right)
\end{aligned}
$$

und identisch werden beide, wenn zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung

$$
\frac{\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Qs + Q_1 l} = \frac{\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Q_1 s_1} \qquad (177)
$$

erfüllt ist. Man kann daher zu jeder gegebenen Glocke immer auf sehr verschiedene Arten einen Klöppel construiren, der nicht anschlägt. Zwischen dem Gewichte Q_1, dem Trägheitsmomente für den Schwerpunkt Θ_1 und dem Schwerpunktsabstande s_1, also zwischen den drei Grössen, die sich auf den zu construirenden Klöppel beziehen, braucht nämlich nur die einzige Bedingungsgleichung (177) erfüllt zu sein, so dass man zwei der Grössen noch willkürlich wählen kann.

Betrachtet man den Klöppel als einen materiellen Punkt von geringem Gewichte, der durch eine gewichtslose Stange an der Glocke aufgehängt ist, so kann man in Gl. (177) $\Theta_1 = 0$ setzen und Q_1 gegenüber Q vernachlässigen. Gl. (177) geht dann über in

$$\frac{\Theta}{Qs} = \frac{s_1 + l}{g}$$

oder, wenn man die reducirte Pendellänge l_{red} der Glocke

$$l_{\text{red}} = \frac{\Theta}{\frac{Q}{g} \cdot s}$$

einführt, einfacher

$$l_{\text{red}} = s_1 + l,$$

d. h. der als materieller Punkt aufgefasste Klöppel muss mit dem Schwingungsmittelpunkte der Glocke zusammenfallen. — Im Uebrigen sind aber die zuletzt eingeführten Vernachlässigungen gar nicht nöthig, da man auch mit der genauen Gl. (177) ohne Schwierigkeit rechnen kann.

Wenn Gl. (177) erfüllt ist, kann die jetzt untersuchte Bewegungsform eintreten. Sie muss aber nicht eintreten dies hängt vielmehr von den Anfangsbedingungen ab. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass der Klöppel auch bei einer Glocke, für die Gl. (177) erfüllt ist, anschlägt; es wird aber leicht ein Versagen vorkommen und daher muss eine solche Anordnung jedenfalls vermieden werden.

Bis jetzt ist nur der Fall besprochen worden, dass ψ dauernd gleich φ bleibt. Ein Versagen der Glocke tritt aber auch schon dann ein, wenn $\psi - \varphi$ nicht dauernd gleich Null ist, sondern nur innerhalb enger Grenzen schwankt. Die Bedingung hierfür lässt sich nicht näher angeben, da man die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Systems nicht zu integriren vermag. Es lässt sich aber voraussehen, dass dieser Fall um so eher eintreten wird, je näher Gl. (177) erfüllt ist. Man thut daher gut, die in Gl. (177) vorkommenden Constanten so zu wählen, dass sich die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Verhältnisse ziemlich erheblich von einander unterscheiden.