



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Andere Methoden zur Ableitung der Bewegungsgleichungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

und nach Einsetzen gehen sie über in

$$\left. \begin{aligned} -\sin \varphi (Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \left(\Theta + \frac{Q_1}{g} l^2 \right) \\ &+ \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{Q_1}{g} l s_1 \cos (\psi - \varphi) - \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{Q_1}{g} l s_1 \sin (\psi - \varphi) \\ -\sin \psi \cdot Q_1 s_1 &= \frac{d^2 \psi}{dt^2} \left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g} s_1^2 \right) \\ &+ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \frac{Q_1}{g} l s_1 \cos (\psi - \varphi) + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{Q_1}{g} l s_1 \sin (\psi - \varphi) \end{aligned} \right\} (176)$$

Hiermit ist das durch die Anwendung der Gleichungen von Lagrange angestrebte Ziel erreicht; wir sind jetzt im Besitze der Differentialgleichungen, durch die die Abhängigkeit der Variablen φ und ψ von der Zeit beschrieben wird. Freilich sind wir damit noch nicht zur genauen Kenntniss des Bewegungsvorgangs gelangt; dazu müsste man die Gleichungen zuvor integrieren können. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von mehreren Freiheitsgraden sind nun freilich gewöhnlich, wie auch im hier vorliegenden Falle, so verwickelt, dass man sie nicht allgemein zu integrieren vermag. Das hindert jedoch nicht, dass man über manche Fragen, die von besonderem Interesse sind, Aufschluss aus den Differentialgleichungen zu erhalten vermag, ohne dass diese zuvor integriert zu werden brauchten.

Ehe ich hierauf näher eingehe, möchte ich noch darauf hinweisen, wie die Bewegungsgleichungen des Systems aufzustellen sind, wenn man die Gleichungen von Lagrange und die ihnen verwandten Sätze nicht benutzen will. Hierzu steht zunächst der Satz von der lebendigen Kraft zur Verfügung. Man addire zu dem in Gl. (175) aufgestellten Werthe von L die potentielle Energie V , die dadurch zu Stande kommt, dass die Schwerpunkte S und S_1 über ihrer tiefsten Lage liegen. Man hat dafür

$$V = Qs (1 - \cos \varphi) + Q_1 l (1 - \cos \varphi) + Q_1 s_1 (1 - \cos \psi).$$

Die Gleichung $L + V = \text{Const.}$ giebt sofort eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und ψ ; sie bildet, wie

man sagen kann, ein erstes Integral der Gl. (176). Eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ kann man etwa aus dem Flächensatze erhalten. Man berechne den Drall des Systems für die Axe α . Der Drall wird, wie man leicht findet,

$$B = \frac{d\varphi}{dt} \left(\Theta + \frac{Q_1}{g} l^2 + \frac{Q_1}{g} l s_1 \cos(\psi - \varphi) \right) \\ + \frac{d\psi}{dt} \left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g} s_1^2 + \frac{Q_1}{g} s_1 l \cos(\psi - \varphi) \right).$$

Das statische Moment der äusseren Kräfte, d. h. der beiden Gewichte für die Axe α lässt sich ebenfalls sofort angeben; es ist nebenbei bemerkt, gleich $F_\varphi + F_\psi$. Nach dem Flächensatze ist nun $\frac{dB}{dt}$ gleich diesem Momente. Dies liefert eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ und zwar jene Gleichung, die durch Addition der Gl. (176) zu einander entsteht.

Ein anderes Verfahren zur Ableitung der Bewegungsgleichungen besteht in der unmittelbaren Anwendung des Principis von d'Alembert. Man bringt an jedem Massentheilchen die Trägheitskräfte an, die sich in den Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken lassen und schreibt an, dass beide Körper A und B im Gleichgewichte sein müssen, womit man sofort die Bewegungsgleichungen erhält.

Diese Vergleiche zeigen, dass die Gleichungen von Lagrange in der That für jenen vollständig entbehrlich sind, der die in den ersten beiden Abschnitten dieses Bandes behandelten Lehren beherrscht. Freilich lässt sich aber andererseits auch nicht verkennen, dass die Anwendung der Methode von Lagrange zwar einige Ansprüche an die Rechengewandtheit stellt, dass sie aber ein schärferes Nachdenken, das sich bei den anderen Wegen nöthig macht, nicht verlangt. Insofern und in Bezug auf die allgemeine Anwendbarkeit des gleichen Verfahrens in den verschiedensten Fällen ist sie den früher entwickelten und von mir im allgemeinen bevorzugten Verfahren ohne Zweifel überlegen.

Ich gehe jetzt zu den Schlüssen über, die sich aus den Differentialgleichungen (176) ziehen lassen. Nimmt man an,

dass die Masse des Klöppels gegenüber der Glockenmasse zu vernachlässigen ist, so wird dies in den Gleichungen dadurch ausgedrückt, dass man Q_1 und Θ_1 gleich Null setzt. Die zweite Gleichung hebt sich dann vollständig weg und die erste geht über in

$$-\sin \varphi \cdot Q_s = \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

d. h. in die Gleichung des gewöhnlichen Pendels, was ja auch von vornherein zu erwarten war. Betrachtet man die Lösung dieser Gleichung als genau genug auch dann, wenn Q_1 und Θ_1 zwar klein, aber nicht gleich Null sind, so lässt sich die zweite der Gl. (176) benutzen, um nachher auch noch ψ zu bestimmen, wenn man φ als bekannte Function der Zeit einsetzt.

Vor allen anderen aber ist die Frage von Interesse, unter welchen Umständen es kommen kann, dass der Klöppel gar nicht an die Glocke anschlägt. Diese Frage ist nicht willkürlich aufgeworfen worden, sondern man ist auf die Möglichkeit, dass die Glocke nicht läutet, obschon sie in Pendelschwingungen versetzt wird, erst durch die Erfahrung gekommen, die man mit der Kölner Kaiserglocke gemacht hat. Hierdurch ist das Problem von „Glocke und Klöppel“ zu einer gewissen Berühmtheit gelangt und ein Lehrbuch der Mechanik, das sich überhaupt mit solchen Fragen beschäftigt, kann nicht gut über dieses Beispiel hinweggehen.

Das Anschlagen des Klöppels an die Glocke hängt von der Relativbewegung zwischen beiden Körpern ab; der Klöppel schlägt an, wenn der Winkel $\psi - \varphi$ einen gewissen positiven oder negativen Werth erlangt hat. Es kann aber sein, dass $\psi - \varphi$ diesen Werth nach den Gl. (176) mit Rücksicht auf die gegebenen Anfangsbedingungen überhaupt nicht erreicht. So könnte $\psi - \varphi$ stets einen constanten Werth γ behalten, der kleiner ist, als jener, bei dem sich Glocke und Klöppel berühren. Wir wollen untersuchen, ob und wann dies eintritt. Mit

$$\psi = \gamma + \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

gehen die Gl. (176) über in