Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Besprechung der Voraussetzungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \Sigma m \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right),$$

also in der That den ersten der beiden Summenausdrücke in Gl. (173). Ebenso wird

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \Sigma m \mathfrak{v} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial q_i} = \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt}\right) = \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right),$$

denn die Reihenfolge der Differentiationen von $\mathfrak{r}$ nach t und nach q_i kann vertauscht werden, da ja in der That bei direkter Ausführung der Differentiation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_n,$$

also derselbe Werth wie bei Differentiation von $\mathfrak{v}$ nach q_i (vgl. Gl. (170)) gefunden wird. Setzt man diese Werthe ein, so geht Gl. (173) über in

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{174}$$

Das ist eine der Lagrange'schen Gleichungen und für jeden anderen Freiheitsgrad oder für jede andere Coordinate q lässt sich eine nach demselben Muster anschreiben. Man erhält, wenn dies geschieht, ebenso viele Differentialgleichungen zwischen den Coordinaten q (und ihren Differentialquotienten) als Freiheitsgrade vorhanden sind, d. h. ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Die Integration dieser Differentialgleichungen ist nachher eine Aufgabe für sich, die mit der Lagrange'schen Methode nichts zu thun hat, sondern ebenso erfolgen muss, als wenn man die Differentialgleichungen der Bewegung nach den gewöhnlichen Methoden abgeleitet hätte.

Ehe ich dazu übergehe, die Benutzung der Gleichungen zur Lösung von Aufgaben auseinander zu setzen, möchte ich noch auf die Voraussetzungen aufmerksam machen, auf denen die Ableitung beruht und die bisher noch nicht hinreichend betont wurden. Vor allem müssen die Körper wirklich als starr betrachtet werden dürfen, so nämlich, dass die etwa in ihnen aufgespeicherte Formänderungsarbeit gegen die lebendige Kraft oder vielmehr die Aenderung, die die Formänderungsarbeit etwa erfährt, gegenüber der Aenderung der lebendigen Kraft oder gegenüber der Arbeit der äusseren Kräfte vollständig vernachlässigt werden kann. Ferner ist auch die Arbeit der inneren Kräfte, die zwischen verschiedenen Körpern des Systems auftreten, überall gleich Null gesetzt. Das ist aber nur dann streng richtig, wenn zunächst keine Fernkräfte zwischen den einzelnen Gliedern auftreten und wenn ferner auch keine Reibungswiderstände zu berücksichtigen sind. Hätte man Reibungen in den Führungen oder Gelenken, so müsste natürlich ein Theil der Arbeit $F_i \delta q_i$ bei der virtuellen Verschiebung δq_i auf die Ueberwindung der Reibungen verwendet werden. Man kann sich aber in solchen Fällen damit helfen, dass man etwaige Fernkräfte (z. B. Abstossungen zwischen Magneten, wenn solche im Systeme vorkommen) nicht zu den inneren Kräften rechnet, sondern sie so behandelt, als wenn sie von aussen her angebracht wären, sie also in die F mit einrechnet. Dasselbe gilt auch von den Reibungen.

§ 33. Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben.

Das Verfahren bei der Benutzung dieser Gleichungen gleicht, wie ich schon vorher bemerkte, vollständig dem aus der Festigkeitslehre von der Castigliano'schen Methode her bekannten. Wie dort zuerst für die Formänderungsarbeit, stellt man hier vor Allem einen Ausdruck für die lebendige Kraft in den gewählten allgemeinen Coordinaten auf. Dann bildet man die in Gl. (174) vorgeschriebenen Differentialquotienten und setzt ihre Differenz gleich dem aus den Bedingungen der Aufgabe bekannten Werthe von F.

Es wird am besten sein, wenn ich dieses Verfahren zunächst an einem möglichst einfach gewählten Beispiele vorführe, für das wir die Lösung schon früher auf einfacherem Wege gefunden haben. Ich wähle dazu das physische Pendel, also einen zwangläufigen Mechanismus. Die die augenblickliche Stellung des Systems beschreibende Coordinate sei der