Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Bedingungen für den ruhigen Gang

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

angeben, wobei die C die willkürlichen Integrationsconstanten, die α aber constante Werthe sind, die als Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\alpha^4 + \lambda\alpha^2 + \mu = 0 \tag{147}$$

zu ermitteln sind. Der Nachweis dafür, dass der in Gl. (146) für α angegebene Werth in der That der Gl. (145) unter Beachtung der Nebenbedingung (147) genügt, kann leicht erbracht werden; diese einfache Zwischenrechnung soll aber weggelassen werden.

Die Auflösung der Gl. (147) liefert

$$\alpha = \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}}. \tag{148}$$

Von den vier Wurzeln sind also mindestens zwei imaginär, denn λ setzt sich aus lauter positiven Gliedern zusammen und ist daher selbst positiv.

Exponentialglieder mit rein imaginären Exponenten in Gl. (146) lassen sich in bekannter Weise auf reelle trigonometrische Functionen zurückführen; sie stellen also periodische Aenderungen des Ausschlags a dar, die kein dauerndes Anwachsen des Ausschlags herbeiführen können. Nimmt man dagegen das positive Vorzeichen vor der inneren Wurzel, so kann man reelle Werthe von α erhalten. In diesem Falle kommt in Gl. (146) ein Glied vor, das mit wachsendem t unbegrenzt weiter wächst. Wenn auch der Ausschlag a im Anfangszustande sehr klein war, so muss er in diesem Falle immer weiter anwachsen; ohne Führung kann also die Hängespindel dann nicht laufen.

Wir erkennen also zunächst als nothwendige Bedingung für den ruhigen Gang, dass μ jedenfalls nicht negativ sein darf, denn sonst hätten wir sofort reelle Werthe von α. Wenn dagegen μ positiv und kleiner als $\frac{\lambda^2}{4}$ ist, kommen nur imaginäre Werthe von α vor und Gl. (146) stellt eine periodische Bewegung dar. In diesem Falle haben wir einen ruhigen Gang der Spindel zu erwarten. Wäre schliesslich μ grösser als $\frac{\lambda^2}{4}$, so hätten die Wurzeln in Gl. (148) neben einem imaginären auch einen reellen Theil und wir hätten abermals in Gl. (146) Glieder, die mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Sobald man aber für λ und μ ihre Werthe aus den Gleichungen (144) einsetzt, erkennt man, dass μ niemals grösser als $\frac{\lambda^2}{4}$ werden kann, so dass dieser Fall thatsächlich ausgeschlossen ist.

Als einzige Bedingung für den ruhigen Gang bleibt demnach diese bestehen, dass der Werth

$$\mu = \left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q} - u^2\right)$$

positiv ist. Bei kleinen Werthen von u ist μ jedenfalls positiv und wir finden damit nur bestätigt, dass die Hängespindel bei niedrigen Geschwindigkeiten jedenfalls ruhig laufen kann, ohne zu grösseren Ausschlägen zu gelangen. Sobald aber u den Werth

$$u_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{149}$$

überschritten hat, wird μ negativ. Es ist dies derselbe Werth, der schon in Band I, § 18 auf einfacherem Wege gefunden und dort mit $u_{\min}$ bezeichnet wurde.

Wenn aber u noch weiter wächst, wird schliesslich auch der zweite Faktor in dem Ausdrucke für μ negativ und damit das ganze Produkt wieder positiv. Der Grenzwerth ist

$$u_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q}}. \tag{150}$$

Rechnet man wie am Schlusse des vorigen Paragraphen die Winkelgeschwindigkeit u_2 auf Touren N_2 in der Minute um und führt an Stelle von c die Kraft P ein, die das untere Ende der Hängespindel um 1 cm aus der Ebene E herauszubiegen vermag, so erhält man an Stelle von Gl. (150), wenn auch die Spindellänge l in cm ausgedrückt wird,

$$N_2 = 300\sqrt{\frac{1}{l} + \frac{P}{Q}}, \tag{151}$$

eine Gleichung, die sich von der für die kritische Tourenzahl bei der Laval'schen Turbine nur durch das Hinzutreten des Summanden $\frac{1}{l}$ unter dem Wurzelzeichen unterscheidet. Bei praktisch vorliegenden Fällen wird aber dieser Summand gewöhnlich nur klein sein gegenüber dem anderen, so dass sich N_2 nur wenig von dem kritischen Werthe N_k des vorigen Paragraphen unterscheidet. — Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht aber hier darin, dass wir jetzt ein ganzes Geschwindigkeitsgebiet (von u_1 bis u_2) haben, innerhalb dessen ursprünglich kleine Ausschläge bis zu endlicher Grösse anwachsen müssen, wenn dies nicht durch eine Hülfsführung verhindert wird, während bei der Laval'schen Turbinenwelle nur für eine ganz bestimmte einzelne Geschwindigkeit ein unbegrenztes Anwachsen der ursprünglich sehr klein vorausgesetzten Ausschläge zu erwarten war.

Bei der Hängespindel reichen die Gebiete für den ruhigen Gang

a) bei kleinen Geschwindigkeiten

$$\text{von } u = 0 \quad \text{bis } u = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

b) für grosse Geschwindigkeiten

$$\text{von } u = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q}} \text{ bis } u = \infty.$$

Construirt man die Hängespindel sehr steif, so wird P sehr gross und man kann den ruhigen Gang in dem oberen Geschwindigkeitsgebiete erst bei sehr hohen Umdrehungszahlen erreichen; man wird daher besser thun, die Spindel ziemlich biegsam zu wählen.

Aufgaben.

10. Aufgabe. Ein Stab, auf den sonst keine äusseren Kräfte wirken und der vorher in Ruhe war, erhält plötzlich einen Stoss von gegebenem Impulse an seinem einen Ende rechtwinklig zur Längsrichtung; man soll die zu Stande kommende Bewegung angeben.

Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hülfe des Flächensatzes (so wie in § 25a) oder mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips lösen; wir entscheiden uns hier für das d'Alembert'sche Princip, weil man dieses ohnehin anwenden muss, wenn etwa daneben noch nach der Biegungsbeanspruchung gefragt werden sollte, die der Stab bei dem Stosse erfährt.