Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Schiefer und excentrischer Stoss

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

die Geschwindigkeitsänderungen an, die beide Körper durch den Stoss erfahren. Fasst man daher diese Geschwindigkeitsänderungen als selbständige Bewegungszustände auf, so ist die Summe der zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte ebenso gross als der in Wirklichkeit eintretende Verlust an lebendiger Kraft, den wir berechnen wollten. Diese Aussage spricht den Carnot'schen Satz aus, der indessen, wie sich sofort zeigen wird, nicht nur für den graden centralen Stoss, sondern auch noch in viel allgemeineren Fällen seine Gültigkeit behält.

Zunächst gilt der Satz auch für den beliebigen — schiefen und excentrischen — Stoss von zwei freien starren Körpern gegeneinander. Um dies zu beweisen, bezeichne ich die Geschwindigkeit der vom Stosse getroffenen Stelle des ersten Körpers in irgend einem Augenblicke während der Stosszeit mit $\mathfrak{w}_1$, die Geschwindigkeit der Stossstelle des zweiten Körpers mit $\mathfrak{w}_2$. Da sich die Körper an der Stossstelle während der ganzen Stossdauer berühren — obschon die Oberflächen im allgemeinen zugleich übereinander gleiten —, müssen die in der Richtung der Stossnormalen genommenen Componenten von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gleich gross sein. Der ebenfalls in die Richtung der Stossnormalen fallende Stossdruck am ersten Körper sei mit $\mathfrak{P}$, das bis zu dem betrachteten Augenblicke genommene Zeitintegral von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}$ und das über die ganze Stossdauer erstrebte Zeitintegral mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet. Am zweiten Körper kehren sich die Richtungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ dem Wechselwirkungsgesetze zufolge um und man hat daher für ihn $-\mathfrak{P}$ bezw. $-\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}'$ zu setzen. Die Arbeit von $\mathfrak{P}$ am ersten Körper während eines Zeitelementes dt ist gleich

$$\mathfrak{P}\mathfrak{w}_1 dt,$$

und die Arbeit des Stossdrucks am zweiten Körper gleich

$$-\mathfrak{P}\mathfrak{w}_2 dt.$$

Nach dem, was vorher über $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ bemerkt wurde, sind beide Arbeiten von gleicher Grösse und entgegengesetzten Vorzeichen, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) = 0. \qquad (125\text{h})$$

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ der Stossstellen sind aber nicht jene, die diesen zukämen, wenn sie sich so bewegten, wie es dem starren Zusammenhange mit den fern von der Stossstelle gelegenen Körpermassen entspräche. So klein auch die Formänderungen sein mögen und wenn wir sie beim Grenzübergange vom weichen zum starren Körper schliesslich selbst ganz verschwinden lassen: während der dann ebenfalls gegen Null hin convergirenden Stossdauer müssen wir jedenfalls darauf Rücksicht nehmen, dass sich die Stossstelle der minimalen Formänderung wegen mit anderer Geschwindigkeit zu bewegen vermag, als es dem starren Zusammenhange mit der Hauptmasse des gestossenen Körpers entsprechen würde. Jene Geschwindigkeiten der Stossstellen, die den Bewegungszuständen der beiden Körper im gegebenen Augenblicke mit Vernachlässigung der Formänderung an der Stossstelle zugehörten, seien zum Unterschiede von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bezeichnet.

Die Aenderung, die die lebendige Kraft des ersten Körpers während dt erfährt, ist gleich jener Arbeit des Stossdrucks $\mathfrak{P}$, die zum Wege $\mathfrak{v}_1 dt$ gehört, denn wir wissen schon aus den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen, dass die Arbeit eines Impulses $\mathfrak{P} dt$ gleich der von ihr verursachten Aenderung der lebendigen Kraft ist, falls während dt keine Formänderung eintritt. Der Rest, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1)\, dt$$

wird auf die Formänderungsarbeit am ersten Körper verwendet. Hierbei ist übrigens wohl zu beachten, dass auch beim starren Körper eine endliche Formänderungsarbeit möglich ist, denn wenn auch der Weg der Zusammendrückung gegen Null convergirt, so convergirt gleichzeitig die Grösse des Stossdrucks gegen Unendlich und das Produkt $0 \cdot \infty$ behält bei der hier zu Grunde gelegten Definition des starren Körpers einen endlichen Werth.

Ebenso wird während des Zeitelementes dt die Arbeit

$$-\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{v}_2)\, dt$$

auf die Formänderung des zweiten Körpers verwendet. Die

Summe beider Formänderungsarbeiten ist gleich dem Verluste an lebendiger Kraft während dt, also

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}_2)\,dt$$

und daher mit Berücksichtigung von Gl. (125h) auch

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\,dt.$$

Der gesammte Verlust an lebendiger Kraft während der ganzen Stossdauer folgt daraus zu

$$\mathrm{Verl} = \int (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\,\mathfrak{P}\,dt.$$

Um die Integration nach der Zeit auszuführen, bezeichne ich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$, die dem Anfange des Stosses entspricht, mit $\mathfrak{v}_1^0$ und die am Ende des Stosses mit $\mathfrak{v}_1'$. Die Aenderung $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ entspricht dem ganzen Stossimpulse $\mathfrak{A}'$, die Aenderung $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1^0$ bis zu dem betrachteten Augenblicke dem bis dahin bereits verstrichenen Impulse $\mathfrak{A}$ und die beiden Aenderungen verhalten sich zu einander wie die absoluten Werthe A und A' dieser Impulse, da die Richtung des Stossdrucks fortwährend mit der Stossnormalen zusammenfällt und sich daher nicht ändert. Man hat daher

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_1^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0) \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\mathrm{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\int \mathfrak{P}\,dt + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0)\int \frac{A}{A'}\,\mathfrak{P}\,dt.$$

Nun ist aber $\mathfrak{P}\,dt = d\mathfrak{A}$ und daher

$$\mathrm{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\,\mathfrak{A}' + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0)\cdot\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}'.$$

Beachtet man ferner noch, dass am Ende des Stosses die Projektionen von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ auf die Stossnormale gleich gross geworden sind, so vereinfacht sich dies zu

$$\mathrm{Verl} = \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\,\mathfrak{A}'. \qquad (125\mathrm{i})$$

Hiermit ist ein Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft gefunden, von dem nur noch gezeigt zu werden braucht, dass er mit dem nach dem Carnot'schen Satze berechneten übereinstimmt. Zu diesem Zwecke sein nun irgend ein fern von der Stossstelle liegender materieller Punkt des ersten Körpers ins Auge gefasst, dessen Geschwindigkeit vor dem Stosse mit $\mathfrak{v}^0$ und nach dem Stosse mit $\mathfrak{v}'$ (also unter Weglassung des untern Zeigers gegenüber den vorher gebrauchten Bezeichnungen) bezeichnet werden soll. Wir können dann sagen, dass der spätere Bewegungszustand des ersten Körpers aus dem früheren dadurch hervorgeht, dass sich ihm ein Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ zugesellt. Betrachtet man, wie es bei der Aussage des Carnot'schen Satzes geschieht, den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ für sich, so gehörte ihm, wenn er allein vorkäme, eine gewisse lebendige Kraft zu, die mit L_1 bezeichnet werden mag. Nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen liesse sich der Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ jedenfalls dadurch getrennt für sich hervorbringen, dass man an dem ruhend gedachten ersten Körper den Stoss vom Impulse $\mathfrak{A}'$ wirken liesse. Unter der Voraussetzung, dass sich dieser Stoss ohne Formänderung abspielte, wäre dann die lebendige Kraft L_1, die durch den Stoss hervorgebracht würde, gleich der Arbeit des Impulses zu setzen. Dabei müsste die Geschwindigkeit der Stossstelle während des Stosses von Null bis zu dem Endwerthe $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ wachsen. Die Arbeit des Impulses und hiermit die lebendige Kraft L_1 berechnet sich demnach zu

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0\right)\mathfrak{A}'$$

und ebenso findet man für den zweiten Körper

$$L_2 = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}'\left(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0\right),$$

wobei nur zu beachten ist, dass bei ihm $-\mathfrak{A}'$ an Stelle von $\mathfrak{A}'$ tritt. Die Summe liefert

$$L_1 + L_2 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0 - \mathfrak{v}_2' + \mathfrak{v}_2^0\right)\mathfrak{A}'.$$

Da nun, wie vorher schon bemerkt war, am Ende des plastischen Stosses die Projektion von $\mathfrak{v}_1'$ auf die Stossnormale oder auf die Richtung von $\mathfrak{A}'$ ebenso gross ist wie die Projektion von $\mathfrak{v}_2'$, stimmt dies genau mit dem Werthe in Gl. (125i) überein und man findet

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \tag{125k}$$

womit der Carnot'sche Satz auch für den allgemeinsten Fall des Stosses von zwei „plastisch-starren" Körpern gegeneinander bewiesen ist.

Auch auf den Fall, dass die stossenden Körper nicht völlig frei, sondern bestimmten Bedingungen unterworfen sind, lässt sich der Satz unter Beibehaltung der früheren Schlussweise übertragen, falls dabei nur immer vorausgesetzt wird, dass alle Körper, durch die diese Bedingungen verwirklicht sind, auch wenn sie in der Grenze als starr angesehen werden, selbst im Grenzfalle noch den Elasticitätsgrad Null haben und dass ferner kein weiterer Verlust an lebendiger Kraft durch Reibungen herbeigeführt wird. Ich begnüge mich damit, dies hier noch an einem einfachen Falle dieser Art zu zeigen.

Ein starrer Körper möge zunächst völlig frei sein und eine beliebige Anfangsbewegung besitzen. Dann soll irgend ein Punkt von ihm durch eine geeignete Vorrichtung plötzlich festgehalten werden, so dass sich der Körper von da ab nur noch um diesen festen Punkt weiter zu drehen vermag. Man soll angeben, wie er sich weiterhin bewegt und wie gross der Verlust an lebendiger Kraft ist, den er durch den Stoss erleidet.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes vor dem Stosse sei wieder mit $\mathfrak{v}^0$, die nach dem Stosse mit $\mathfrak{v}'$ bezeichnet, die Geschwindigkeiten der Stossstelle insbesondere, sofern von der Formänderung abgesehen wird, mit $\mathfrak{v}_1{}^0$ und $\mathfrak{v}_1{}'$, wobei freilich zu beachten ist, dass auch hier wieder während der Stosszeit die wahre Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_1$ des Punktes, den man festzuhalten im Begriffe ist, der unvermeidlichen Formänderung wegen, von $\mathfrak{v}_1$ verschieden ist. Die Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_1{}'$ ist übrigens nach der im vorliegenden Falle vorgeschriebenen Bedingung gleich Null zu setzen. — Durch den Stoss wird der Bewegungszustand um $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ abgeändert und wir können uns einen selbständigen Bewegungszustand denken, der sich dem vorhergehenden überlagert und bei dem