Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Nutation der Erdaxe, Integration der Gleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

Falle insofern nicht ganz einfach, als sie auf elliptische Functionen führt. Im Uebrigen macht sie aber keine Schwierigkeiten.

Hier beschränke ich mich auf die Durchführung der Rechnung für den einfachen Fall, dass das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist (was z. B. bei der Anwendung auf die „Nutation" der Erdaxe angenommen werden kann). Es sei also

$$\Theta_2 = \Theta_3$$

und zur Abkürzung möge ferner

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} = \gamma$$

gesetzt werden. Dann gehen die Euler'schen Gleichungen über in

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} = \gamma u_1 u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = -\gamma u_1 u_2. \quad (102)$$

Die erste Gleichung lehrt, dass u_1 constant ist. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit u_2 und die dritte mit u_3 und addirt, so folgt

$$u_2 \frac{du_2}{dt} + u_3 \frac{du_3}{dt} = 0,$$

also durch Integration

$$u_2^2 + u_3^2 = C,$$

worin C eine durch die Anfangsbedingungen bestimmte Constante ist. Da auch u_1^2 constant ist, so folgt dies auch für $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, d. h. der absolute Werth der Winkelgeschwindigkeit ist constant und ebenso ihre Projektion auf die $\mathfrak{i}$-Axe. Der Vektor $\mathfrak{u}$ beschreibt demnach einen Kreiskegel um die $\mathfrak{i}$-Axe. Bis dahin sind wir nur zu einem Resultate gelangt, das uns aus der Poinsot'schen Lehre von der Polodie bereits bekannt war. — Durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (102) nach t erhält man

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = \gamma u_1 \frac{du_3}{dt}$$

und wenn man den Differentialquotienten von u_3 aus der dritten Gleichung einführt, wird daraus

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_2. \quad (103)$$

Ebenso wird, wenn man bei diesem Eliminationsverfahren die dritte der Gleichungen (102) mit der zweiten vertauscht

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_3. \tag{104}$$

Diese Differentialgleichungen sind uns ihrer Form nach bereits aus der Lehre von den harmonischen Schwingungen bekannt. Ihre allgemeine Lösung ist

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t \tag{105}$$

und diese Lösung gilt bei passender Wahl der unbestimmten Integrationsconstanten ebenso auch für u_3. Die Umlaufszeit T der Momentanaxe um die Axe der Figur ergiebt sich aus der Bedingung, dass der Winkel $\gamma u_1 t$ während dessen um 2π angewachsen sein muss; also

$$T = \frac{2\pi}{\gamma u_1}$$

oder nach Einsetzen des Werthes von γ

$$T = \frac{2\pi \Theta_2}{u_1 (\Theta_1 - \Theta_2)}. \tag{106}$$

Die Umlaufszeit der Nutationsbewegung wird demnach um so grösser, je weniger sich die Hauptträgheitsmomente von einander unterscheiden. Sie hängt ausserdem von der Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die Figurenaxe, im Uebrigen aber nicht von dem Winkel ab, den $\mathfrak{u}$ mit der Figurenaxe bildet.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man ganz ähnlich auch verfahren kann, um die auf den festen Raum bezogene Aenderung der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ mit der Zeit zu untersuchen. Die Gleichung

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k} \frac{B_3}{\Theta_3}$$

muss dann nach der Zeit t unter Berücksichtigung des Umstandes differentiirt werden, dass jetzt $\mathfrak{B}$ constant, die Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ dagegen veränderlich sind. So ist z. B.

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = -V\mathfrak{u}\mathfrak{i}$$

und

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{i}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = -\mathfrak{B}V\mathfrak{u}\mathfrak{i}.$$

Die Differentiation von $\mathfrak{u}$ lässt sich hiernach ohne Schwierigkeit ausführen. Mehr Schwierigkeiten macht freilich die weitere Behandlung der Differentialgleichungen; darauf werde ich aber hier nicht eingehen.

§ 22. **Anwendung auf ein einfaches Beispiel.**

Ein Ring, dessen Reif erheblich mehr Masse hat, als die radial geführten Arme, die den Reif mit einer in der Mitte gelegenen Nabe verbinden, soll im Schwerpunkte auf einer Spitze gelagert sein. Zu Anfang möge die Ringebene horizontal liegen und der Ring möge eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ um irgend eine Axe besitzen, die aber nicht mit der Figurenaxe zusammenfallen soll. Im andern Fall rotirte er nämlich um eine freie Axe und würde um diese immer weiter rotiren, ein Fall, der für uns kein weiteres Interesse hat.

Um die fernere Bewegung des Ringes angeben zu können, construiren wir zunächst ein Trägheitsellipsoid des Ringes, bei dem wir nur auf die Masse des Reifs zu achten brauchen, die wir uns überdies in der kreisförmigen Mittellinie vereinigt denken können. Wenn der Radius dieser Mittellinie mit r und die Masse des Reifs mit M bezeichnet werden, ist das Trägheitsmoment Θ_1 für die Figurenaxe

$$\Theta_1 = Mr^2$$

und die anderen Hauptträgheitsmomente sind

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{Mr^2}{2}$$

(vgl. Bd. III, Gl. (63)). Auf welche zur Figurenaxe senkrechten Axen man Θ_2 und Θ_3 beziehen will, ist übrigens bei einem Rotationskörper gleichgültig, da jede derartige Axe eine Hauptträgheitsaxe ist.