# Vorlesungen über technische Mechanik

**Föppl, August**

**Leipzig, 1901**

Trägheitsellipsoid

Untersuchung auf Trägheits- und Centrifugalmomente in Bezug auf die Coordinatenaxen zurückführen lassen, sind jedenfalls constante Grössen, d. h. sie sind unabhängig von der besonderen Wahl des Strahls, die für die Drehaxe $\mathfrak{u}$ getroffen worden ist.

Denkt man sich nun auf jedem Strahle die Winkelgeschwindigkeit $u$ abgetragen, mit der der Körper um diesen Strahl als Axe rotiren muss, damit die lebendige Kraft den constanten Werth $L$ annimmt, so erhält man eine Fläche, die alle diese Punkte verbindet. Die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind die Componenten von $\mathfrak{u}$, also $u_1\ u_2\ u_3$. Zwischen diesen Coordinaten besteht Gl. (94), in der alle übrigen Grössen constant sind. Hiernach ist Gl. (94) selbst die Gleichung der Fläche. Die Gleichung ist vom zweiten Grade und das Gleiche gilt daher auch von der ihr entsprechenden Fläche. Da sich ferner zu jedem Strahle des Strahlenbündels ein bestimmter endlicher Werth von $u$ angeben lässt, so folgt, dass die Fläche den Schwerpunkt von allen Seiten her umschliesst und dass sie sich nicht ins Unendliche erstrecken kann. Hiermit ist die Fläche nach den Lehren der analytischen Geometrie als ein Ellipsoid gekennzeichnet.

Führt man an Stelle des Trägheitsmoments $\Theta$ den Trägheitsradius $t$ ein, indem man $\Theta = Mt^2$ setzt, so kann $L$ auch in der Form

$$L = \frac{1}{2} u^2 t^2 M$$

geschrieben werden und daraus folgt, dass für alle Strahlen das Produkt $ut$ einen constanten Werth hat. Die Strecken $u$, die auf den Strahlen abgetragen wurden, und die wir inzwischen als Halbmesser eines Ellipsoids erkannt haben, sind demnach den zu diesen Strahlen gehörigen Trägheitshalbmessern umgekehrt proportional. Da man hiernach aus der Gestalt des Ellipsoids sofort auch einen Schluss auf die Trägheitsmomente ziehen kann, wird das Ellipsoid als das T r ä g h e i t s e l l i p s o i d bezeichnet. Diese Bezeichnung steht mit der von uns früher im dritten Bande eingeführten Bezeichnung „Trägheitsellipse“ in Uebereinstimmung.

Der Mittelpunkt des Ellipsoids fällt übrigens mit dem Schwerpunkte des Körpers (oder allgemeiner mit dem festen Punkte) zusammen, denn wenn man $\mathfrak{u}$ mit $-\mathfrak{u}$ vertauscht, so behält $L$ seinen Werth und Gl. (94) bleibt immer noch erfüllt.

Ferner können wir jetzt auch schon einige Betrachtungen der vorausgehenden Paragraphen ergänzen. In § 17 war gezeigt worden, dass für die freien Axen die Bedingung $\delta\Theta = 0$ erfüllt sein muss. Diese trifft aber, wie wir jetzt erkennen, bei den drei Hauptaxen des Centralellipsoids und im Allgemeinen nur bei diesen zu. Hiernach hat jeder starre Körper mindestens drei aufeinander senkrecht stehende freie Axen. Mehr als drei und dann unendlich viele hat er nur, wenn das Trägheitsellipsoid in ein Umdrehungsellipsoid übergeht. Wird das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel, so ist jede Schwerpunktsaxe eine freie Axe.

Auch die Untersuchung in § 18 kann jetzt weiter ausgeführt werden. Es handelte sich dort darum, die Bewegung anzugeben, die durch ein Kräftepaar $\mathfrak{K}$ hervorgebracht wird und diese Frage war bisher nur für den Fall beantwortet worden, dass $\mathfrak{K}$ in die Richtung der freien Axe fällt. Um sie für den allgemeineren Fall zu lösen, denke man sich $\mathfrak{K}$ in drei Componenten $K_1 K_2 K_3$ längs der drei Hauptaxen des (für den Schwerpunkt construirten) Centralellipsoids zerlegt. Für die erste Componente folgt dann, da sie mit einer freien Axe zusammenfällt, nach Gl. (93)

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = K_1$$

und entsprechend für die übrigen. Die wirkliche Winkelbeschleunigung erhalten wir dann nach dem Satze über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen durch geometrische Summirung der drei Componenten. Wenn wir also jetzt unter $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren verstehen, die in den Richtungen der drei Hauptaxen gezogen sind, finden wir

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{K_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{K_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{K_3}{\Theta_3}, \tag{95}$$