Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Isochronismus der Schwingungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2g(h-y)}} = dy\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(h-y)}}$$

oder wenn man den reciproken Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus Gl. (58) einsetzt

$$dt = dy\sqrt{\frac{r}{gy(h-y)}}.$$

Die Zeit, die der Punkt braucht, um die halbe Schwingungsbahn von $y = 0$ bis $y = h$ einmal zurückzulegen, sei wieder mit t bezeichnet. Dann ist

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y(h-y)}}. \tag{59}$$

Hier ist aber das Integral viel leichter auszuführen, als bei den Pendelschwingungen. Allgemein ist nämlich

$$\int \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = -\operatorname{arc\,sin}\frac{\frac{h}{2} - y}{\frac{h}{2}},$$

wovon man sich durch Ausführung der Differentiation leicht überzeugt. Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 0 und h, so erhält man

$$-\operatorname{arc\,sin}(-1) + \operatorname{arc\,sin}(+1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

und hiermit geht Gl. (59) über in

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Die Dauer einer vollen Schwingung auf dem Cycloidenbogen ist das Vierfache hiervon, wofür man schreiben kann

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}. \tag{60}$$

Zunächst erkennt man hieraus, dass die Schwingungsdauer auch für Ausschläge von beliebiger endlicher Grösse streng isochron ist, während dies bei den Pendelschwingungen nur für kleine

Schwingungen annähernd zutraf. Ferner lehrt der Vergleich mit Gl. (48), dass die Pendellänge, die bei kleinen Schwingungen zu dem gleichen Werthe der Schwingungsdauer führt, wie die Schwingung auf der Cycloide, $l = 4r$ gewählt werden muss. Es ist aber eine hier als bekannt vorauszusetzende Eigenschaft der Cycloide, dass der Krümmungshalbmesser im Scheitel gleich dem Vierfachen vom Radius des Erzeugungskreises ist. Dies zeigt uns, dass wir nur so lange auf einen Isochronismus der Pendelschwingungen rechnen können, als wir uns den Kreisbogen durch einen kleinen Cycloidenbogen vom gleichen Krümmungsradius ersetzt denken können. Je grösser der Ausschlag des Pendels wird, um so mehr weichen die Cycloide und ihr Krümmungskreis von einander ab, und um so ungenauer wird es, wenn wir die eigentlich nur für die Cycloide gültige Formel für die Schwingungsdauer auch bei der Pendelbewegung als gültig betrachten.

Es sei noch erwähnt, dass man einen schweren Punkt leicht zwingen kann, auf einer Cycloide zu schwingen, wenn man ihn an einem Faden aufhängt, der sich beim Schwingen an zwei beiderseits vom Aufhängepunkte angebrachte Backen anlegt, die nach der Evolute der Curve begrenzt sind. Versuche mit solchen Cycloidenpendeln werden häufig in Vorlesungen über Experimentalphysik vorgeführt, um durch den Versuch nachzuweisen, dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Grösse des Ausschlags ist.

Wegen der seither besprochenen Eigenschaft pflegt man die Cycloide auch als die Tautochrone zu bezeichnen. Sie hat aber zugleich noch eine andere Eigenschaft, zu deren Besprechung ich jetzt übergehen will und der sie den Namen Brachistochrone verdankt. Sie ist nämlich jene Curve, auf der ein Punkt in kürzerer Zeit als auf jeder anderen von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle, die tiefer liegt als die erste, hinabrollt.

Um die Aufgabe in möglichst anschaulicher Form vorzubringen, erinnere ich an den Rücklauf, den man bei Kegelbahnen anwendet, um die Kugeln den Spielern wieder zu-