



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Periodische und aperiodische Bewegung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

Hier sind nun zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem der mit γ bezeichnete Wurzelwerth reell oder imaginär ist. Im ersten Falle, den wir zunächst voraussetzen wollen, kann die Lösung in der Form von Gl. (23) unmittelbar beibehalten werden. Diese Lösung stellt aber überhaupt keine Schwingung mehr dar, weil x hier als eine nichtperiodische Function der Zeit gefunden ist. Nehmen wir, um die fernere Untersuchung zu vereinfachen an, dass zu Anfang der Zeit t der Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 durch den Ursprung gegangen sei, so erhalten wir für die Constanten A und B die beiden Grenzbedingungen

$$0 = A + B \quad \text{und} \quad v_0 = A \left(-\frac{k}{2m} + \gamma \right) + B \left(-\frac{k}{2m} - \gamma \right),$$

woraus man durch Auflösen nach A und B findet

$$A = \frac{v_0}{2\gamma} \quad \text{und} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma}.$$

Durch Einsetzen der hiermit bestimmten Werthe in Gl. (23) geht diese über in

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}). \quad (24)$$

Dieser Ausdruck kann sein Vorzeichen bei wachsendem t nicht ändern, denn $e^{-\gamma t}$ ist für ein positives t immer ein echter Bruch, während $e^{\gamma t}$ stets grösser als Eins bleibt. Der Punkt bleibt also, wenn er diese Bewegung ausführt, vom Augenblicke $t = 0$ an stets auf derselben Seite der Coordinatenaxe. Für $t = \infty$ liefert Gl. (24) wieder $x = 0$, denn aus der Definition von γ folgt, dass $\frac{k}{2m}$ jedenfalls grösser ist als γ . Der grösste Ausschlag, den der Punkt erreicht, und die Zeit, zu der dies geschieht, kann nach der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima aus Gl. (24) ermittelt werden, womit ich mich aber jetzt nicht aufhalten will. Jedenfalls ist durch die bisherigen Auseinandersetzungen der allgemeine Verlauf der Bewegung bereits hinreichend gekennzeichnet. Eine solche Bewegung heisst eine aperiodische; sie ist dann zu erwarten, wenn die Dämpfung sehr stark ist (z. B. beim sogenannten

ballistischen Galvanometer). Jedenfalls muss der Dämpfungsfaktor k mindestens den Werth

$$k = 2\sqrt{mc}$$

erhalten. Sobald k kleiner ist, wird der mit γ bezeichnete Wurzelwerth imaginär und dann treten wieder Schwingungen ein, die wir jetzt weiter untersuchen wollen.

In diesem Falle ist die Wurzel

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

ein reeller Werth und für γ können wir in den vorausgehenden Entwicklungen

$$\gamma = i\gamma'$$

setzen. Hiermit geht Gl. (24) über in

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma't} - e^{-i\gamma't}}{2i}$$

Nach einer bekannten Formel der Analysis ist aber für den hier als letzter Faktor auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck kürzer $\sin \gamma't$ zu setzen. Wir erhalten so für die gedämpften Schwingungen die fertige Lösung

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \gamma't. \quad (25)$$

Uebrigens steht es auch frei, wenn man diesen Uebergang von den imaginären zu den reellen Werthen vermeiden will, die Richtigkeit von Gl. (25) unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung (22) und Vergleich mit den vorgeschriebenen Grenzbedingungen nachzuweisen.

Der Hauptunterschied zwischen Gl. (25) und der die ungedämpften harmonischen Schwingungen darstellenden Gl. (19)

$$x = A \sin \alpha t$$

besteht in dem Hinzutreten der Exponentialfunction $e^{-\frac{k}{2m}t}$ als Faktor. Solange noch wenig Zeit von Beginn der Bewegung an verstrichen ist, unterscheidet sich dieser Faktor nur wenig von der Einheit; die Bewegung erfolgt bis dahin fast ebenso wie eine ungedämpfte. Wenn die Dämpfung k sehr klein ist,

kann schon eine ganze Anzahl von Schwingungen verstreichen, bevor sich eine Aenderung des Schwingungsausschlags bemerklich macht. Sobald aber t einmal so gross geworden ist, dass der Exponentialfaktor erheblich von 1 verschieden ist, nimmt dann innerhalb Zeiten, die mit dieser vergleichbar sind, der Schwingungsausschlag sehr schnell ab. War z. B. für eine gewisse Zeit t_1 der Exponentialfaktor gleich $\frac{1}{2}$, so ist er nach $2t_1$ gleich $\frac{1}{4}$, nach $3t_1$ gleich $\frac{1}{8}$ und nach $10t_1$ schon gleich $\frac{1}{1024}$, also in den meisten Fällen schon ganz unmerklich geworden. Dieses rapide Erlöschen ist ja überhaupt die hervorstechendste Eigenschaft der mit Hülfe einer Exponentialfunction beschriebenen physikalischen Gesetzmässigkeiten.

Die Definition einer vollen Schwingung muss hier anders gefasst werden, als bei der ungedämpften Bewegung. Wir wollen darunter eine Bewegung aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite, die Rückkehr von da, dann den Ausschlag nach der anderen Seite, bis schliesslich der Punkt abermals in der Gleichgewichtslage angelangt ist, verstehen. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass auch die gedämpfte Schwingung isochron ist. In die Gleichgewichtslage ist nämlich der Punkt immer dann wieder zurückgekehrt, wenn $\sin \gamma' t$ zu Null wird. Dies trifft zu, wenn der Winkel $\gamma' t$ wieder um π oder ein Vielfaches davon gewachsen ist. Zur Dauer T einer vollen Schwingung gehört demnach ein Zuwachs des Winkels um 2π und daraus folgt

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}}. \quad (26)$$

Dieser Ausdruck ist in der That ganz unabhängig von der Zeit, die seit Beginn der Bewegung verstrichen ist oder von dem Werthe, auf den sich der Schwingungsausschlag seitdem vermindert hat. Wenn die Schwingungsausschläge kleiner werden, nehmen auch die Geschwindigkeiten entsprechend ab, so dass zum Durchlaufen der kleineren Wege immer noch ebensoviel Zeit gebraucht wird, als vorher bei den grösseren.

Dagegen ist die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung grösser als die der ungedämpften. — Wenn man $k = 0$ setzt, geht Gl. (26) wieder in Gl. (20) über.

Die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes folgt aus Gl. (25) durch Differentiation nach der Zeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t \right).$$

Die Geschwindigkeit wird jedesmal zu Null bei einer Umkehr aus einer Bewegungsrichtung in die andere. Für die Umkehrzeiten hat man daher die Bedingung

$$\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma' t = \frac{2m\gamma'}{k} = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{k}.$$

Diesen Werth nimmt die Tangente von $\gamma' t$ immer von Neuem wieder an, wenn der Winkel $\gamma' t$ um π , 2π , 3π u. s. f. gewachsen ist. Daraus folgt aber, dass die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten immer gleich gross und, wie aus Gl. (26) hervorgeht, gleich der Hälfte einer vollen Schwingungsdauer ist.

Aus der $\operatorname{tg} \gamma' t$ berechnen wir zunächst $\sin \gamma' t$ nach der goniometrischen Formel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

also in unserem Falle nach Einsetzen des für $\operatorname{tg} \gamma' t$ gefundenen Werthes

$$\sin \gamma' t = \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}}. \quad (27)$$

Wir brauchen nur diesen Werth in Gl. (25) einzusetzen, um danach die Grösse des Schwingungsausgangs oder x_{max} zu berechnen. Diese Schwingungsamplitude sei mit a bezeichnet und ferner, um sie mit den vorausgegangenen oder den folgenden vergleichen zu können, mit a_n , wobei n angeben soll, der wievielte Schwingungsausgang seit Beginn der Zeit t grade vorliegt. Wir erhalten dann

$$a_n = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}},$$

oder, wenn man hier ausserdem noch den Werth von γ' einführt,

$$a_n = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m}t}. \quad (28)$$

Den genaueren Werth von t muss man sich aus Gl. (27) berechnet und in den Exponentialfaktor eingesetzt denken. Beim nächsten Schwingungsaussschlage, der nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wird ebenso

$$a_{n+1} = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m}t'}$$

gefunden, denn die Bedingung (27) für die Zeiten der Bewegungsumkehr gilt für alle Schwingungsaussschläge in derselben Weise. Geändert hat sich daher in a_{n+1} gegenüber a_n nur der Exponentialfaktor, indem an Stelle von t die Zeit t' getreten ist. Nun ist aber, wie vorher schon bemerkt wurde,

$$t' = t + \frac{T}{2} = t + \frac{2\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}},$$

hiernach kann a_{n+1} auf einfache Weise aus a_n abgeleitet werden, indem man

$$a_{n+1} = a_n \cdot e^{-\frac{k}{4m}T} = a_n \cdot e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}}} \quad (29)$$

setzt. Das Verhältniss $a_{n+1} : a_n$ ist hiernach constant, d. h. die aufeinanderfolgenden Schwingungsaussschläge bilden eine geometrische Reihe. Geht man zu den natürlichen Logarithmen über, so erhält man aus (29)

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{kT}{4m}. \quad (30)$$

Die Logarithmen aufeinanderfolgender Schwingungsaussschläge unterscheiden sich demnach immer um den gleichen Werth. Dieser wird das logarithmische Decrement der Schwingung genannt. Es kann gewöhnlich leicht durch unmittelbare Be-