



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Elliptische Schwingung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

Zuweilen zieht man es vor, die Schwingung nur während der Zeit zu betrachten, in der die ganze Schwingungsbahn einmal in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird, also die Rückkehr des Punktes gar nicht abzuwarten und als Schwingungsdauer nur jene Zeit zu rechnen, in der $\sin at$ von -1 bis $+1$ wächst. Dabei nimmt der Winkel at um π zu und diese einfache Schwingungsdauer, wie man sie zum Unterschiede von der vorigen nennt, ist genau die Hälfte von T .

Bisher war nur von der gradlinigen harmonischen Schwingung die Rede. Der allgemeinere Fall, zu dem ich jetzt übergehe, lässt sich aber in ganz ähnlicher Weise erledigen. Er liegt immer dann vor, wenn der bewegliche Punkt zu irgend einer Zeit einmal eine Geschwindigkeit hatte, deren Richtungslinie nicht durch den Anfangspunkt

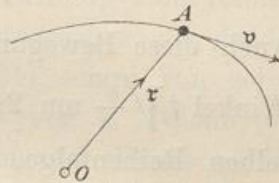


Abb. 7.

und weiterhin ohne äussere Einwirkung den Kräften des Feldes überlassen wurde. In Abb. 7 bedeutet O das Kraftcentrum (oder die Gleichgewichtslage des beweglichen Punktes), A die Lage, die der Punkt zur Zeit t einnimmt und v die Geschwindigkeit. Die elastische Kraft kann hier nach Grösse und Richtung durch den Ausdruck

$$-c\mathbf{r}$$

dargestellt werden, wenn c dieselbe Bedeutung hat wie vorher. Durch das Minuszeichen wird ausgedrückt, dass die Kraft dem Radiusvektor \mathbf{r} entgegengesetzt gerichtet ist. Die dynamische Grundgleichung lautet jetzt

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -c\mathbf{r}$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{r} = \mathfrak{A} \sin at + \mathfrak{B} \cos at,$$

wenn wiederum \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die Integrationsconstanten bedeuten, die aber jetzt als gerichtete Grössen aufzufassen sind, während a dieselbe Bedeutung wie vorher hat, also gleich dem durch Gleichung (18) angegebenen Werthe zu setzen ist. In der

That überzeugt man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung leicht, dass diese durch ihn für jede beliebige Wahl von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} erfüllt ist. — Zu Anfang der Zeit t möge \mathfrak{r} gleich \mathfrak{a} und die Geschwindigkeit \mathfrak{v} gleich \mathfrak{v}_0 gewesen sein. Hierdurch bestimmen sich die Integrationsconstanten zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}_0}{\alpha},$$

so dass nach Einsetzen des Werthes von α die vollständig bestimmte Lösung lautet

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + \mathfrak{a} \cos t \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (21)$$

Auch diese Bewegung ist eine periodische, denn sobald der Winkel $t \sqrt{\frac{c}{m}}$ um 2π gewachsen ist, wiederholen sich in derselben Reihenfolge wieder alle Werthe des Radiusvektors \mathfrak{r} von Neuem. Der bewegliche Punkt durchläuft demnach in steter Reihenfolge unbegrenzt oft eine in sich geschlossene Curve. Die Zeit, die er zu einem vollen Umlaufe braucht, nennen wir wieder die Dauer einer vollen Schwingung und bezeichnen sie wiederum mit T . Dabei wird T aus der Bedingung

$$T \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi, \quad \text{also} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

gefunden. Dieser Werth stimmt aber genau mit dem in Gl. (20) für die geradlinige Schwingung gefundenen überein. Wir erkennen hieraus, dass die Schwingungen auch noch im allgemeinsten Falle isochron sind, d. h. dass die Schwingungsdauer nicht nur von der Grösse des Ausschlags, sondern auch von der besonderen Gestalt der Bahn unabhängig ist.

Es fragt sich jetzt noch, welche Form die Bahn besitzt. Auch diese Frage kann mit Hülfe von Gl. (21) sofort beantwortet werden. Diese Gleichung bildet nämlich in der Sprache der Vektorenrechnung schon von selbst die Gleichung der Bahn und zwar stellt sie die Gleichung einer Ellipse dar, deren

Mittelpunkt mit dem Kraftcentrum O zusammenfällt. Da aber die analytische Geometrie heutzutage an Stelle der Vektoren stets mit deren Componenten oder Coordinaten rechnet, bleibt mir noch übrig, Gl. (21) in zwei Componenten zu zerlegen, um damit auf die übliche Darstellungsform zu kommen. Um diesen Uebergang auf möglichst einfache Art bewirken zu können, nehme ich an, dass als Anfangspunkt der Zeitrechnung, auf den sich auch die zusammengehörigen Werthe von \mathbf{a} und \mathbf{v}_0 beziehen, ein Augenblick gewählt worden sei, in dem sich der bewegliche Punkt gerade im grössten oder auch im kleinsten Abstände vom Kraftcentrum befand. Dann steht in diesem Augenblicke die Bewegungsrichtung rechtwinklig zum Radiusvektor, d. h. es ist $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{a}$. Hiermit entsprechen die beiden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (21) schon von selbst den beiden rechtwinkligen Componenten von \mathbf{r} . Wenn wir dann noch die Richtung von \mathbf{a} zur Richtung der X -Axe wählen und die Y -Axe in die Richtung von \mathbf{v}_0 legen, erhalten wir aus Gl. (21) für die Componenten x und y von \mathbf{r} , d. h. für die Coordinaten des beweglichen Punktes die Gleichungen

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin t \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiren wir den veränderlichen Winkel mit Hülfe einer sehr bekannten Umformung, indem wir

$$\sin^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} + \cos^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}}\right)^2 = 1$$

setzen. Damit sind wir aber in der That zu der gewöhnlichen Form der Mittelpunktsleichung einer Ellipse gelangt, deren Halbaxen gleich a und gleich $v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}$ sind. Diese Ellipse bildet die gesuchte Bahn des beweglichen Punktes.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass auch bei der harmonischen Schwingung der vom Kraftcentrum gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, da diese

Eigenschaft, wie früher bewiesen wurde, allen Centralbewegungen zukommt.

§ 5. Gedämpfte Schwingungen.

Die bisher untersuchten Schwingungsbewegungen müssten, wenn sie einmal angeregt wären und dann vor allen äusseren Störungen geschützt werden könnten, unbegrenzt lange andauern, ohne jemals zu erlöschen oder sich auch nur irgendwie zu verändern. In Wirklichkeit beobachten wir aber stets, dass eine einmal angeregte Schwingung allmählich „abklingt“, d. h. dass die Schwingungsausschläge allmählich immer kleiner werden, bis sie sich zuletzt jeder Wahrnehmung entziehen. Der Grund dafür ist in besonderen Bewegungswiderständen, wie Reibung, Luftwiderstand, unvollkommene Elasticität u. s. w. zu suchen, die bisher vernachlässigt wurden. Um uns dem wirklichen Vorgange mehr zu nähern, wollen wir jetzt annehmen, dass ausser der elastischen Kraft des Feldes auch noch ein „dämpfender Widerstand“ von irgend einer Art auf den beweglichen Punkt einwirke, der in jedem Augenblicke der Bewegung des Punktes entgegen wirkt. Zugleich müssen wir aber, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, noch eine nähere Voraussetzung über das Wirkungsgesetz dieses Widerstandes einführen. Es steht nun zwar frei, die Rechnung unter verschiedenen Annahmen dieser Art durchzuführen und sich im gegebenen Falle dann für jenes Widerstandsgesetz zu entscheiden, bei dessen Wahl die Rechnungsergebnisse am besten mit der Beobachtung übereinstimmen. Man begnügt sich aber fast stets mit der einfachsten Annahme, die sich machen lässt, nämlich dass der Widerstand in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sei. Wenn der dämpfende Widerstand in der Hauptsache im Luftwiderstande besteht und die Geschwindigkeiten der Schwingungsbewegung nicht sehr erheblich sind, trifft diese Annahme, wie aus der Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Formeln mit den Beobachtungen zu schliessen ist, in der That ziemlich genau zu. Noch besser ist die Voraussetzung erfüllt, wenn die Däm-