



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1901**

Gradlinige Schwingung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

etwa eines Körpers zu, der am unteren Ende eines Drahtes aufgehängt ist und unter dem Einflusse der Torsionselasticität des Drahtes schwingt (Torsionspendel, Drehwaage). Auch selbst Vorgänge, die ganz ausserhalb des Bereichs der Mechanik liegen, bezeichnet man als harmonische Schwingungen, weil sie den gleichen zeitlichen Verlauf nehmen, so dass die in der Dynamik des materiellen Punktes dafür abgeleiteten Formeln bei entsprechender Deutung der darin vorkommenden Buchstabengrössen ohne Weiteres auf jene Fälle angewendet werden können. Dies trifft namentlich bei gewissen elektrischen Schwingungen zu. So kommt es, dass die harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes nur das einfachste Beispiel für eine Reihe verschiedener Schwingungsvorgänge bilden, bei deren Untersuchung von den hier durchzuführenden Betrachtungen mit geringen Aenderungen immer wieder Gebrauch gemacht wird.

Nach diesen Bemerkungen, die mir erforderlich schienen, um die grosse Tragweite hervorzuheben, die ihm zukommt, wende ich mich jetzt zur Behandlung des einfachen Falles, um den es sich hier handelt. Dabei möge zunächst ausserdem noch angenommen werden, dass die Schwingungen gradlinig erfolgen. Dies wird sicher geschehen, wenn der materielle Punkt etwas aus der Gleichgewichtslage verrückt und hierauf ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen wurde, denn Kraft und Geschwindigkeit sind dann während der ganzen Bewegung stets längs derselben Geraden gerichtet, auf der die Bewegung erfolgt.

Es wird nützlich sein, über das Kraftfeld, in dem sich die Schwingung vollzieht, einige mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffen zusammenhängende Erörterungen vor auszuschicken. Die Kraftlinien sind hier sämtlich gradlinig und nach dem Anfangspunkte gerichtet. Die Niveauflächen sind concentrische Kugelflächen. Die Stufenflächen der Potentialtreppe liegen um so enger zusammen, je weiter man sich vom Anfangspunkte entfernt. Wählt man die Constante  $V_0$  in Gl. (10), wenn  $O$  den Anfangspunkt bedeutet, gleich Null, so

wird das Potential  $V_A$  im Abstände  $a$  nach jener Gleichung

$$V_A = \int_0^a cx \cdot dx = c \frac{a^2}{2}.$$

Hierbei ist nämlich die Kraftlinie als Integrationsweg gewählt;  $c$  ist ein Proportionalitätsfaktor, durch dessen Multiplikation mit  $x$  die Kraft im Abstände  $x$  gefunden wird, also mit anderen Worten die Intensität des Feldes im Abstände 1 vom Anfangspunkte. Das in Gl. (10) vor dem Integrale stehende Minuszeichen fällt hier weg, denn in unserem Falle ist  $\mathfrak{P}$  nach dem Anfangspunkte gerichtet und  $d\mathfrak{s}$  ist, weil wir von  $O$  nach  $A$  hin integrieren, entgegengesetzt gerichtet. Für  $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$  erhält man daher hier  $-cx \cdot dx$ .

Der Ausdruck für das Potential  $V$  giebt zugleich die elastische Formänderungsarbeit jener Bänder oder Theile an, die den materiellen Punkt in die Ruhelage zurückzuführen suchen. In der That ist im vorliegenden Falle das Potential nur eine andere Bezeichnung für die in der Festigkeitslehre unter dem Namen Formänderungsarbeit so häufig benutzte Grösse.

Je weiter wir uns vom Anfangspunkte entfernen, desto grösser wird  $V$ . Im Verlaufe der Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes bleibt aber nach Gl. (15) die gesammte Energie  $V + L$  constant. Daraus folgt, dass der Punkt immer innerhalb jener kugelförmigen Niveaufläche bleiben muss, deren Potential grade gleich dieser Gesamtenergie ist. Schon hieraus folgt, dass die Bewegung jedenfalls in einer Schwingung bestehen muss.

Die dynamische Grundgleichung liefert sofort die Differentialgleichung der Bewegung. Ich wähle die Gerade, längs der die Schwingung erfolgt, zur  $X$ -Axe, bezeichne die Masse des materiellen Punktes mit  $m$ , den Proportionalitätsfaktor, der die Intensität des Feldes beschreibt und der als gegeben zu betrachten ist, wie vorher schon mit  $c$ ; dann lautet die Gleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx. \quad (16)$$

Durch das Minuszeichen ist dem Umstande Rechnung getragen, dass die Kraft nach dem Ursprunge geht, während die Absprünge geht, während die Abscisse  $x$  nach aussen hin wächst. — Von Gl. (16) kennt man die allgemeinste, also mit zwei Constanten versehene Lösung; sie lautet

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \quad (17)$$

worin  $A$  und  $B$  die willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten,  $\alpha$  aber eine Constante ist, die aus Gl. (16) gefunden wird. Differentiirt man nämlich  $x$  zweimal nach  $t$ , so erhält man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha^2 (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t),$$

also vom Minuszeichen abgesehen, das  $\alpha^2$ -fache von  $x$ . Nach Gl. (16) soll dagegen  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  das  $-\frac{c}{m}$ -fache von  $x$  sein. Daraus folgt, dass jedenfalls

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (18)$$

gesetzt werden muss. Wenn dies geschieht, befriedigt aber Gl. (17) die Differentialgleichung (16) identisch.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Integrationsconstanten  $A$  und  $B$  aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke möge festgesetzt werden, dass die Zeit  $t$  von einem Augenblicke an gerechnet werden soll, in dem  $x$  gleich Null war. Dazu muss nach Gl. (17) das den Cosinus der Zeit enthaltende Glied verschwinden, also  $B = 0$  sein. Es bleibt hiernach

$$x = A \sin \alpha t \quad (19)$$

und die hier noch vorkommende Integrationsconstante  $A$  hat eine einfache und leicht ersichtliche Bedeutung. Sie stellt nämlich den grössten Werth dar, den  $x$  im Verlaufe der Zeit periodisch immer wieder annimmt, wenn der Sinus gleich der Einheit wird. Hiernach ist  $A$  der grösste Schwingungsaus-  
schlag oder die Amplitude der Schwingung. Diese muss entweder direct gegeben sein oder sie muss sich aus den Anfangsbedingungen, die bekannt sein müssen, wenn man im Stande sein soll, den weiteren Verlauf der Bewegung voraus-

zusagen, berechnen lassen. Wäre z. B. die Geschwindigkeit  $v_0$  bekannt, mit der der Punkt zu Anfang der Zeit durch den Gleichgewichtspunkt ging, so hätte man aus Gl. (19)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t, \quad \text{also} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha A$$

und hieraus folgte

$$A = \frac{v_0}{\alpha} \quad \text{und schliesslich} \quad x = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Der Werth  $x$  in Gl. (19) nimmt öfters wieder die früheren Werthe an. Dies geschieht jedenfalls immer dann wieder, wenn der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um eine volle Umdrehung oder um  $2\pi$  gewachsen ist. Auch in der Zwischenzeit nimmt der Sinus noch einmal den anfänglichen Werth an. Je nach der Lage, von der man hierbei ausgeht, dauert es aber bis dahin verschieden lang. Man achtet daher nicht auf diese erste Wiederkehr des Punktes in die vorige Lage, sondern erst auf die folgende, die stets nach Zuwachs des Winkels  $\alpha t$  um  $2\pi$  erfolgt und von der ab sich nachher beim weiteren Verlaufe der Zeit der Bewegungsvorgang genau wieder in derselben Weise wiederholt. Man nennt die Zeit, die während dessen verstreicht, also jene Zeit, die einem Anwachsen von  $\alpha t$  um  $2\pi$  entspricht, die Dauer einer vollen Schwingung. Wählt man dafür den Buchstaben  $T$ , so hat man

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (20)$$

Besonders zu beachten ist hierbei, dass  $T$  ganz unabhängig von  $A$ , also von der Amplitude der Schwingung ist. Die Schwingungsdauer hängt vielmehr nur von der Masse des schwingenden Punktes und von der durch den Faktor  $c$  ausgedrückten Stärke der elastischen Kraft ab, die ihn nach der Gleichgewichtslage hinzieht. Man nennt solche Schwingungen, deren Dauer unabhängig von der Grösse des Schwingungsausfalls ist, *isochron* und die hiermit ausgedrückte Eigenschaft ist als die wichtigste der harmonischen Schwingungen zu betrachten.

Zuweilen zieht man es vor, die Schwingung nur während der Zeit zu betrachten, in der die ganze Schwingungsbahn einmal in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird, also die Rückkehr des Punktes gar nicht abzuwarten und als Schwingungsdauer nur jene Zeit zu rechnen, in der  $\sin at$  von  $-1$  bis  $+1$  wächst. Dabei nimmt der Winkel  $at$  um  $\pi$  zu und diese einfache Schwingungsdauer, wie man sie zum Unterschiede von der vorigen nennt, ist genau die Hälfte von  $T$ .

Bisher war nur von der gradlinigen harmonischen Schwingung die Rede. Der allgemeinere Fall, zu dem ich jetzt übergehe, lässt sich aber in ganz ähnlicher Weise erledigen. Er liegt immer dann vor, wenn der bewegliche Punkt zu irgend einer Zeit einmal eine Geschwindigkeit hatte, deren Richtungslinie nicht durch den Anfangspunkt ging, und weiterhin ohne äussere Einwirkung den Kräften des Feldes über-

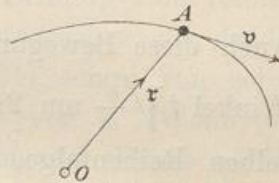


Abb. 7.

lassen wurde. In Abb. 7 bedeutet  $O$  das Kraftcentrum (oder die Gleichgewichtslage des beweglichen Punktes),  $A$  die Lage, die der Punkt zur Zeit  $t$  einnimmt und  $v$  die Geschwindigkeit. Die elastische Kraft kann hier nach Grösse und Richtung durch den Ausdruck

$$-c\mathbf{r}$$

dargestellt werden, wenn  $c$  dieselbe Bedeutung hat wie vorher. Durch das Minuszeichen wird ausgedrückt, dass die Kraft dem Radiusvektor  $\mathbf{r}$  entgegengesetzt gerichtet ist. Die dynamische Grundgleichung lautet jetzt

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -c\mathbf{r}$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{r} = \mathfrak{A} \sin at + \mathfrak{B} \cos at,$$

wenn wiederum  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  die Integrationsconstanten bedeuten, die aber jetzt als gerichtete Grössen aufzufassen sind, während  $a$  dieselbe Bedeutung wie vorher hat, also gleich dem durch Gleichung (18) angegebenen Werthe zu setzen ist. In der