Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Kraftfelder, die von Centralkräften herrühren

Dagegen lässt sich zeigen, dass alle Kraftfelder, die auf Centralkräfte zurückgeführt werden können, im ganzen Raume wirbelfrei sind. Um dies zu beweisen, nehme man zunächst an, dass nur ein einziges Anziehungscentrum vorhanden sei. Wir denken uns um dieses Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Halbmesser beschrieben. Solange sich der angezogene Punkt nur auf der Oberfläche dieser Kugel bewegt, ist die von der Kraft $\mathfrak{P}$ des Feldes geleistete Arbeit stets gleich Null, denn $\mathfrak{P}$ fällt in jedem Augenblicke in die Richtung des Radius und steht daher senkrecht zu jedem Wege, den der bewegte Punkt auf der Kugelfläche beschreiben mag. Lässt man dagegen den Punkt auf eine concentrische Kugelfläche übertreten, deren Halbmesser etwa um dr grösser ist, so ist die von $\mathfrak{P}$ geleistete Arbeit gleich $-Pdr$, wie auch der Uebergang gewählt werden möge, denn von dem beschriebenen Wege kommt immer nur die Projektion dr auf die Richtung des Radius in Betracht. Daraus folgt, dass auch immer dieselbe Arbeit geleistet wird, wenn man den bewegten Punkt von dem Abstande r_1 zum Abstande r_2 vom Anziehungscentrum überführt, ohne Rücksicht auf den Weg, der hierbei im Uebrigen eingeschlagen wird. Für einen Weg, der wieder zum Ausgangspunkte zurückführt, hebt sich hiernach die Summe aller $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ hinweg. — Dies gilt zunächst für ein einzelnes Anziehungscentrum. Hat man beliebig viele Kraftcentren, so beachte man, dass sich $\mathfrak{P}$ als die Resultirende aller von diesen ausgehenden Elementarkräfte auffassen lässt und dass die Arbeit der Resultirenden bei jeder beliebigen Bewegung gleich der algebraischen Summe aller Einzelarbeiten ist. Hiernach zerfällt $\int \mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ in ebenso viele Glieder als Kraftcentren vorhanden sind und jedes dieser Glieder ist nach dem vorhergehenden Beweise für sich gleich Null. Wir können hiernach in der That allgemein behaupten, dass alle Kraftfelder wirbelfrei sind, die aus Centralkräften zusammengesetzt sind und dass es ein ganz vergebliches, früher freilich oft versuchtes Bemühen ist, solche nicht wirbelfreie Kraftfelder, wie das, in dem z. B. der Anker einer Dynamomaschine rotirt, auf Centralkräfte zurückzuführen.

Weiterhin möge nun angenommen werden, dass das Kraftfeld in der That wenigstens innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, während es ausserhalb dieses Bezirks immer noch ein Wirbelfeld sein könnte. Ganz allgemein folgt dann aus Gl. (8), dass die Arbeit, die von der Kraft des Feldes geleistet wird, wenn der bewegliche Punkt von einem Punkte O nach einem Punkte A des Bezirks verschoben wird, unabhängig von dem dabei durchlaufenen Wege ist (falls dieser nur ganz innerhalb des Bezirkes selbst liegt).

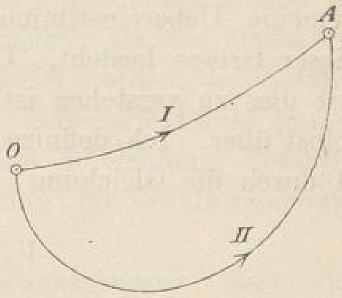

Abb. 4.

Denkt man sich nämlich etwa den Weg I in Abb. 4 im Sinne von O nach A und hierauf den Weg II im umgekehrten Sinne durchlaufen, so entsteht eine geschlossene Curve, für die nach Gl. (8)

$$\int_O^A \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{I} + \int_A^O \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{II} = 0$$

ist. Die Umkehrung des Bewegungssinnes hat einen Wechsel im Vorzeichen der Arbeitsbeträge zur Folge; hiernach ist

$$\int_A^O \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{II} = -\int_O^A \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{II},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt, folgt in der That

$$\int_O^A \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{I} = \int_O^A \overline{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}}^{II}, \tag{9}$$

was zu beweisen war. Es ist hiernach entbehrlich, den Integrationsweg durch ein besonderes Kennzeichen hervorzuheben, wie es in diesen Formeln geschehen war; im wirbelfreien Kraftfelde hat vielmehr schon der unbestimmter gelassene Ausdruck

$$\int_O^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

einen eindeutigen Werth. Der durch ihn angegebene Arbeitsbetrag heisst der Potentialunterschied zwischen den Punkten O und A. Hierbei muss ich noch erwähnen, dass keine allgemeine Uebereinstimmung über die Wahl des Vorzeichens dieser Grösse besteht. Um deutlicher hervortreten zu lassen, wie dies zu verstehen ist, gehe ich sofort zu den Potentialen selbst über. Ich definire hiernach das Potential V_A im Punkte A durch die Gleichung

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}. \tag{10}$$

Hierin ist V_O das Potential im Anfangspunkte O, dem man sich einen beliebigen Werth gegeben denken mag. Bis auf die Constante V_O, die willkürlich bleibt, ist hiermit jedem Punkte A des Bezirks ein eindeutig bestimmter Werth, den man das Potential nennt, zugeordnet. Manche Schriftsteller wählen nun anstatt des vor dem Linienintegrale stehenden Minuszeichens ein Pluszeichen und definiren damit eine von der vorigen abweichende Grösse, die ebenfalls als Potential oder Potentialfunction oder auch als Kräftefunction von ihnen bezeichnet wird. Sehr erheblich ist der Unterschied zwar nicht; immerhin hat aber die Vorzeichenwahl, der ich mich angeschlossen habe, einen nicht unerheblichen Vorzug vor der entgegengesetzten. Die Grösse

$$-\int_O^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

giebt nämlich den Arbeitsbetrag an, der von aussen her (durch eine der Feldkraft entgegengesetzte Kraft $-\mathfrak{P}$) aufgewendet werden muss, um den beweglichen materiellen Punkt entgegen der Kraft des Feldes von O nach A zu verschieben oder auch, wenn das Vorzeichen des Ausdruckes nach der vollständigen Ausrechnung negativ bleibt, den Arbeitsbetrag, der nach aussen hin während der Bewegung abgegeben werden kann. Hiernach wird V_A kleiner als V_O, wenn bei der Lagenänderung Energie nach aussen hin abgegeben, die Energie des Feldes selbst also