Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Flächensatz für die Centralbewegung

nun, weil $\mathfrak{P}$ selbst verschwindet, sei es, weil die Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ fortwährend durch den Momentenpunkt geht. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gl. (2)

$$V m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C}, \qquad (6)$$

worin $\mathfrak{C}$ eine constante gerichtete Grösse, nämlich den anfänglichen Werth des Dralls bedeutet. Gl. (6) spricht zunächst aus, dass die Bewegung im vorliegenden Falle in einer Ebene erfolgt, nämlich in jener Ebene, die rechtwinklig zu $\mathfrak{C}$ durch den Momentenpunkt gezogen ist, wie aus der Definition des statischen Momentes von $\mathfrak{v}$ oder $m\mathfrak{v}$ hervorgeht. Ferner hat das statische Moment von $\mathfrak{v}$ (auf den constanten Faktor m in Gl. (6) kommt es hier nicht weiter an) nach dieser Gleichung auch stets denselben Absolutwerth. Früher habe ich aber auseinandergesetzt, dass der Absolutwerth eines statischen Moments durch die Fläche eines Momentendreiecks zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also an verschiedenen Stellen der Bahn die an diesen eintretenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ in irgend einem Maassstabe nach Grösse und Richtung aufgetragen, so sind die Dreiecke, die diese Strecken als Grundlinien und den Momentenpunkt zur Spitze haben, alle inhaltsgleich. Einfacher wird diese Betrachtung noch, wenn man Gl. (6) nach Division mit m mit dt multiplicirt, so dass

$$V \mathfrak{v} dt \cdot \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{C}}{m} dt \qquad (7)$$

entsteht. Unter dt möge dabei eine unendlich kleine Zeitdauer verstanden werden, die ein für alle Mal während der ganzen Betrachtung denselben bestimmt gewählten Werth behält. Dann ist $\mathfrak{v}dt$ der Weg $d\mathfrak{s}$, der während dt zurückgelegt wird und das statische Moment dieses Weges ist ohne Weiteres gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks, dessen Grundlinie $d\mathfrak{s}$ und dessen Spitze der Momentenpunkt ist. Die Gleichung sagt hiernach aus, dass zu gleichen dt während des ganzen Bewegungsvorgangs gleiche Dreiecksflächen gehören.

Der grösseren Deutlichkeit wegen möge dies auch noch in einer Zeichnung zum Ausdrucke gebracht werden, wobei freilich die unendlich kleinen Wege $d\mathfrak{s}$ durch endliche Strecken angedeutet werden müssen. In Abb. 1 ist vorausgesetzt, dass $\mathfrak{P} = 0$ ist. In diesem Falle bewegt sich der materielle Punkt in einer graden Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Alle $d\mathfrak{s}$, die zu gleichen dt an verschiedenen Stellen der Bahn gehören, sind einander gleich und daraus folgt auch schon aus einfachen planimetrischen Sätzen die Gleichheit der durch Schraffirung hervorgehobenen Dreiecke. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig. — In Abb. 2 ist dagegen angenommen, dass die Kraft $\mathfrak{P}$ nicht verschwindet, dass vielmehr der materielle Punkt eine gekrümmte Bahn durchläuft, dass aber die Kraft $\mathfrak{P}$, wie es die besondere Voraussetzung verlangt, von der wir bei diesen Betrachtungen ausgingen, stets durch den Momentenpunkt O geht. In diesem Falle sind die zu gleichen Zeiten dt gehörigen Wege $d\mathfrak{s}$ an verschiedenen Stellen der Bahn verschieden gross. Dagegen sind auch hier nach Gl. (7) alle Dreiecke, die man von O aus über den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ errichten kann, von gleichem Flächeninhalte.

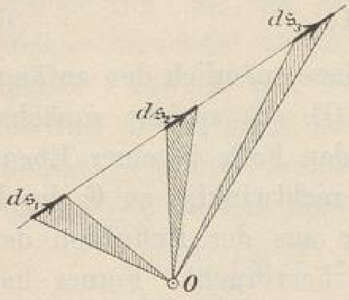

Abb. 1.

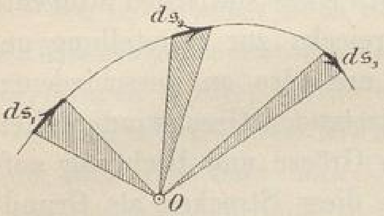

Abb. 2.

Der durch Abb. 1 erläuterte Fall hat kein weiteres Interesse; der Flächensatz wird bei ihm, wie man sagt, trivial. Anders ist es aber mit dem durch Abb. 2 dargestellten Falle, der für viele Betrachtungen von besonderer Bedeutung ist. Eine Bewegung von der hier in Frage kommenden Art wird als eine Centralbewegung bezeichnet. Dabei wird der zum Momentenpunkte gewählte Punkt O in diesem Falle auch das Centrum der Bewegung genannt, weil die am bewegten Punkte wirkende Kraft nach Voraussetzung stets durch O geht und daher auch als von O ausgehend angesehen werden kann.

Besonders hervorzuheben ist übrigens in diesem Zusammenhange, dass alle zu den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ gehörigen Dreiecksflächen auch umgekehrt nur dann unter sich gleich sein können, wenn das Moment von $\mathfrak{P}$ verschwindet, wie aus der allgemeineren Gl. (2) oder (2ª) sofort geschlossen werden kann. Wenn also die Bewegung eines materiellen Punktes (z. B. eines Himmelskörpers) betrachtet wird und es zeigt sich, dass sie erstens in einer Ebene erfolgt und dass zweitens die zu gleichen Zeittheilchen dt gehörigen und von irgend einem Punkte O aus gezogenen Dreiecke gleiche Flächen haben, so folgt daraus mit Nothwendigkeit, dass an dem bewegten materiellen Punkte eine Kraft angreift, die stets durch O hindurchgeht, und von der wir daher auch sagen können, dass sie von O ausgeht. In der That kann nur auf Grund solcher Anwendungen des Flächensatzes z. B. behauptet werden, dass die Erde bei ihrer Planetenbewegung von der Sonne angezogen wird, denn wir besitzen kein anderes Mittel, die physikalische Existenz dieser Kraft zu erkennen, als die Beobachtung der thatsächlich im Sonnensystem vor sich gehenden Bewegungen.

Für die in den Abb. 1 und 2 schraffirten Dreiecke kann man übrigens noch eine andere sehr treffende Bezeichnung einführen. Die Flächen dieser Dreiecke werden nämlich von dem Radiusvektor, der vom Momentenpunkte O aus nach dem bewegten Punkte gezogen ist, während der Bewegung vollständig bestrichen. Man kann daher den Satz auch in der Form aussprechen:

Bei der Centralbewegung beschreibt der vom Anziehungscentrum nach dem bewegten materiellen Punkte gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Umgekehrt kann jede ebene Bewegung als eine Centralbewegung aufgefasst werden, wenn man in der Bewegungsebene einen Punkt so anzugeben vermag, dass die von ihm gezogenen Radienvektoren in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben. Jener Punkt ist dann das Anziehungs- (oder Abstossungs-) Centrum.

Bei der Aussage dieser Sätze ist nur von gleichen Zeiten die Rede, ohne dass wie vorher die Beschränkung hinzugefügt wurde, dass diese Zeiten unendlich klein sein sollten. Man sieht nämlich leicht ein, dass die Uebertragung auf endliche Zeiten ohne Weiteres möglich ist. Versteht man unter n eine sehr grosse Zahl, sodass das Produkt ndt einen endlichen Werth erlangt, so werden n Elementardreiecke, die alle von gleicher Grösse sind, während dieser Zeit ndt beschrieben. Alle diese Dreiecke bilden zusammen genommen einen Sektor mit dem Centrum O, der zu dem vom bewegten Punkte inzwischen durchlaufenen Bogen gehört. Daraus folgt, dass auch irgend zwei Sektoren denselben Inhalt haben, falls sie nur gleich viel Elementardreiecke enthalten, d. h. falls sie zu gleichen Zeiten ndt gehören.

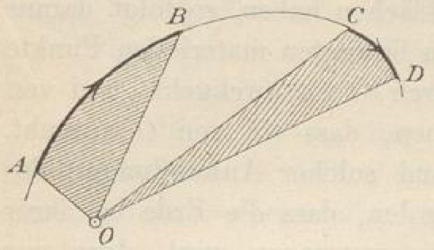

Abb. 3.

Umgekehrt vermag man bei einer Centralbewegung, die etwa die in Abb. 3 angegebene Bahn $ABCD$ durchläuft, sofort zu sagen, dass die zum Durchlaufen von AB erforderliche Zeit ebenso gross ist, als die zu CD gehörige, wenn man weiss, dass die Sektoren AOB und COD gleichen Inhalt haben. Es folgt daraus z. B. sofort, dass sich die Erde in ihrer Planetenbewegung um die Sonne am langsamsten bewegt, wenn sie den grössten Abstand von der Sonne hat, im sogenannten Aphel, und am schnellsten im Perihel, d. h., wenn sie der Sonne am nächsten steht.

Man kann schliesslich noch einen anderen, sehr bezeichnenden Ausdruck für diese Gesetzmässigkeiten wählen, indem man den Begriff der Sektorengeschwindigkeit einführt. Man versteht darunter die Fläche des Sektors, den der vom Bewegungscentrum O gezogene Radiusvektor während der Zeiteinheit überstreicht. Die Aussage des Flächensatzes lautet dann in unserem Falle einfach: Die Sektorengeschwindigkeit ist bei der Centralbewegung constant.

In allen jetzt besprochenen Fällen ist die Bezeichnung „Flächensatz“ offenbar sehr gut gewählt; ich erinnere aber