Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 45. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen übereinzustimmen scheint. — Auch der Werth für den Contractionscoefficienten, den die vorher durchgeführte Rechnung lieferte, stimmt mit den Beobachtungen nicht schlecht überein. Die Helmholtz'sche Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen ist daher als ein beachtenswerther Fortschritt der Hydrodynamik zu betrachten, wenn sie auch selbst in Hinsicht auf die physikalische Genauigkeit noch viel zu wünschen übrig lässt.

§ 45. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen.

Eine der Hauptursachen für die Abweichungen zwischen der Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeiten und den in Wirklichkeit stattfindenden Flüssigkeitsbewegungen besteht, wie schon aus den Untersuchungen des vorausgehenden Paragraphen folgt, in dem Auftreten von Wirbeln. Den physikalischen Grund für die Bildung der Wirbel erkennen wir (abgesehen von besonderen Fällen, auf die jetzt nicht weiter hingewiesen zu werden braucht) in der Flüssigkeitsreibung. Solange wir uns nicht dazu entschliessen, das einfache Bild der reibungsfreien Flüssigkeit aufzugeben, vermögen wir daher über das Entstehen der Wirbel keine hinreichende Rechenschaft zu geben. Man kann sich dagegen die Aufgabe stellen, den weiteren Verlauf der Flüssigkeitsbewegung, nachdem einmal auf irgend eine Art Wirbel in ihr entstanden sind, unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die Flüssigkeit weiterhin als reibungsfrei angesehen werden könne. Jedenfalls wird damit ein wichtiger weiterer Schritt zur Erforschung des wahren Verhaltens der Flüssigkeiten gethan, ohne dass man dabei sofort genöthigt wäre, die für die theoretische Behandlung so wesentliche Vereinfachung zu opfern, die in der Vernachlässigung der Reibungen liegt.

Ich greife hier auf die Euler'schen Gl. (213) und (206) und auf die Definitionsgleichung (217) für den Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ zurück, die ich der Uebersicht wegen hier nochmals zusammenstelle:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad [(206)]$$

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial x}(V+p)\\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial y}(V+p)\\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial z}(V+p)\end{aligned}\right\}\quad [(213)]$$

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \quad [(217)]$$

Im Allgemeinen verschwindet der Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ jetzt nirgends. In einem gegebenen Augenblicke möge innerhalb der Flüssigkeit eine Linie gezogen werden, die überall der Richtung von $\mathfrak{w}$ folgt. Eine solche Linie soll als eine Wirbellinie bezeichnet werden. Denkt man sich ferner an irgend einer Stelle einer Wirbellinie ein Flächenelement dF senkrecht zur Wirbellinie gelegt und durch alle Punkte des Umfangs von dF Wirbellinien gezogen, so schliessen diese einen Raum ein, von dem dF ein Querschnitt ist und den man als einen Wirbelfaden bezeichnet.

Um ein anschauliches Bild von der augenblicklichen Vertheilung der Wirbel zu erhalten, kann man sich eine zweite Flüssigkeit vorstellen, die einen gleichgestalteten Raum einnimmt, wie die erste und deren Geschwindigkeit in gleichgelegenen Punkten mit dem Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ in der ersten Flüssigkeit der Richtung nach übereinstimmt und der Grösse nach damit proportional ist. Dies ist nämlich möglich, ohne die Continuitätsbedingung in der zweiten Flüssigkeit zu verletzen, denn aus Gl. (217) folgt für die Componenten von $\mathfrak{w}$

$$w_1=\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}, \qquad w_2=\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}, \qquad w_3=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y},$$

und wenn man diese Werthe in die Continuitätsgleichung einsetzt, erhält man in der That

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}=0. \qquad (248)$$

Die Wirbelfäden in der ersten Flüssigkeit entsprechen den

Stromfäden in der zweiten und sie sind diesen congruent. Daraus folgt auch, dass ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit nicht aufhören kann; er muss entweder an den Grenzflächen der Flüssigkeit enden oder er muss in sich zurückkehren, so dass die Leitlinie eine geschlossene Curve bildet. Im letzten Falle wird der Wirbelfaden auch als ein Wirbelring bezeichnet. Das Produkt aus einem Querschnitte des Wirbelfadens und der Grösse des Wirbelvektors $\mathfrak{w}$ an dieser Stelle muss längs des ganzen Wirbelfadens einen constanten Werth behalten, denn bei der zweiten Flüssigkeit, die zur Erläuterung für die Vertheilung der Wirbel diente, entspricht dem Produkte $w\,dF$ die durch den Querschnitt dF gehende Flüssigkeitsmenge und diese muss der Continuitätsbedingung wegen für alle Querschnitte des Stromfadens gleich gross sein. Das Produkt $w\,dF$ wird auch als die Stärke des Wirbelfadens bezeichnet und wir können daher auch sagen, dass ein Wirbelfaden in allen Theilen seiner Länge dieselbe Stärke hat.

Man betrachte ferner zwei materielle Punkte der Flüssigkeit, die zur Zeit t unendlich benachbart auf der gleichen Wirbellinie liegen mögen. Der Abstand zwischen beiden Punkten, also das zwischen ihnen liegende Element der Wirbellinie, möge die Projektionen $\xi\,\eta\,\zeta$ auf die Coordinatenaxen haben. Man fragt nach der Richtung und Grösse der Verbindungsstrecke beider materieller Punkte nach Ablauf eines Zeitelementes dt. Der Anfangspunkt der Strecke verschiebt sich während dt in den Richtungen der Coordinatenaxen um $v_1 dt,\ v_2 dt,\ v_3 dt$; der Endpunkt dagegen in der Richtung der X-Axe um

$$\left\{v_1 + \xi \frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v_1}{\partial z}\right\} dt$$

und um entsprechende Strecken in den Richtungen der beiden anderen Coordinatenaxen. Der Unterschied zwischen den Verschiebungen beider Endpunkte der Projektion ξ der Verbindungsstrecke giebt die Aenderung an, die ξ während dt er-führt. Für die totalen Differentialquotienten von $\xi\,\eta\,\zeta$ nach der Zeit erhält man demnach

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z}\\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \tag{249}$$

Diese Gleichungen gelten für die Abstandsänderungen von irgend zwei benachbarten Punkten. Um noch auszudrücken, dass sie auf zwei zur gleichen Wirbellinie gehörige Punkte angewendet werden sollen, setze man zu Anfang des Zeitelements dt

$$\xi = \varepsilon w_1, \qquad \eta = \varepsilon w_2, \qquad \zeta = \varepsilon w_3, \tag{250}$$

wo nun ε irgend eine unendlich kleine Grösse ist. Nach Division mit ε gehen dann die vorigen Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\xi}{dt} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\eta}{dt} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\zeta}{dt} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \tag{251}$$

Wir wollen jetzt ferner berechnen, um wie viel sich die Wirbelcomponenten $w_1\,w_2\,w_3$, die zum gleichen Flüssigkeitstheilchen gehören, während der Zeit dt ändern. Man muss sich dabei vor einigen naheliegenden Fehlern hüten: zunächst kann nämlich $\frac{dw_1}{dt}$ nicht etwa aus Gl. (250) in $\frac{d\xi}{dt}$ ausgedrückt werden, denn diese Gleichungen gelten nach Voraussetzung nur zu Anfang der Zeit dt und es bleibt vorläufig ganz zweifelhaft, ob sie auch späterhin noch bestehen bleiben. Ausserdem darf $\frac{dw_1}{dt}$ nicht mit dem sich auf den constanten Ort beziehenden $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ verwechselt werden; zwischen beiden besteht vielmehr der Zusammenhang

$$\frac{d w_1}{d t} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z}.$$

Zur Berechnung von $\frac{d w_1}{d t}$ kann man natürlich nicht durch blos geometrische Betrachtungen gelangen, denn die Flüssigkeitsbewegung hängt von dem dynamischen Grundgesetze ab und wir müssen daher von den Euler'schen Gleichungen (213) ausgehen, durch die dieses zum Ausdrucke gebracht wird. Die dritte von diesen sei nach y, die zweite nach z partiell differentiirt und hierauf diese von jener subtrahirt. Dadurch heben sich die rechten Seiten von einander fort und nach Wegheben des constanten Faktors μ bleibt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Beim Auflösen der Klammern entstehen je sieben Glieder und die einander entsprechenden aus beiden Klammern vereinigen wir in passender Weise mit einander. So wird z. B.

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial w_1}{\partial t}$$
$$v_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} = v_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

u. s. f. Hierdurch geht die vorige Gleichung zunächst über in

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial z}$$
$$- \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0.$$

Die ersten vier Glieder bilden aber, wie wir schon sahen, den totalen Differentialquotienten von w_1 nach der Zeit. Die sechs übrigen bringen wir auf die rechte Seite und ordnen sie passend; nach einigen weiteren Umformungen, namentlich auf Grund der Continuitätsgleichung (206), erhalten wir hierauf der Reihe nach

$$\begin{aligned}
\frac{d w_1}{d t} &= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} - w_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_1}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Für die Differentialquotienten der beiden anderen Componenten von $\mathfrak{w}$ gelten entsprechende Gleichungen, die sich aus der letzten durch cyclische Vertauschung ableiten lassen. Im Ganzen hat man daher

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d w_1}{d t} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\\
\frac{d w_2}{d t} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\\
\frac{d w_3}{d t} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \qquad (252)$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stimmen aber genau mit jenen der Gleichungen (251) überein. Hiernach folgt auch

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\frac{d w_1}{d t}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon\frac{d w_2}{d t}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon\frac{d w_3}{d t} \qquad (253)$$

und der Vergleich mit den Gleichungen (250) lehrt, dass ε als eine der Zeit nach constante Grösse anzusehen ist und dass dann die zuerst nur für den Beginn des Zeitelements dt aufgestellten Gleichungen (250) auch weiterhin gültig bleiben. Nach Ablauf der Zeit dt ist nämlich, wie aus der Verbindung der Gleichungen (250) mit den Gleichungen (253) hervorgeht, auch noch

$$\xi + d\xi = \varepsilon(w_1 + dw_1); \qquad \eta + d\eta = \varepsilon(w_2 + dw_2);$$
$$\zeta + d\zeta = \varepsilon(w_3 + dw_3).$$

Hieraus folgt, dass zwei benachbarte materielle Punkte der Flüssigkeit, die anfänglich auf einer Wirbellinie lagen, auch noch in jedem folgenden Augenblicke auf einer Wirbellinie enthalten sind. Jedem Wirbelfaden zu Anfang der Zeit entspricht daher auch nachher noch ein Wirbelfaden, der dieselben Theilchen der Flüssigkeit umfasst. Ferner ist die Entfernung der beiden Punkte in jedem folgenden Augenblicke der Grösse des Wirbelvektors proportional. Betrachten wir nun ein Element des Wirbelfadens, das zu Anfang den Querschnitt dF hatte und dessen Länge gleich dem Abstande der beiden materiellen Punkte war. Alle Theilchen der Flüssigkeit, die zu Anfang in diesem Wirbelfadenelemente enthalten waren, bilden auch in jedem folgenden Augenblicke ein Wirbelfadenelement. Wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit müssen beide Elemente gleiches Volumen haben. Wenn sich daher wegen der Veränderung der Grösse des Wirbelvektors die Länge des Elements vergrössert oder verkleinert hat, so muss sich der Querschnitt entsprechend verkleinert oder vergrössert haben, so dass das Produkt $dF \cdot w$ constant bleibt. Der Wirbelfaden besteht daher nicht nur stets aus denselben Theilchen, sondern er hat auch in jedem folgenden Augenblicke dieselbe „Stärke" wie zu Anfang. Hiernach kann man jedem einmal in einer reibungsfreien Flüssigkeit bestehenden Wirbelfaden eine selbständige Existenz zuschreiben; er bewegt sich mit unveränderter Stärke in der Flüssigkeit sammt den Theilchen der Flüssigkeit, an die er gebunden ist, weiter und kann nur entweder durch Reibungen in der Flüssigkeit oder durch äussere Kräfte, die sich nicht von einem Potentiale ableiten lassen, vernichtet (oder neu geschaffen) werden. Der letzte Fall ist übrigens bei den gewöhnlich vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen ausgeschlossen, da als äussere Kraft bei diesen nur die Schwere in Betracht kommt, die zu einem Potentiale gehört.

Die Schlüsse, zu denen wir hier gelangten und die zuerst von Helmholtz in einer seiner berühmtesten Abhandlungen gezogen wurden, sind freilich immer noch an die Voraussetzung gebunden, dass die Flüssigkeitsreibung vernachlässigt werden könne. Eine genaue Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit ist daher auch von ihnen keineswegs zu erwarten. Immerhin stimmen sie aber in vielen Fällen schon sehr näherungsweise mit den Beobachtungen überein. Eine der bekanntesten Erscheinungen, die hierher gehören, bieten uns die Wirbelringe dar, die ein Raucher hervorzubringen vermag. Auf verhältnissmässig grosse Strecken hin halten diese Rauchringe gut zusammen und dass der Wirbelring dabei stets aus denselben Theilchen zusammengesetzt bleibt, wird in diesem Falle durch die Farbe des Rauchs gekennzeichnet. Sonst spielt der Rauch natürlich bei dem ganzen Vorgange keine Rolle; auch ohne Rauch kann man solche Wirbelringe in die Luft ausstossen, sie entziehen sich dann nur der unmittelbaren Wahrnehmung.

Eine grosse Rolle spielen die Wirbel bei den grossen Luftbewegungen in der Atmosphäre der Erde. In der Gegend der barometrischen Minima und Maxima bestehen Wirbel mit ungefähr senkrechter Axe, die auf der Erdoberfläche enden und nach oben hin in unbekannter Weise weiterlaufen, die sogenannten Cyclonen und Anticyclonen. Die verhältnissmässige Beständigkeit der Wirbel zeigt sich auch bei ihnen, indem sie sich oft Tage lang erhalten, während sie über die Erde hinwegziehen. Sie schlagen dabei mit Vorliebe gewisse Bahnen ein, die sogenannten „Zugstrassen". Uebrigens ist bei der Anwendung der Wirbellehre auf diese meteorologischen Vorgänge nicht ausser Acht zu lassen, dass sich unsere Mechanik zunächst immer nur auf den absoluten Raum bezieht, während hier die Drehung der Erde gegen den festen Raum eine wesentliche Rolle spielt. Man muss daher, um die Bewegung der Luftströmungen relativ zur Erde verfolgen zu können, die Ergänzungskräfte der Relativbewegung an den Lufttheilchen als fernere äussere Kräfte anbringen. Dabei findet man aber, dass die „zweite" (Coriolis'sche) Ergänzungskraft nicht zu einem Potentiale gehört. In Folge dessen ist hier, auch abgesehen von Reibungen, ein Grund zum Entstehen (oder Verschwinden) von Wirbeln gegeben, der sehr wesentlich mitspricht.

Ein kreisförmiger Wirbelring (ähnlich einem der vorher erwähnten Rauchringe) vermöchte sich in einer reibungsfreien Flüssigkeit, so lange nur solche Kräfte auftreten, die zu einem Potentiale gehören, in unveränderter Gestalt und mit constanter Geschwindigkeit in derselben Richtung beliebig lange fortzubewegen. Relativ zu einem Coordinatensysteme, das sich mit ihm bewegte, wäre die Bewegung stationär. Den Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen, die hierbei in Bewegung begriffen sind, entspricht eine gewisse lebendige Kraft. Auch diese Energie bewegt sich demnach mit dem Wirbelringe voran und es gehört zu den bemerkenswerthesten Eigenschaften der Wirbel, dass sie die kinetische Energie zusammenhalten und mit sich weiterführen können, ohne dass eine andere Zerstreuung derselben eintritt, als sie durch die Flüssigkeitsreibungen bedingt wird, die zu einem allmählichen Ausbreiten und zugleich zu einem Erlöschen der Wirbel führt. — Hiermit hängt auch das in neuester Zeit dem Vernehmen nach mit gutem Erfolge ausgeführte „Wetterschiessen“ zum Vertreiben der Hagelwetter zusammen. Von einem Trichter, der sich an die Mündung des Böllers anschliesst, wird ein grosser Wirbelring fortgeschleudert, der über grosse Strecken hin gut zusammenhält, die Wolke durchbricht und so die Ausbildung des labilen Gleichgewichtszustandes, der zu einem Hagelwetter zu führen pflegt, stört oder verhindert.

Auf weitere Betrachtungen, die schon von Helmholtz selbst und später von Anderen an die vorausgehenden grundlegenden Untersuchungen geknüpft wurden, kann ich mich hier nicht einlassen. Ich mache nur nochmals darauf aufmerksam, dass Helmholtz aus Gründen, die ich nicht auseinander zu setzen brauche und die auch das Wesen der Sache meiner Ansicht nach gar nicht berühren, an Stelle des Wirbelvektors $\mathfrak{w}$ überall nur die Hälfte davon als Maass des Wirbels gewählt hat. Mir scheint es, dass in den Erwägungen, die dazu führten, nur eine für das Verständniss nutzlose Erschwerung der Untersuchung liegt und ich habe sie daher — freilich im Gegensatze zu fast Allen, die bisher über diesen Gegenstand geschrieben haben — einfach weggelassen. Die Gültigkeit aller vorausgehenden Schlüsse wird von dem Hinzutreten eines constanten Faktors, der im Uebrigen auch ganz beliebig gewählt werden könnte, zu dem Wirbelvektor behufs Bildung eines Maasses für den Wirbel, natürlich gar nicht berührt.

§ 46. Wellenbewegungen.

Zu den bekanntesten Flüssigkeitsbewegungen gehören die Wellen, die sich nach Gleichgewichtsstörungen auf der Oberfläche weit ausgedehnter und tiefer Wasserbecken ausbilden. Ein kleines Stückchen Holz, das auf der Wasseroberfläche schwimmt und deren Bewegungen mitmacht, lehrt uns, dass die Wassertheilchen keineswegs in dauernd fortschreitender Bewegung begriffen sind, wie dies nach flüchtiger Beobachtung vermuthet werden könnte, sondern dass sie — wenigstens bei regelmässiger Ausbildung der Wellen — in sich zurücklaufende Curven beschreiben. Im Allgemeinen bleiben demnach die Wassertheilchen an ihrem Orte; sie heben sich, wenn ein Wellenkamm naht, um sich gleich darauf wieder zu senken und beim Vorbeischreiten eines Wellenthals ihren tiefsten Stand zu erreichen. Nur die Erscheinung oder „Phase", d. h. die geometrisch wohldefinirte Oberflächenform ist im Fortschreiten begriffen, aber nicht die Materie, aus der sie gebildet ist.

Aus blossen Hebungen und Senkungen kann indessen die Bewegung des Wassers in den Wellen nicht bestehen, da eine solche Bewegung im Widerspruche mit der Continuitätsbedingung wäre. Man denke sich nämlich durch eine lothrechte Mantelfläche einen cylindrischen Wasserkörper von beliebiger Grundfläche, der bis zum Boden hin reicht, abgegrenzt. Wenn keine Horizontalcomponenten der Geschwindigkeit vorkämen, würde aus diesem Raume Wasser weder austreten noch eintreten und da das in ihm vorhandene Wasser stets den gleichen Raum einnehmen muss, folgt, dass bei festem Boden auch der