



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 40. Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfrei
Bewegung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

§ 40. Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfreie Bewegung.

Die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen werden für den Fall der wirbelfreien Bewegung am besten so umgeformt, dass alle Geschwindigkeitscomponenten im Geschwindigkeitspotentiale Φ mit Hülfe der Gl. (216) ausgedrückt werden. Sie vereinfachen sich dann erheblich. Die Continuitätsgleichung (206) nimmt dann die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (220)$$

an, wofür man mit Benutzung des schon von früher her bekannten Laplace'schen Operators ∇^2 kürzer

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (221)$$

schreiben kann. Ferner findet man für den in Gl. (210) angegebenen Ausdruck für die Beschleunigungscomponente in der X-Axe, nämlich

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

nach Einsetzen von

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

jetzt

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}.$$

Die drei letzten Glieder in diesem Ausdrücke bilden den partiellen Differentialquotienten nach x von

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ oder von } \frac{1}{2} \mathfrak{u}^2,$$

wenn \mathfrak{u} wieder die Gesamtgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle nach Grösse und Richtung bedeutet, wobei man beachten möge, dass das Quadrat (oder das innere Produkt mit sich selbst) einer gerichteten Grösse eine Grösse ohne Richtung angiebt. Setzt man dies ein, so erhält man die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (222)$$

Die in Gl. (213) zusammengestellten Euler'schen Gleichungen gehen nun — immer unter der Voraussetzung, dass die äussere Massenkraft von einem Potentiale V abgeleitet werden kann — über in

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial x} (V + p) \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial y} (V + p) \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial z} (V + p) \end{aligned} \right\}. \quad (223)$$

Da nun μ für die raumbeständige Flüssigkeit, um die es sich bei diesen Betrachtungen allein handelt, constant ist, lassen sich die Gl. (223) zu einer einzigen Integralgleichung zusammenfassen. Sie sprechen ja in der That nur aus, dass sich die Grössen, deren Differentialquotienten nach x , y und z mit einander übereinstimmen, nur um eine Grösse von einander unterscheiden können, die von diesen Veränderlichen unabhängig ist, während sie von t abhängig sein kann. Bezeichnen wir diese Grösse mit $f(t)$, so liefert die Integration der Gl. (223)

$$\mu \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} + V + p = f(t). \quad (224)$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Beziehung bei der stationären Flüssigkeitsströmung, also bei einer Bewegung, die sich dauernd in der gleichen Weise fortsetzt. Dann sind \mathbf{v} , Φ , p zwar immer noch mit dem Orte veränderlich, an jedem Punkte des festen Raumes bleiben sie aber der Zeit nach constant. Der Differentialquotient von Φ verschwindet dann in der vorausgehenden Gleichung und auch $f(t)$ muss der Zeit nach constant, also überhaupt eine Constante sein, weil alle

übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen von t unabhängig sind. Für die stationäre wirbelfreie Strömung hat man daher die einfache Beziehung

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + V + p = C \quad (225)$$

oder in Worten: die Summe aus der kinetischen Energie, dem Potentiale der äusseren Kräfte (d. h. der potentiellen Energie) und dem Flüssigkeitsdrucke hat zu jeder Zeit und für alle Stellen des Raumes denselben Werth, wenn man diese Grössen auf die Raumeinheit bzw. auf die Flächeneinheit bezieht. Dieses Resultat stimmt nahezu überein mit einem, das schon im ersten Bande § 56 auf viel einfacherem Wege gefunden und durch Gl. (139), 2. Aufl., ausgedrückt wurde. In einer Hinsicht besteht indessen zwischen beiden Resultaten doch ein sehr wesentlicher Unterschied. Das frühere Resultat galt nur für die Veränderlichkeit des Druckes in dem gleichen Stromfaden und es bleibt in diesem begrenzten Umfange, wie aus der Ableitung hervorgeht, auch dann noch gültig, wenn die Bewegung nicht wirbelfrei ist, falls dabei nur von der Flüssigkeitsreibung abgesehen werden kann. Gl. (225) ist insofern viel allgemeiner gültig, als sie die Veränderlichkeit des Druckes auch dann noch angiebt, wenn man von einem Punkte eines Stromfadens zu einem Punkte irgend eines anderen Stromfadens übergeht. Andererseits ist dagegen die Gültigkeit dieser erweiterten Beziehung an die Bedingung geknüpft, dass die Bewegung wirbelfrei ist. Ich bitte auf diesen wesentlichen Unterschied sorgfältig zu achten, da der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck bei der Theorie der hydraulischen Motoren in der theoretischen Maschinenlehre sehr häufig zum Ausgangspunkte der ganzen Entwicklung gemacht wird.

Schliesslich gebe ich hier noch den Beweis für den schon im vorigen Paragraphen erwähnten Satz von Lagrange. Dazu berechne ich die Veränderungen, die die Geschwindigkeits-Componenten an irgend einer fest angenommenen Stelle des

Raumes im Laufe der Zeit erfahren. Zunächst hat man nach Gl. (211)

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{dv_1}{dt} - \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)$$

oder auch nach den Gleichungen (213), indem man für die Beschleunigung-Componente $\frac{dv_1}{dt}$ ihren Werth nach der dynamischen Grundgleichung einsetzt und dabei annimmt, dass sich die äussere Massenkraft von einem Potentiale V ableiten lasse,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (V + p) - \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right).$$

Dies gilt noch allgemein: auch für die Wirbelbewegung. Setzt man aber nun ferner voraus, dass in einem bestimmten Augenblicke, der zum Ausgangspunkte der Untersuchung gewählt wird, die Bewegung im ganzen Raume wirbelfrei war, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung, dass sie auch weiterhin wirbelfrei bleiben muss. Jedenfalls kann man nämlich unter der genannten Voraussetzung die Geschwindigkeiten zu Anfang der Zeit aus einem Potentiale Φ ableiten, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (V + p) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} (V + p) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} (V + p) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \end{aligned}$$

und entsprechende Gleichungen gelten auch für die Aenderungen von v_2 und v_3 mit der Zeit. Damit ist aber gezeigt, dass sich auch nach Ablauf eines Zeitelementes dt die Geschwindigkeits-Componenten immer noch von einem Geschwindigkeitspotentiale ableiten lassen und zwar hat das Potential alsdann den Werth

$$\Phi + d\Phi = \Phi - \left(\frac{1}{\mu} (V + p) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dt,$$

denn hieraus folgt in der That der vorher aufgestellte Werth von $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, ebenso auch der von $\frac{\partial v_2}{\partial t}$ und von $\frac{\partial v_3}{\partial t}$. Wenn sich

die Geschwindigkeiten nach dt aber immer noch von einem Potentiale ableiten lassen, so ist die Bewegung auch noch wirbelfrei geblieben. — Was ferner von dem einen Zeitelemente dt gilt, lässt sich ebenso auf alle folgenden übertragen und die Bewegung muss daher immer wirbelfrei bleiben. Damit ist der Satz von Lagrange bewiesen, der noch in den Worten ausgesprochen werden soll:

Wenn die Bewegung einer raumbeständigen und reibungsfreien Flüssigkeit, auf die von aussen her nur solche Massenkräfte einwirken, die sich (wie das Gewicht) von einem Potentiale ableiten lassen, zu irgend einer Zeit wirbelfrei war, so bleibt sie auch weiterhin wirbelfrei.

Erst durch diesen Satz erlangen die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung die ihr in der Hydrodynamik mit Recht eingeräumte Bedeutung. Es ist nur zu billigen, dass man sich zunächst Rechenschaft darüber zu geben sucht, was geschehen müsste, wenn die Zähigkeit nicht in Betracht käme. Man darf dabei freilich nicht vergessen, dass keine genaue Uebereinstimmung zwischen diesem einfachsten Falle und dem wirklichen Bewegungsvorgange erwartet werden kann. Da man wegen des Bestehens eines Geschwindigkeitspotentials die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung weit einfacher durchführen kann, als im anderen Falle, gelangt man indessen mit verhältnissmässig geringer Mühe zu Resultaten, die zwar nicht als genau angesehen werden dürfen, die aber wegen des Vergleichs, den sie gestatten, immerhin sehr zu schätzen sind.

§ 41. Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit.

Ein fester kugelförmiger Körper möge sich in einer Flüssigkeit gradlinig mit constanter Geschwindigkeit bewegen. Es fragt sich, was für eine Kraft von aussen her an ihm wirken muss, um diese Bewegung zu Stande zu bringen. Dabei soll angenommen werden, dass sich der Körper hinlänglich