Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 33. Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

lebendige Kraft oder vielmehr die Aenderung, die die Formänderungsarbeit etwa erfährt, gegenüber der Aenderung der lebendigen Kraft oder gegenüber der Arbeit der äusseren Kräfte vollständig vernachlässigt werden kann. Ferner ist auch die Arbeit der inneren Kräfte, die zwischen verschiedenen Körpern des Systems auftreten, überall gleich Null gesetzt. Das ist aber nur dann streng richtig, wenn zunächst keine Fernkräfte zwischen den einzelnen Gliedern auftreten und wenn ferner auch keine Reibungswiderstände zu berücksichtigen sind. Hätte man Reibungen in den Führungen oder Gelenken, so müsste natürlich ein Theil der Arbeit $F_i \delta q_i$ bei der virtuellen Verschiebung δq_i auf die Ueberwindung der Reibungen verwendet werden. Man kann sich aber in solchen Fällen damit helfen, dass man etwaige Fernkräfte (z. B. Abstossungen zwischen Magneten, wenn solche im Systeme vorkommen) nicht zu den inneren Kräften rechnet, sondern sie so behandelt, als wenn sie von aussen her angebracht wären, sie also in die F mit einrechnet. Dasselbe gilt auch von den Reibungen.

§ 33. Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben.

Das Verfahren bei der Benutzung dieser Gleichungen gleicht, wie ich schon vorher bemerkte, vollständig dem aus der Festigkeitslehre von der Castigliano'schen Methode her bekannten. Wie dort zuerst für die Formänderungsarbeit, stellt man hier vor Allem einen Ausdruck für die lebendige Kraft in den gewählten allgemeinen Coordinaten auf. Dann bildet man die in Gl. (174) vorgeschriebenen Differentialquotienten und setzt ihre Differenz gleich dem aus den Bedingungen der Aufgabe bekannten Werthe von F.

Es wird am besten sein, wenn ich dieses Verfahren zunächst an einem möglichst einfach gewählten Beispiele vorführe, für das wir die Lösung schon früher auf einfacherem Wege gefunden haben. Ich wähle dazu das physische Pendel, also einen zwangläufigen Mechanismus. Die die augenblickliche Stellung des Systems beschreibende Coordinate sei der

Winkel φ, den der nach dem Schwerpunkte vom Aufhängepunkte gezogene Radiusvektor mit der Lothrichtung bildet. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{d\varphi}{dt}$ oder $\dot{\varphi}$ und die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta\,\dot{\varphi}^2.$$

Die Lagrange'sche Gleichung lautet demnach hier

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Hier ist L unabhängig von φ und man hat daher

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\,\dot{\varphi};$$

womit die Lagrange'sche Gleichung übergeht in

$$F = \Theta\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Die auf die Coordinate φ reducirte äussere Kraft wird hier, da es sich um eine Drehung handelt, durch das vom Aufhängepunkte aus genommene statische Moment des Gewichts angegeben. Vergrössert man nämlich φ um $\delta\varphi$, so leistet die einzige äussere Kraft, die auf den Mechanismus einwirkt, nämlich das Gewicht Q, eine Arbeit von der Grösse $Qs\delta\varphi \sin\varphi$. Das Vorzeichen der Arbeitsleistung ist negativ, da sich der Schwerpunkt hebt, wenn φ wächst. Man hat daher

$$F = -\,Qs \sin\varphi$$

und nach Einsetzen dieses Werthes geht die Gleichung von Lagrange über in die uns schon von früher her bekannte Differentialgleichung für die Pendelbewegung

$$\Theta\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,Qs \sin\varphi.$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung hat nichts mehr mit der hier zu erläuternden Methode zu thun; sie muss vielmehr genau so wie früher erfolgen.

Der Vortheil der Methode kann sich aber, wie schon bemerkt, erst dann deutlicher herausstellen, wenn man ein System mit wenigstens zwei Freiheitsgraden wählt. Als Beispiel dafür behandle ich das in Abb. 56 dargestellte System, das aus einem physischen Pendel besteht, an dem ein zweites drehbar aufgehängt ist. Der starre Körper A soll im Gelenke α drehbar gegen ein festes Gestell gelagert sein, während sich der Körper B (ebenfalls reibungsfrei) gegen A um die Drehaxe β drehen kann, die zu α parallel ist. Man kann sich etwa unter A eine Glocke und unter B ihren Klöppel vorstellen und da grade dieser Fall schon öfters besprochen wurde, pflegt man das Problem auch kurz als das von Glocke und Klöppel zu bezeichnen. Der Schwerpunkt S von A soll auf der Verbindungsgraden der Gelenke liegen; es ist aber nicht nöthig, dass er zwischen α und β liegt, wie er in der Abbildung gezeichnet ist, vielmehr kann der Schwerpunktsabstand s auch grösser als der Abstand l zwischen beiden Gelenken sein. Der Schwerpunkt von B ist mit S_1 bezeichnet. Als allgemeine Coordinaten des Systems wählen wir die in der Abbildung mit φ und ψ bezeichneten Winkel, durch die die augenblickliche Lage offenbar vollständig beschrieben wird.

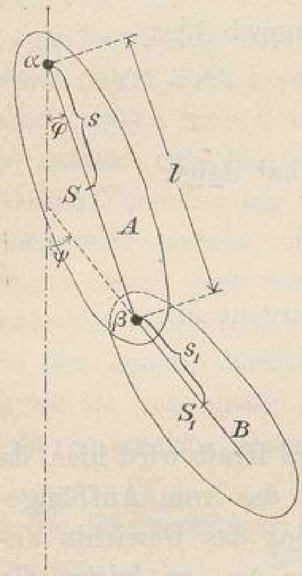

Abb. 56.

Zunächt haben wir hier wieder den Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems aufzustellen. Für die lebendige Kraft von A erhalten wir denselben Werth wie im vorigen Beispiele. Die lebendige Kraft von B lässt sich aus zwei Theilen zusammensetzen, von denen einer die durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit v bedingte Translationsenergie und der andere die zur Drehung um die Schwerpunktsaxe gehörige Rotationsenergie darstellt. Die letzte ist gleich $\frac{1}{2}\,\Theta_1\,\dot{\psi}^2$, wenn Θ_1 das Trägheitsmoment von B für die Schwerpunktsaxe angiebt, während Θ wie vorher das Trägheitsmoment von A für die Aufhängeaxe α bedeutet.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit v von S_1 beachte man, dass die Bewegung von B auch als ein Zusammenwirken einer Translation mit der Geschwindigkeit von β und einer Drehung um β aufgefasst werden kann. Bei der Translation hat jeder Punkt von B und daher auch S_1 eine Geschwindigkeit von der Grösse $l\dot{\varphi}$, die senkrecht zu l gerichtet ist und bei der Rotation um β hat S_1 eine zu s_1 senkrecht gerichtete Geschwindigkeit von der Grösse $s_1\dot{\psi}$. Die wirkliche Geschwindigkeit von S_1 ist die geometrische Summe aus diesen beiden Componenten. Abb. 57 zeigt das Dreieck, das man bei der geometrischen Summirung erhält. Auf die Richtung von v kommt es bei der lebendigen Kraft nicht an, sondern nur auf den Werth v^2 und diesen erhalten wir aus dem Dreiecke zu

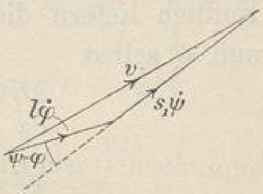

Abb. 57.

$$v^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi).$$

Für die lebendige Kraft des ganzen Systems erhalten wir daher den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_1\dot{\psi}^2$$

$$+ \frac{Q_1}{2g}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)\right), \qquad (175)$$

wobei unter Q_1 das Gewicht des Klöppels zu verstehen ist.

Der nächste Schritt besteht darin, an diesem Ausdrucke die in den Lagrange'schen Gleichungen vorgeschriebenen Differentiationen vorzunehmen. Wir erhalten zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\dot{\varphi} + \frac{Q_1}{g}\,l^2\dot{\varphi} + \frac{Q_1}{g}\,ls_1\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g}\,l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g}\,ls_1\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi)$$

$$+ \frac{Q_1}{g}\,ls_1\frac{d\psi}{dt}\sin(\psi - \varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Ganz ebenso findet man

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \Theta_1 \dot\psi + \frac{Q_1}{g} s_1^2 \dot\psi + \frac{Q_1}{g} l s_1 \dot\varphi \cos(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \Theta_1 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g} s_1^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos(\psi - \varphi)$$
$$+ \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \sin(\psi - \varphi) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Endlich liefern die Differentiationen nach den Coordinaten φ und ψ selbst

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \sin(\psi - \varphi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \sin(\psi - \varphi).$$

Nachdem die Differentialquotienten gebildet sind, stellen wir die Werthe F_φ und F_ψ der auf die Coordinaten φ und ψ reducirten äusseren Kräfte auf. Wenn sich nur ψ um $\delta\psi$ ändert, leistet von äusseren Kräften nur das Gewicht des Klöppels eine Arbeit und wir erhalten daher genau wie im vorhergehenden Beispiele

$$F_\psi = -Q_1 s_1 \sin\psi.$$

Wenn sich dagegen φ um $\delta\varphi$ vergrössert und ψ constant bleibt, hebt sich sowohl der Schwerpunkt der Glocke als der Schwerpunkt des Klöppels. Dabei ist wohl zu beachten, dass sich der Klöppel nicht etwa in relativer Ruhe zur Glocke befindet, denn dabei würde sich ja auch ψ ändern. Vielmehr entspricht der virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ eine Translation des Klöppels, bei der sich der Schwerpunkt um ebensoviel hebt, als das Gelenk β. Wir erhalten daher

$$F_\varphi = -Qs\sin\varphi - Q_1 l \sin\varphi,$$

wobei mit Q das Gewicht der Glocke bezeichnet ist.

Jetzt ist alles so weit vorbereitet, dass wir die gefundenen Ausdrücke in die Lagrange'schen Gleichungen einsetzen können. Diese lauten mit den hier eingeführten Bezeichnungen

$$F_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi},$$

$$F_\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

und nach Einsetzen gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2\right) \\ &\quad + \frac{d^2\psi}{dt^2}\,\frac{Q_1}{g}\,ls_1\cos(\psi-\varphi) - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\frac{Q_1}{g}\,ls_1\sin(\psi-\varphi) \\ -\sin\psi\cdot Q_1 s_1 &= \frac{d^2\psi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1^2\right) \\ &\quad + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\frac{Q_1}{g}\,ls_1\cos(\psi-\varphi) + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{Q_1}{g}\,ls_1\sin(\psi-\varphi) \end{aligned}\right\} \cdot (176)$$

Hiermit ist das durch die Anwendung der Gleichungen von Lagrange angestrebte Ziel erreicht; wir sind jetzt im Besitze der Differentialgleichungen, durch die die Abhängigkeit der Variabeln φ und ψ von der Zeit beschrieben wird. Freilich sind wir damit noch nicht zur genauen Kenntniss des Bewegungsvorgangs gelangt; dazu müsste man die Gleichungen zuvor integriren können. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von mehreren Freiheitsgraden sind nun freilich gewöhnlich, wie auch im hier vorliegenden Falle, so verwickelt, dass man sie nicht allgemein zu integriren vermag. Das hindert jedoch nicht, dass man über manche Fragen, die von besonderem Interesse sind, Aufschluss aus den Differentialgleichungen zu erhalten vermag, ohne dass diese zuvor integrirt zu werden brauchten.

Ehe ich hierauf näher eingehe, möchte ich noch darauf hinweisen, wie die Bewegungsgleichungen des Systems aufzustellen sind, wenn man die Gleichungen von Lagrange und die ihnen verwandten Sätze nicht benutzen will. Hierzu steht zunächst der Satz von der lebendigen Kraft zur Verfügung. Man addire zu dem in Gl. (175) aufgestellten Werthe von L die potentielle Energie V, die dadurch zu Stande kommt, dass die Schwerpunkte S und S_1 über ihrer tiefsten Lage liegen. Man hat dafür

$$V = Qs\,(1-\cos\varphi) + Q_1 l\,(1-\cos\varphi) + Q_1 s_1\,(1-\cos\psi).$$

Die Gleichung $L + V = \text{Const.}$ giebt sofort eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und ψ; sie bildet, wie man sagen kann, ein erstes Integral der Gl. (176). Eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ kann man etwa aus dem Flächensatze erhalten. Man berechne den Drall des Systems für die Axe α. Der Drall wird, wie man leicht findet,

$$B = \frac{d\varphi}{dt}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g} l^2 + \frac{Q_1}{g} l s_1 \cos(\psi - \varphi)\right)$$
$$+ \frac{d\psi}{dt}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g} s_1^2 + \frac{Q_1}{g} s_1 l \cos(\psi - \varphi)\right).$$

Das statische Moment der äusseren Kräfte, d. h. der beiden Gewichte für die Axe α lässt sich ebenfalls sofort angeben; es ist nebenbei bemerkt, gleich $F_\varphi + F_\psi$. Nach dem Flächensatze ist nun $\frac{dB}{dt}$ gleich diesem Momente. Dies liefert eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ und zwar jene Gleichung, die durch Addition der Gl. (176) zu einander entsteht.

Ein anderes Verfahren zur Ableitung der Bewegungsgleichungen besteht in der unmittelbaren Anwendung des Princips von d'Alembert. Man bringt an jedem Massentheilchen die Trägheitskräfte an, die sich in den Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken lassen und schreibt an, dass beide Körper A und B im Gleichgewichte sein müssen, womit man sofort die Bewegungsgleichungen erhält.

Diese Vergleiche zeigen, dass die Gleichungen von Lagrange in der That für jenen vollständig entbehrlich sind, der die in den ersten beiden Abschnitten dieses Bandes behandelten Lehren beherrscht. Freilich lässt sich aber andererseits auch nicht verkennen, dass die Anwendung der Methode von Lagrange zwar einige Ansprüche an die Rechengewandtheit stellt, dass sie aber ein schärferes Nachdenken, das sich bei den anderen Wegen nöthig macht, nicht verlangt. Insofern und in Bezug auf die allgemeine Anwendbarkeit des gleichen Verfahrens in den verschiedensten Fällen ist sie den früher entwickelten und von mir im allgemeinen bevorzugten Verfahren ohne Zweifel überlegen.

Ich gehe jetzt zu den Schlüssen über, die sich aus den Differentialgleichungen (176) ziehen lassen. Nimmt man an, dass die Masse des Klöppels gegenüber der Glockenmasse zu vernachlässigen ist, so wird dies in den Gleichungen dadurch ausgedrückt, dass man Q_1 und Θ_1 gleich Null setzt. Die zweite Gleichung hebt sich dann vollständig weg und die erste geht über in

$$-\sin\varphi \cdot Qs = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

d. h. in die Gleichung des gewöhnlichen Pendels, was ja auch von vornherein zu erwarten war. Betrachtet man die Lösung dieser Gleichung als genau genug auch dann, wenn Q_1 und Θ_1 zwar klein, aber nicht gleich Null sind, so lässt sich die zweite der Gl. (176) benutzen, um nachher auch noch ψ zu bestimmen, wenn man φ als bekannte Function der Zeit einsetzt.

Vor allen anderen aber ist die Frage von Interesse, unter welchen Umständen es kommen kann, dass der Klöppel gar nicht an die Glocke anschlägt. Diese Frage ist nicht willkürlich aufgeworfen worden, sondern man ist auf die Möglichkeit, dass die Glocke nicht läutet, obschon sie in Pendelschwingungen versetzt wird, erst durch die Erfahrung gekommen, die man mit der Kölner Kaiserglocke gemacht hat. Hierdurch ist das Problem von „Glocke und Klöppel" zu einer gewissen Berühmtheit gelangt und ein Lehrbuch der Mechanik, das sich überhaupt mit solchen Fragen beschäftigt, kann nicht gut über dieses Beispiel hinweggehen.

Das Anschlagen des Klöppels an die Glocke hängt von der Relativbewegung zwischen beiden Körpern ab; der Klöppel schlägt an, wenn der Winkel $\psi - \varphi$ einen gewissen positiven oder negativen Werth erlangt hat. Es kann aber sein, dass $\psi - \varphi$ diesen Werth nach den Gl. (176) mit Rücksicht auf die gegebenen Anfangsbedingungen überhaupt nicht erreicht. So könnte $\psi - \varphi$ stets einen constanten Werth γ behalten, der kleiner ist, als jener, bei dem sich Glocke und Klöppel berühren. Wir wollen untersuchen, ob und wann dies eintrifft. Mit

$$\psi = \gamma + \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

gehen die Gl. (176) über in

$$
\begin{aligned}
-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right)\\
&\quad - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma\\
-\sin(\gamma + \varphi)\,Q_1 s_1 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1^{\,2} + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right)\\
&\quad + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma.
\end{aligned}
$$

Nur dann, wenn diese beiden Gleichungen durch passende Wahl der Constanten identisch mit einander werden, kann sich das System wie ein starrer Körper bewegen. Wir sehen, dass dazu jedenfalls $\gamma = 0$ sein muss; also nur wenn der Klöppel in die Glockenaxe fällt, können beide miteinander schwingen, ohne sich gegeneinander zu drehen. Von den anderen Fällen, dass etwa s_1 oder l oder Q_1 verschwinden, sehen wir nämlich ab, weil dadurch das Problem thatsächlich in ein anderes übergeführt würde. — Mit $\gamma = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$
\begin{aligned}
-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right)\\
-\sin\varphi\cdot Q_1 s_1 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1^{\,2} + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right)
\end{aligned}
$$

und identisch werden beide, wenn zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung

$$
\frac{\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Qs + Q_1 l} = \frac{\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1^{\,2} + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Q_1 s_1} \tag{177}
$$

erfüllt ist. Man kann daher zu jeder gegebenen Glocke immer auf sehr verschiedene Arten einen Klöppel construiren, der nicht anschlägt. Zwischen dem Gewichte Q_1, dem Trägheitsmomente für den Schwerpunkt Θ_1 und dem Schwerpunktsabstande s_1, also zwischen den drei Grössen, die sich auf den zu construirenden Klöppel beziehen, braucht nämlich nur die einzige Bedingungsgleichung (177) erfüllt zu sein, so dass man zwei der Grössen noch willkürlich wählen kann.

Betrachtet man den Klöppel als einen materiellen Punkt von geringem Gewichte, der durch eine gewichtslose Stange an der Glocke aufgehängt ist, so kann man in Gl. (177) $\Theta_1 = 0$ setzen und Q_1 gegenüber Q vernachlässigen. Gl. (177) geht dann über in

$$\frac{\Theta}{Qs} = \frac{s_1 + l}{g}$$

oder, wenn man die reducirte Pendellänge l_{red} der Glocke

$$l_{\text{red}} = \frac{\Theta}{\frac{Q}{g} \cdot s}$$

einführt, einfacher

$$l_{\text{red}} = s_1 + l,$$

d. h. der als materieller Punkt aufgefasste Klöppel muss mit dem Schwingungsmittelpunkte der Glocke zusammenfallen. — Im Uebrigen sind aber die zuletzt eingeführten Vernachlässigungen gar nicht nöthig, da man auch mit der genauen Gl. (177) ohne Schwierigkeit rechnen kann.

Wenn Gl. (177) erfüllt ist, kann die jetzt untersuchte Bewegungsform eintreten. Sie muss aber nicht eintreten dies hängt vielmehr von den Anfangsbedingungen ab. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass der Klöppel auch bei einer Glocke, für die Gl. (177) erfüllt ist, anschlägt; es wird aber leicht ein Versagen vorkommen und daher muss eine solche Anordnung jedenfalls vermieden werden.

Bis jetzt ist nur der Fall besprochen worden, dass ψ dauernd gleich φ bleibt. Ein Versagen der Glocke tritt aber auch schon dann ein, wenn $\psi - \varphi$ nicht dauernd gleich Null ist, sondern nur innerhalb enger Grenzen schwankt. Die Bedingung hierfür lässt sich nicht näher angeben, da man die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Systems nicht zu integriren vermag. Es lässt sich aber voraussehen, dass dieser Fall um so eher eintreten wird, je näher Gl. (177) erfüllt ist. Man thut daher gut, die in Gl. (177) vorkommenden Constanten so zu wählen, dass sich die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Verhältnisse ziemlich erheblich von einander unterscheiden.