



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1901**

§. 32. Die Gleichungen von Lagrange

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

## Vierter Abschnitt.

### Dynamik zusammengesetzter Systeme.

#### § 32. Die Gleichungen von Lagrange.

In der analytischen Mechanik, wie sie in mathematischen Vorlesungen vorgetragen zu werden pflegt, spielen einige allgemeine Sätze, die im Wesentlichen gleichwerthig mit einander sind und die alle dasselbe Ziel verfolgen, eine grosse Rolle. Ich bin bisher nicht auf sie eingegangen, werde aber nun einen kurzen Abriss davon geben. Um zunächst die Stellung dieser Sätze zur Mechanik verständlich zu machen, erinnere ich die Leser des dritten Bandes an die Sätze über die Formänderungsarbeit. Die Castigliano'sche Methode, Aufgaben der Festigkeitslehre mit Hülfe von Differentiationen an der zuvor berechneten Formänderungsarbeit zu lösen, entspricht genau dem, was hier beabsichtigt wird. Auch die Vorzüge und die Nachteile eines solchen Verfahrens sind hier dieselben wie dort. In dieser Hinsicht erinnere ich daran, dass die Castigliano'sche Methode den Vorzug hatte, dass sie ein ganz bestimmtes Verfahren, das ein für alle Mal anwendbar bleibt, vorschreibt, durch dessen Befolgung man, ohne viel nachzudenken, ganz von selbst zur richtigen Lösung geführt wird. Als Nachtheil muss es aber bezeichnet werden, dass man hierbei leicht den Ueberblick über den physikalischen Zusammenhang der Grössen, mit denen man rechnet, aus den Augen verliert; man sieht wohl, was schliesslich geschieht, giebt sich aber nicht eingehend Rechenschaft darüber, warum und wie es geschieht. Nun mag man vielleicht sagen, dass dies gleichgültig sei, wenn

man nur erfährt, was man in letzter Linie wissen wollte. Ich kann dem aber nicht zustimmen. Bei allen Anwendungen, die man von der Mechanik machen will, muss man nämlich vereinfachende Voraussetzungen über die Bedingungen einführen, denen das System unterworfen ist. Es ist nicht möglich, alle Nebenumstände vollständig in der Rechnung zu berücksichtigen und es ist daher von der grössten Wichtigkeit, dass man ein zutreffendes Urtheil über den Einfluss der nicht berücksichtigten Nebenumstände gewinnt. Bei der Behandlung einer neuen Aufgabe, bei der man sich nicht an vorhandene Muster anlehnen kann, ist die richtige Abschätzung dessen, was beachtet werden muss und dessen, was ohne erheblichen Fehler ausser Acht gelassen werden darf, oft genug der schwierigste Theil der ganzen Arbeit. Eine allgemeine Anleitung hierfür zu geben, ist zwar nicht möglich; wohl aber ist klar, dass man dazu um so eher im Stande sein wird, je genauer man den Vorgang im Einzelnen verfolgt. Der Mathematiker mag sich über solche Erwägungen hinwegsetzen, da es ihm freisteht, nur solche Probleme zu behandeln, die er sich entweder selbst geschaffen hat oder bei denen kein Zweifel darüber möglich ist, welche ideellen Bedingungen an Stelle der im concreten Falle vorhandenen zu setzen sind. Beim Techniker, der bei seinen Untersuchungen stets die Verhältnisse der Wirklichkeit im Auge behalten muss, ist dies aber anders und man kann es daher verstehen, dass man sich in technischen Kreisen um jene allgemeinen Principien der analytischen Mechanik bisher nicht viel gekümmert hat. Wegen der knappen Zeit, die mir grade für die Vorlesungen über Dynamik zu Gebote steht, behandle ich diese Dinge auch selbst nicht in den Vorlesungen. In dem gedruckten Buche, bei dem es nicht viel schadet, wenn es um einige Seiten länger wird und das auch jenen Hörern, die noch etwas Weiteres zu erfahren wünschen, einige Auskunft schuldig ist, darf ich aber nicht darüber hinweggehen.

Diese allgemeinen Sätze haben nämlich noch einen grossen Vorzug, von dem bisher nicht die Rede war. Sie machen nämlich die Benutzung eines Coordinatensystems entbehrlich.

Dieser Vorzug tritt freilich dann besonders deutlich hervor, wenn man sonst alles mit Coordinaten rechnet. Für uns, die wir überall, wo es von Nutzen war, mit den gerichteten Grössen selbst rechneten, ist er zwar von geringerer Bedeutung; es ist aber andererseits verständlich, dass man einen solchen Vorzug um so höher zu schätzen weiss, je mehr man seither schon Vortheil daraus unter anderen Umständen zog.

Zu den allgemeinen Sätzen, von denen jetzt die Rede ist, gehören die Gleichungen von Lagrange, das Princip von Hamilton, das Princip der kleinsten Wirkung und das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Es genügt vollständig, wenn ich mich hier auf die Besprechung der beiden zuerst genannten beschränke, da die übrigen ihnen ganz ähnlich sind.

Man betrachte ein System, das aus starren Körpern derart zusammengesetzt ist, dass in Folge der bestehenden Verbindungen gewisse Bewegungen ausgeschlossen sind. Das System kann auch einen zwangsläufigen Mechanismus bilden. In diesem Falle hat es nach einer früher eingeführten Bezeichnung nur einen Freiheitsgrad. Man kann die Stellung aller Glieder des Systems vollständig angeben, sobald die Lage eines einzigen durch eine richtungslose Grösse zum Ausdrucke gebracht wird. Man bezeichnet diese Grösse als eine „allgemeine Coordinate“ des Systems, die aber mit einem Coordinatensysteme, wie es in der analytischen Geometrie gebraucht wird, nichts zu thun hat. Bei dem Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine könnte man z. B. je nach Wahl den Kolbenweg von einer Todtpunkt-lage aus oder den Winkel zwischen der Kurbelrichtung und der Cylinderaxe als die allgemeine Coordinate des Systems ansehen.

Für die Untersuchung zwangsläufiger Mechanismen haben aber die Gleichungen von Lagrange wenig Werth, obschon sie, wenn man die Sache recht gelehrt darstellen will, auch dazu verwendet werden können. Gewöhnlich handelt es sich um Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Man denke sich etwa einen Körper  $A$  in einem Gestelle um eine Axe drehbar

gelagert, während ein zweiter Körper  $B$  sich längs einer Führung gegen den Körper  $A$  verschieben kann. An beiden Körpern können von aussen her beliebig gegebene Kräfte einwirken und man verlangt, dass die Bewegungen dieser Körper angegeben werden, wenn der Anfangszustand bekannt ist. Nach den gewöhnlichen Methoden der Mechanik löst man diese Aufgabe, indem man die zwischen  $A$  und  $B$  übertragenen Kräfte ins Auge fasst, hierauf für jeden Körper eine Gleichung anschreibt, die den Zusammenhang zwischen den Kräften und den Beschleunigungen ausdrückt und beide Gleichungen mit einander verbindet. Bei Verwendung der Gleichungen von Lagrange u. s. f. gestaltet sich aber die Betrachtung, wie man alsbald sehen wird, in der That erheblich einfacher.

Ein System von drei Freiheitsgraden ist z. B. schon ein einziger starrer Körper, der um ein Kugelgelenk beweglich ist. Man kann hier drei Grössen auf verschiedene Art auswählen, so dass die augenblickliche Lage des Systems durch sie gekennzeichnet wird. Im zweiten Abschnitte ist die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt nach den gewöhnlichen Methoden der Mechanik, d. h. mit Hülfe des Flächensatzes und des Satzes von der lebendigen Kraft bereits behandelt worden; sie kann aber auch mit Hülfe der Lagrange'schen Gleichungen u. s. f. untersucht werden. — Ausserdem kann man ein System von drei Freiheitsgraden z. B. auch dadurch bilden, dass man einem Körper  $A$  einen Freiheitsgrad gegenüber der festen Erde, einem zweiten Körper  $B$  ebenfalls einen Freiheitsgrad gegenüber  $A$  und einem dritten Körper einen Freiheitsgrad gegenüber  $B$  oder auch wieder gegen  $A$  giebt u. s. f. Nur darauf will ich noch hinweisen, dass ein einziger Freiheitsgrad, d. h. eine zwangläufige Bewegung zwischen zwei Körpern entweder durch eine Führung (Prismenpaar) oder durch ein Gelenk (Cylinderpaar) oder durch eine Schraube (Schraubenspindel und Schraubenmutter oder Schraubenpaar) oder wenigstens durch eine thatsächlich auf einen dieser drei Fälle hinaus kommende Vorrichtung hergestellt wird.

Die Zahl der Freiheitsgrade möge jetzt allgemein mit  $n$

bezeichnet werden und die zugehörigen allgemeinen Coordinaten seien

$$q_1, q_2 \dots q_n.$$

Zu den möglichen oder virtuellen Bewegungen des Systems gehört dann jedenfalls auch jene, bei der sich nur eine der Coordinaten  $q$ , etwa  $q_i$  ändert, während die übrigen constant bleiben. Ich möchte es hier lieber vermeiden, ein bestimmtes Beispiel dafür anzuführen, weil es zum Geiste dieser Betrachtungen gehört, sie so allgemein wie möglich darzustellen. Wer aber doch lieber ein Beispiel haben will, möge sich irgend eines der vorher genannten aussuchen; es wird dann immer möglich sein, nur einen der Freiheitsgrade durch eine Bewegung, die in der Veränderung von  $q_i$  um  $\delta q_i$  zum Ausdruck kommt, in Anspruch zu nehmen, während von den übrigen Freiheitsgraden kein Gebrauch gemacht wird.

Bei einer solchen virtuellen Verschiebung  $\delta q_i$  werden die äusseren Kräfte Arbeiten leisten, wenigstens jene, die bei dieser Verschiebung überhaupt betheilt sind. Es kann ja auch sein, dass bei der Verschiebung  $\delta q_i$  die Angriffspunkte einiger von den äusseren Kräften in Ruhe bleiben. Man kann diese Arbeitsleistung etwa in der Form

$$F_i \delta q_i$$

zum Ausdruck bringen. Wenn die äusseren Kräfte und die augenblickliche Lage des Systems gegeben sind, wird sich  $F_i$  immer leicht so ermitteln lassen, dass der vorstehende Ausdruck die Arbeitsleistung der äusseren Kräfte richtig angiebt. Man nehme etwa an, dass sich bei der Aenderung  $\delta q_i$  nur einer von den Körpern des Systems, der mit irgend einem anderen zwangsläufig verbunden, aber sonst frei ist, verschiebe. Dann leisten nur jene äusseren Kräfte Arbeit, die an dem bewegten Theile selbst angreifen. Greift nur eine einzige äussere Kraft an ihm an, so ist unter  $F_i$  deren Componente in der Richtung der Verschiebung  $\delta q_i$  zu verstehen, falls diese in einer Translation besteht. Ist die Coordinate  $q_i$  ein Winkel,  $\delta q_i$  also eine Drehung, so ist  $F_i$  das statische Moment der

äusseren Kraft in Bezug auf die Axe der Drehung. Wirken mehrere äussere Kräfte, so kann man diese etwa zu einer Resultirenden zusammenfassen und hiervon  $F_i$  so wie vorher bilden oder man findet  $F_i$  aus der Summe der Componenten in der Verschiebungsrichtung oder der statischen Momente in Bezug auf die Drehungsaxe. In jedem Falle sind dann die äusseren Kräfte in Bezug auf die Bewegung  $\delta q_i$  gleichwerthig mit einer einzigen Kraft von der Grösse  $F_i$  in der Verschiebungsrichtung oder einem einzigen Kräftepaare vom Momente  $F_i$ , dessen Momentenvektor in die Drehaxe fällt. Aus diesem Grunde kann man in anschaulicher Sprache sagen, dass  $F_i$  allgemein die auf die Coordinate  $q_i$  reducirte äussere Kraft ist. Wir wollen diese Bezeichnung auch dann noch beibehalten, wenn sich bei der virtuellen Lagenänderung  $\delta q_i$  mehrere Körper des Systems verschieben; was dann unter  $F_i$  zu verstehen ist, geht ja aus den vorausgehenden Erörterungen in jedem Falle deutlich genug hervor.

Man betrachte ferner ein Massentheilchen  $m$ , das zu irgend einem von den Körpern des Systems gehört. Der von einem festen Anfangspunkte nach  $m$  gezogene Radiusvektor sei mit  $\mathbf{r}$  bezeichnet. Während der Bewegung des Systems ist  $\mathbf{r}$  veränderlich und die augenblickliche Grösse und Richtung von  $\mathbf{r}$  ist abhängig von  $\mathbf{r}_0$ , d. h. von dem Werthe, den  $\mathbf{r}$  in irgend einer Stellung des Systems, die als seine Normalstellung angesehen wird, einnimmt und den Coordinaten  $q$ . Wir schreiben also

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0 q_1 q_2 \cdots q_n). \quad (169)$$

Die Form der Function  $f$  hängt von der besonderen Construction des Systems ab. Wir bilden jetzt den Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems. Zunächst erhält man aus der Gleichung für  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt}, \quad (170)$$

denn  $\mathbf{r}_0$  ist eine Constante, so lange man dasselbe Massentheilchen  $m$  betrachtet. Für die Differentialquotienten der

Coordinaten  $q$  nach der Zeit empfiehlt sich hier eine schon von Newton herrührende und namentlich bei den englischen Physikern bis auf den heutigen Tag viel gebrauchte Schreibweise. Man deutet nämlich die Differentiation nach  $t$  durch einen darüber gesetzten Punkt an, schreibt also

$$\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1$$

u. s. f. Für die lebendige Kraft  $L$  des ganzen Systems hat man nach Definition

$$L = \frac{1}{2} \sum m \mathbf{v}^2,$$

unter der Voraussetzung, dass sich die Summirung über alle Massentheilen des ganzen Systems erstreckt. Nach Gl. (170) erhält man daraus

$$L = \frac{1}{2} \sum m \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \dot{q}_n \right\}^2, \quad (171)$$

d. h. die lebendige Kraft ist eine Function der allgemeinen Coordinaten  $q$ , durch die die augenblickliche Stellung des Systems und die Werthe  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$  u. s. f. bedingt sind, und der Aenderungsgeschwindigkeiten  $\dot{q}$  und zwar ist sie in Bezug auf die  $\dot{q}$  vom zweiten Grade.

Nach diesen Vorbereitungen denken wir uns ferner das d'Alembert'sche Princip angewendet. An jedem Massentheilen sei also eine Trägheitskraft  $-m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  angebracht. Dann bleibt das System, wenn es in seiner augenblicklichen Stellung zunächst festgehalten wird, auch fernerhin im Gleichgewichte und in Ruhe, sobald es der Einwirkung der äusseren Kräfte und der Trägheitskräfte überlassen wird. Um die Gleichgewichtsbedingungen in Form von Gleichungen aussprechen zu können, denken wir uns eine virtuelle Bewegung  $\delta q_i$  vorgenommen und setzen die Summe der Arbeitsleistungen aller Kräfte für diese virtuelle Bewegung gleich Null. Die Arbeit der äusseren Kräfte ist schon zu  $F_i \delta q_i$  festgestellt. Für die

Trägheitskraft  $-m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  am Massentheilchen  $m$  hat man bei der virtuellen Verschiebung  $\delta q_i$  die Arbeit

$$-m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i.$$

Im Ganzen hat man daher nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung

$$F_i \cdot \delta q_i - \sum m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = 0.$$

Auch hier ist die Summirung über alle Massentheilchen des ganzen Systems zu erstrecken. Da  $\delta q_i$  in allen Gliedern der Gleichung als Faktor auftritt, kann man es wegstreichen und erhält

$$F_i = \sum m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \quad (172)$$

Dieser Ausdruck kann nun noch etwas umgeformt werden. Man hat nämlich nach dem Satze über die Differentiation eines Produkts

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right).$$

Daher kann an Stelle der Gl. (172) geschrieben werden

$$F_i = \sum m \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \sum m \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right). \quad (173)$$

Die beiden Summen, die hierin vorkommen, lassen sich aber als Differentialquotienten der lebendigen Kraft  $L$ , die durch Gl. (171) als Function der  $q$  und der  $\dot{q}$  dargestellt wurde, auffassen. Durch Differentiation von  $L$  nach  $\dot{q}_i$  erhält man nämlich

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum m \mathbf{v}^2 = \sum m \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \sum m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}.$$

Bei der letzten Umformung beachte man, dass  $\mathbf{v}$  nach Gl. (170) eine lineare Function der  $\dot{q}$  ist und dass der Faktor, mit dem  $\dot{q}_i$  multiplicirt ist, in dieser Gleichung  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$  lautet. Differentiirt man die vorstehende Gleichung, die zu jeder Zeit  $t$  gültig ist, nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \Sigma m \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right),$$

also in der That den ersten der beiden Summenausdrücke in Gl. (173). Ebenso wird

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \Sigma m \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \Sigma m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \Sigma m \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right),$$

denn die Reihenfolge der Differentiationen von  $\mathbf{r}$  nach  $t$  und nach  $q_i$  kann vertauscht werden, da ja in der That bei direkter Ausführung der Differentiation

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_n,$$

also derselbe Werth wie bei Differentiation von  $\mathbf{v}$  nach  $q_i$  (vgl. Gl. (170)) gefunden wird. Setzt man diese Werthe ein, so geht Gl. (173) über in

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (174)$$

Das ist eine der Lagrange'schen Gleichungen und für jeden anderen Freiheitsgrad oder für jede andere Coordinate  $q$  lässt sich eine nach demselben Muster anschreiben. Man erhält, wenn dies geschieht, ebenso viele Differentialgleichungen zwischen den Coordinaten  $q$  (und ihren Differentialquotienten) als Freiheitsgrade vorhanden sind, d. h. ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Die Integration dieser Differentialgleichungen ist nachher eine Aufgabe für sich, die mit der Lagrange'schen Methode nichts zu thun hat, sondern ebenso erfolgen muss, als wenn man die Differentialgleichungen der Bewegung nach den gewöhnlichen Methoden abgeleitet hätte.

Ehe ich dazu übergehe, die Benutzung der Gleichungen zur Lösung von Aufgaben auseinander zu setzen, möchte ich noch auf die Voraussetzungen aufmerksam machen, auf denen die Ableitung beruht und die bisher noch nicht hinreichend betont wurden. Vor allem müssen die Körper wirklich als starr betrachtet werden dürfen, so nämlich, dass die etwa in ihnen aufgespeicherte Formänderungsarbeit gegen die

lebendige Kraft oder vielmehr die Aenderung, die die Formänderungsarbeit etwa erfährt, gegenüber der Aenderung der lebendigen Kraft oder gegenüber der Arbeit der äusseren Kräfte vollständig vernachlässigt werden kann. Ferner ist auch die Arbeit der inneren Kräfte, die zwischen verschiedenen Körpern des Systems auftreten, überall gleich Null gesetzt. Das ist aber nur dann streng richtig, wenn zunächst keine Fernkräfte zwischen den einzelnen Gliedern auftreten und wenn ferner auch keine Reibungswiderstände zu berücksichtigen sind. Hätte man Reibungen in den Führungen oder Gelenken, so müsste natürlich ein Theil der Arbeit  $F_i \delta q_i$  bei der virtuellen Verschiebung  $\delta q_i$  auf die Ueberwindung der Reibungen verwendet werden. Man kann sich aber in solchen Fällen damit helfen, dass man etwaige Fernkräfte (z. B. Abstossungen zwischen Magneten, wenn solche im Systeme vorkommen) nicht zu den inneren Kräften rechnet, sondern sie so behandelt, als wenn sie von aussen her angebracht wären, sie also in die  $F$  mit einrechnet. Dasselbe gilt auch von den Reibungen.

### § 33. Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben.

Das Verfahren bei der Benutzung dieser Gleichungen gleicht, wie ich schon vorher bemerkte, vollständig dem aus der Festigkeitslehre von der Castigliano'schen Methode her bekannten. Wie dort zuerst für die Formänderungsarbeit, stellt man hier vor Allem einen Ausdruck für die lebendige Kraft in den gewählten allgemeinen Coordinaten auf. Dann bildet man die in Gl. (174) vorgeschriebenen Differentialquotienten und setzt ihre Differenz gleich dem aus den Bedingungen der Aufgabe bekannten Werthe von  $F$ .

Es wird am besten sein, wenn ich dieses Verfahren zunächst an einem möglichst einfach gewählten Beispiele vorführe, für das wir die Lösung schon früher auf einfacherem Wege gefunden haben. Ich wähle dazu das physische Pendel, also einen zwangläufigen Mechanismus. Die die augenblickliche Stellung des Systems beschreibende Coordinate sei der